Funciones de Autocorrelación

Luca Martino

Apuntes no revisados

Cuidado!

“AutoConvolución”

- Antes de todo, para evitar confusiones, definimos una “auto-convolución” (la conv. de una señal con si misma) que SIEMPRE será

$$C_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(\tau - t)dt =$$

$$= x(t) * x^*(t)$$

- En frecuencia tenemos (utilizando la propiedad de la conv. y que $F\left\{x^*(t)\right\} = X^*(-f)$)

$$C_X(f) = X(f)X^*(-f)$$

Nota que la definición de trasformada de Fourier de una señal x(t) tiene sentido si la señal es determinista. Para proceso estoc. se hablará de “*Densidad espectral de potencia*”.

Autocorrelación para V.A.

- En términos de variables aleatorias en un proceso estocástico estacionario

$$R_X(\tau) = E[X(t)X^*(t+\tau)] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t+\tau)\underbrace{f_X(x(t),x^*(t+\tau))}_{\text{Densidad conjunta}}dx_t dx_{t+\tau}$$

- Utilizamos en este caso la *X* mayúscula para indicar una variable aleatoria.
- La integración es respecto a las "x", el tiempo juega el papel de un parámetro.

Autocorrelación temporal para E.F.

- Para una señal de ***energía finita*** (E.F.) se define una Autocorrelación TEMPORAL como

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t+\tau)dt = x(t) * x^*(-t)$$

- Aquí como en el caso de la "autoconvolución" integramos respecto a *t*.
- Está definición no puede ser utilizada en el caso de los procesos estocásticos. Luego veremos el porque.
- La transf. de Fourier de esta autocorrelación es (utilizando la propiedad de la conv. y que $F\left\{x^*(-t)\right\} = X^*(f)$)

$$S_X(f) = X(f)X^*(f) = \left|X(f)\right|^2$$

Densidad espectral de potencia
para una señal determinista.

Recuerda que la trasformada de Fourier de una señal x(t) tiene sentido si es determinista. Sino hay que hacer un "promedio"…..

Autocorrelación temporal para P.M.F.

- Para una señal de ***potencia media finita*** (P.M.F) se define una Autocorrelación TEMPORAL como

$$R_X(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) x^*(t+\tau) dt$$

- Aquí como en el caso de anterior integramos respecto a *t*.

- Esta definición cobra sentido en el caso de los procesos estocásticos. Vamos a ver el porque en las próximas diapositivas.

Energía

- Dada una señal determinista, la energía *H* se define como

$$H_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)\,dt$$

- En el caso de un proceso estocástico:

$$H_X = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X^2(t)\,dt\right] =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} E\left[X^2(t)\right]dt = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(0)\,dt$$

Energía

Recordando que $R_X(0) = E\left[\left|X(t)\right|^2\right] \geq 0$

- La única manera para que este integral no diverja es que la función dentro del integral sea nula

$$H_X = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(0)\,dt = R_X(0)\int_{-\infty}^{+\infty} dt \leq +\infty$$

$$R_X(0) = 0$$

- Ahora recordando que

$$R_X(0) \geq \left|R_X(\tau)\right| \geq 0 \Rightarrow R_X(\tau) = 0$$

- esto ocurre solo se

$$R_X(\tau) = 0 \Rightarrow X(t) = 0$$

Es decir para procesos estocástico
No tiene sentido hablar de señales
de energía (finita)....

En los procesos estocásticos

- En el caso de procesos estocásticos (estacionarios) tiene sentido hablar solo de señales con potencia finita, es decir la única definición de autocorrelación que tiene sentido es esta

$$R_X(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) x^*(t+\tau) dt$$