Problems - Examples: Fourier Series and periodicity

Linear systems and circuit applications and Señales y Sistemas

Luca Martino — luca.martino@urjc.es — http://www.lucamartino.altervista.org

Based also on Professor Óscar Barquero Perez, Andrés Martínez and José Luis Rojo's slides

Summary table

• If x(t) is a real signal $x(t) = x(t)^*$ $\longrightarrow$	• hermitian $a_k = a^*_{-k}$
• If x(t) is a even signal $x(t) = x(-t)$ $\longrightarrow$	• even $a_k = a_{-k}$
• If x(t) is a odd signal $x(t) = -x(-t)$ $\longrightarrow$	• odd $a_k = -a_{-k}$

Summary table

- If x(t) is a real and even signal

$$x(t) = x(t)^*$$
$$x(t) = x(-t)$$

$\longrightarrow$

- a_k are real and even

$$a_k = a_k^*$$
$$a_k = a_{-k}$$

- If x(t) is a real and odd signal

$$x(t) = x(t)^*$$
$$x(t) = -x(-t)$$

$\longrightarrow$

- a_k are pure imaginary and odd

$$a_k = -a_k^*$$
$$a_k = -a_{-k}$$

Example 1

Consider a periodic signal x(t) with fundamental frequency:

$$\omega_0 = 2\pi$$

and with the following NON-NULL coefficients of the Fourier Series:

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4},$$

$$a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2},$$

$$a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}.$$

Write the analytic formula of x(t).

Example 1

Looking the non-null coefficients
and the fund. frequency
we can write:

$$x(t) = \sum_{k=-3}^{+3} a_k e^{jk2\pi t},$$

$$\omega_0 = 2\pi$$

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4},$$

$$a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2},$$

$$a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}.$$

Example 1

$$x(t) = \sum_{k=-3}^{+3} a_k e^{jk2\pi t},$$

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4},$$

$$a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2},$$

$$a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}.$$

Rescribiendo la ecuación y juntando cada una de las componentes armónicas que tienen la misma frecuencia fundamental, obtenemos

$$x(t) = 1 + \frac{1}{4}(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) + \frac{1}{2}(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}) + \frac{1}{3}(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}).$$

This is already the solution

Example 1

De forma equivalente, usando la relación de Euler, podemos escribir $x(t)$ en la forma

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos 2\pi t + \cos 4\pi t + \frac{2}{3}\cos 6\pi t.$$

This is another way to write the solution

Example 1

This part is not required by the problem, it is just for more understanding

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2}\cos 2\pi t + \cos 4\pi t + \frac{2}{3}\cos 6\pi t.$$

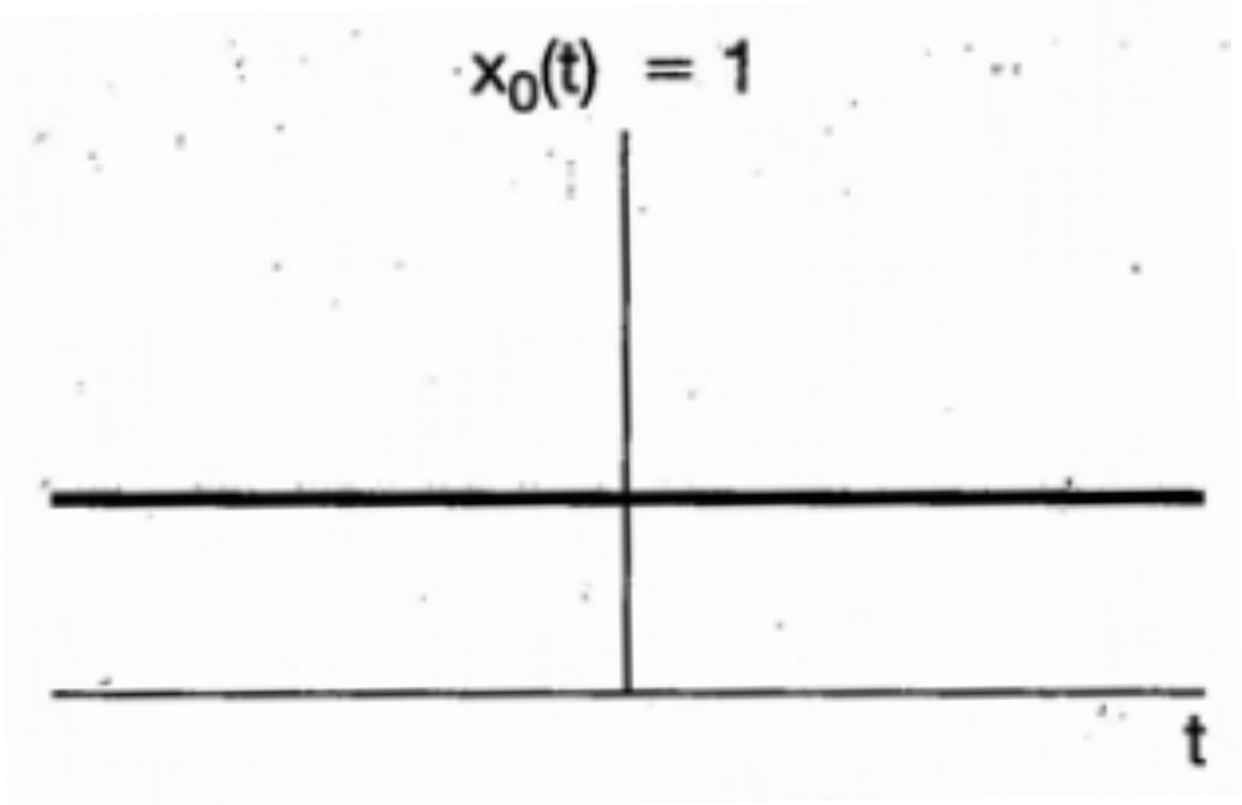
$x_0(t)$ $x_1(t)$ $x_2(t)$ $x_3(t)$

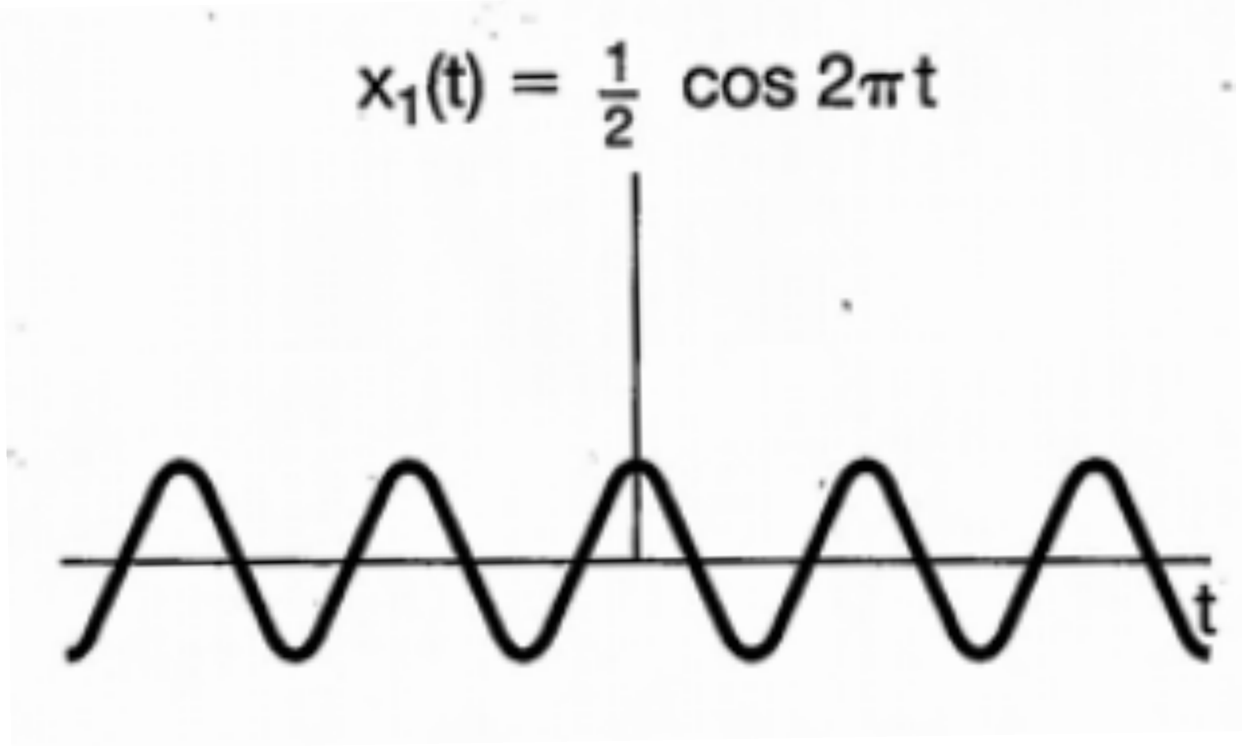
En la figura mostramos gráficamente la manera en que la señal $x(t)$ se construye a partir de sus componentes armónicas.

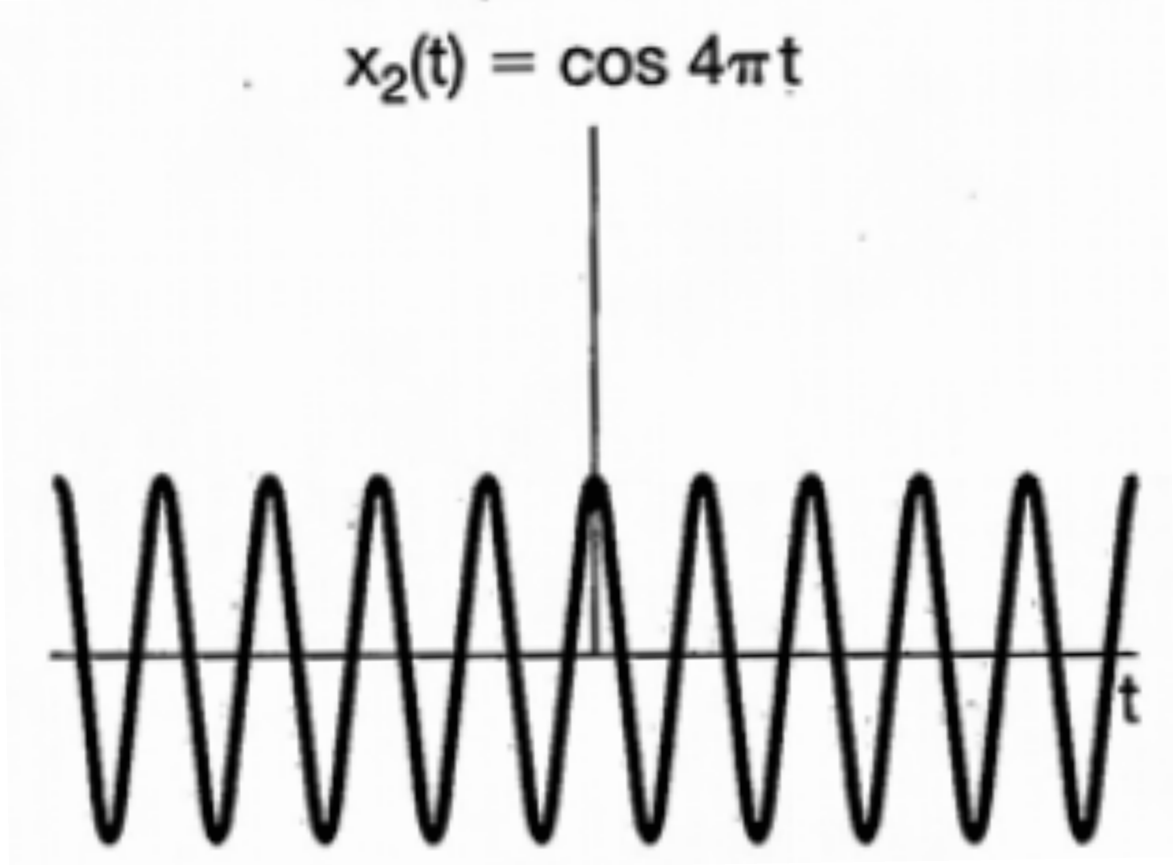
Example 1

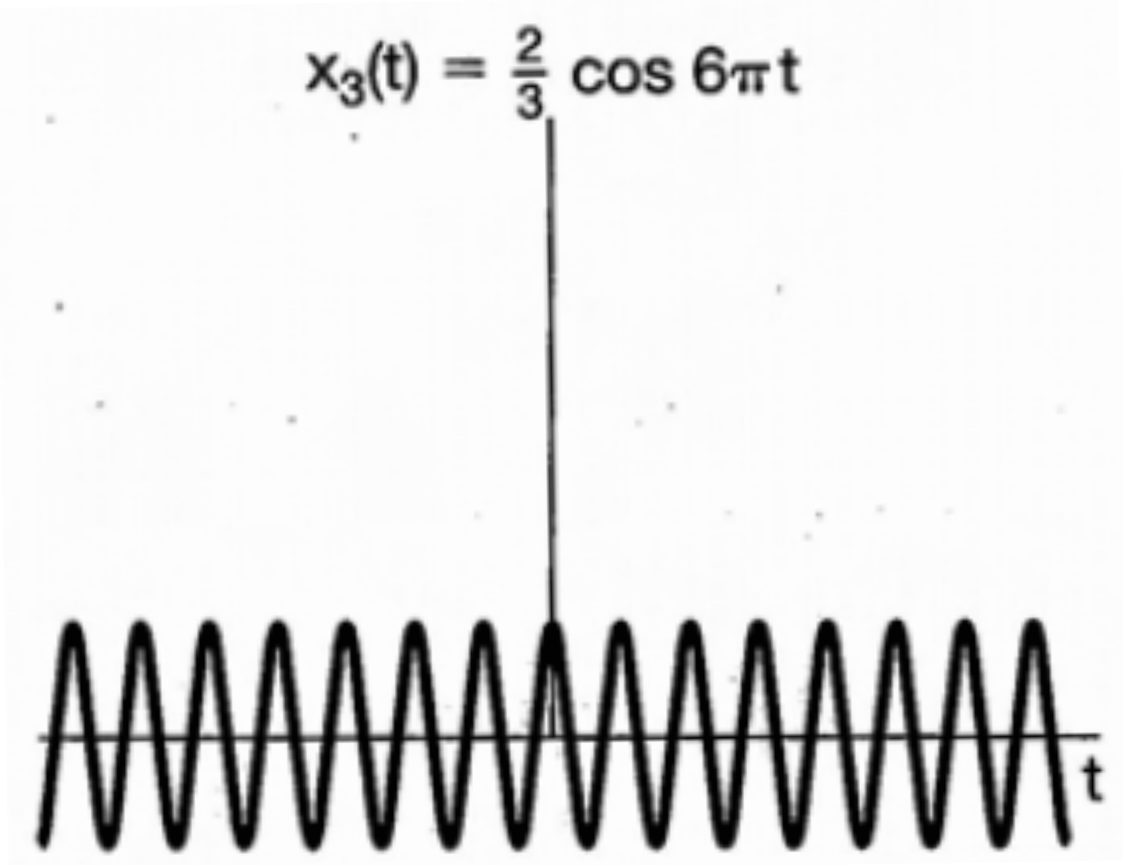
This part is not required by the problem, it is just for more understanding

En la figura mostramos gráficamente la manera en que la señal $x(t)$ se construye a partir de sus componentes armónicas.



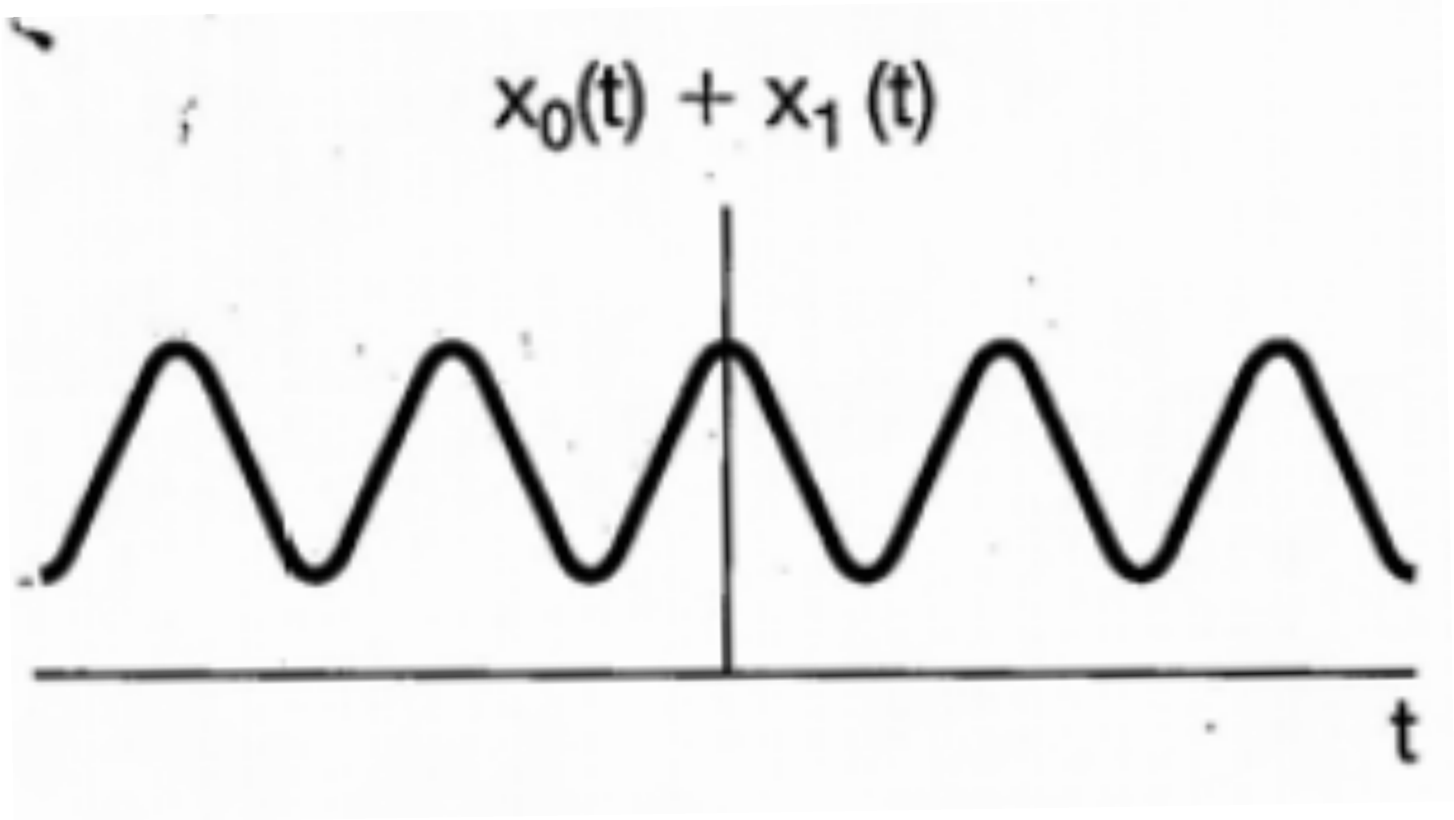


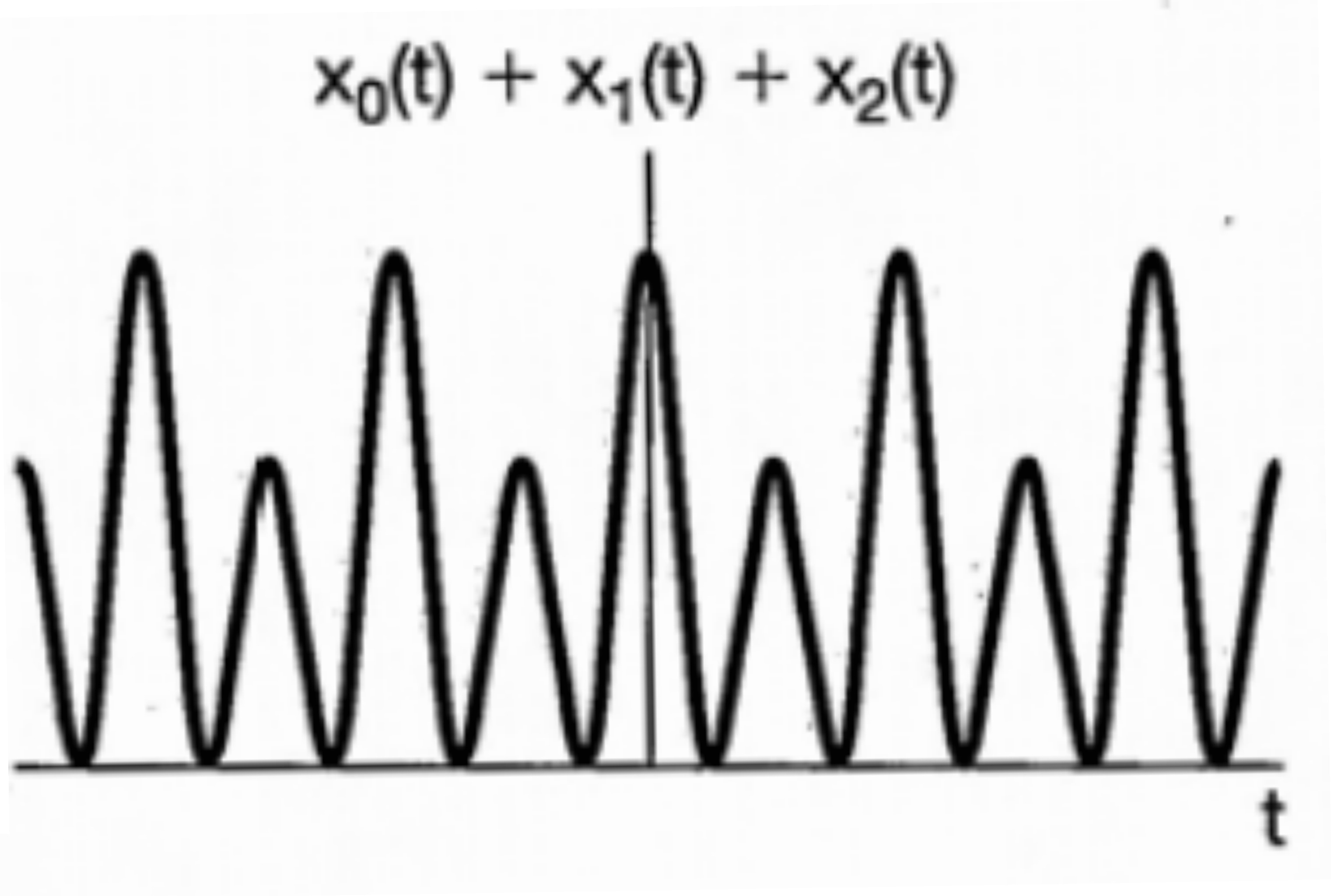


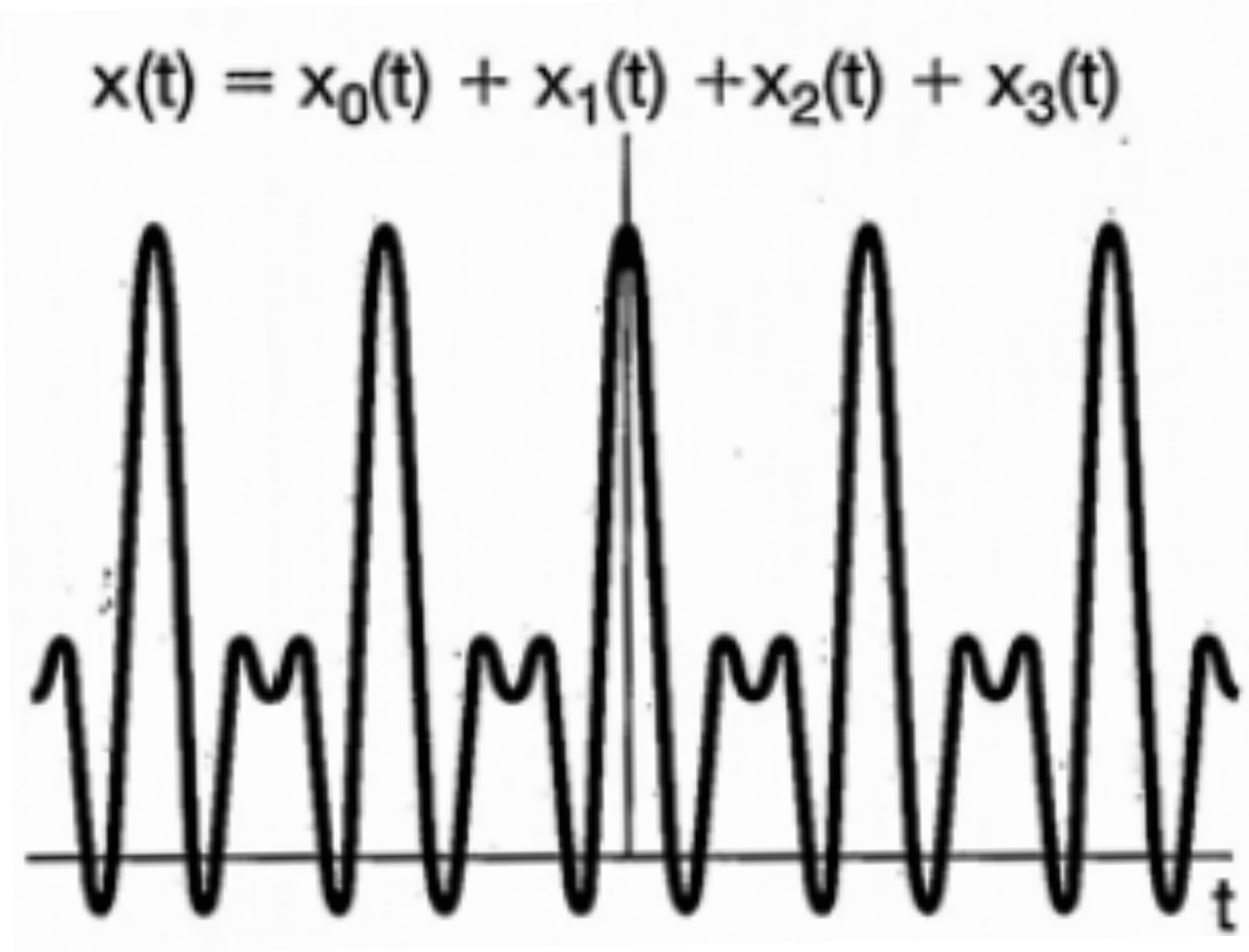


Example 1

This part is not required by the problem, it is just for more understanding







Example 2

Consider again periodic signal x(t)

with the following NON-NULL coefficients of the Fourier Series:

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4},$$

$$a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2},$$

$$a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}.$$

WITHOUT write the analytic formula of x(t),
just looking the coefficients,
explain how you can ensure that
the signal x(t) is real and even.

Example 2

Looking the non-null coefficients, we can see that:

$$a_k = a_k^*$$
$$a_k = a_{-k}$$

$$a_0 = 1,$$
$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4},$$
$$a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2},$$
$$a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}.$$

i.e., they are real and even,
so that x(t) is also real and even.
This is the solution

Example 3

Sea

$$x(t) = 1 + \operatorname{sen}\omega_0 t + 2\cos\omega_0 t + \cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right),$$

la cual tiene frecuencia fundamental ω_0.

Compute the coefficients of the Fourier Series

Example 3

Sea

$$x(t) = 1 + \operatorname{sen}\omega_0 t + 2\cos\omega_0 t + \cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right),$$

la cual tiene frecuencia fundamental ω_0.

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2j}\left[e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}\right] + \left[e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right] + \frac{1}{2}\left[e^{j(2\omega_0 t + \pi/4)} + e^{-j(2\omega_0 t + \pi/4)}\right].$$

Agrupando términos obtenemos

$$x(t) = 1 + \left(1 + \frac{1}{2j}\right)e^{j\omega_0 t} + \left(1 - \frac{1}{2j}\right)e^{-j\omega_0 t} + \left(\frac{1}{2}e^{j(\pi/4)}\right)e^{j2\omega_0 t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j(\pi/4)}\right)e^{-j2\omega_0 t}.$$

Example 3

Compare now the two formulas:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(t) = 1 + \left(1 + \frac{1}{2j}\right)e^{j\omega_0 t} + \left(1 - \frac{1}{2j}\right)e^{-j\omega_0 t} + \left(\frac{1}{2}e^{j(\pi/4)}\right)e^{j2\omega_0 t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j(\pi/4)}\right)e^{-j2\omega_0 t}.$$

Example 3

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(t) = 1 + \left(1 + \frac{1}{2j}\right)e^{j\omega_0 t} + \left(1 - \frac{1}{2j}\right)e^{-j\omega_0 t} + \left(\frac{1}{2}e^{j(\pi/4)}\right)e^{j2\omega_0 t} + \left(\frac{1}{2}e^{-j(\pi/4)}\right)e^{-j2\omega_0 t}.$$

We can write then:

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = \left(1 + \frac{1}{2j}\right) = 1 - \frac{1}{2}j,$$

$$a_{-1} = \left(1 - \frac{1}{2j}\right) = 1 + \frac{1}{2}j,$$

$$a_2 = \frac{1}{2}e^{j(\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + j),$$

$$a_{-2} = \frac{1}{2}e^{-j(\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - j),$$

$$a_k = 0, |k| > 2.$$

Example 3

Summary - we get:

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = \left(1 + \frac{1}{2j}\right) = 1 - \frac{1}{2}j,$$

$$a_{-1} = \left(1 - \frac{1}{2j}\right) = 1 + \frac{1}{2}j,$$

$$a_2 = \frac{1}{2}e^{j(\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + j),$$

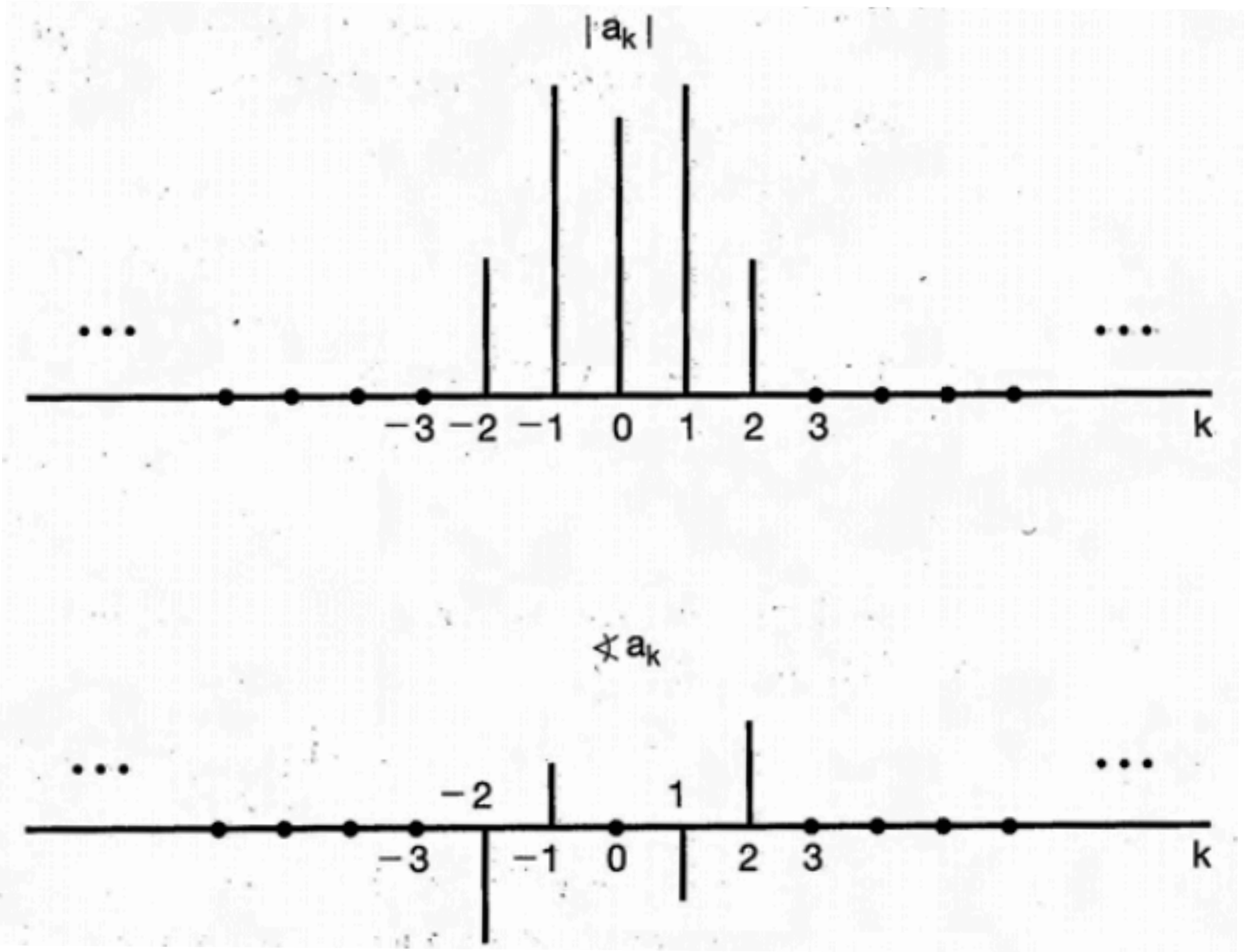
$$a_{-2} = \frac{1}{2}e^{-j(\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - j),$$

$$a_k = 0, |k| > 2.$$

This is the solution

Example 3

This part is not required by the problem, it is just for more understanding



Example 4

Sea

$$x(t) = 1 + \operatorname{sen}\omega_0 t + 2\cos\omega_0 t + \cos\left(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4}\right),$$

la cual tiene frecuencia fundamental ω_0.

Compute the Generalized Fourier Transform (GTF)

Example 4

From the previous example, we know:

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = \left(1 + \frac{1}{2j}\right) = 1 - \frac{1}{2}j,$$

$$a_{-1} = \left(1 - \frac{1}{2j}\right) = 1 + \frac{1}{2}j,$$

$$a_2 = \frac{1}{2}e^{j(\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + j),$$

$$a_{-2} = \frac{1}{2}e^{-j(\pi/4)} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - j),$$

$$a_k = 0, |k| > 2.$$

Example 4

and the GTF of a periodic signal is:

$$X_G(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

then:

$$X_G(\omega) = 2\pi \left[a_{-2}\delta(\omega + 2\omega_0) + a_{-1}\delta(\omega + \omega_0) + a_0\delta(\omega) + a_1\delta(\omega - \omega_0) + a_2\delta(\omega - 2\omega_0)\right]$$

$$X_G(\omega) = 2\pi \Big[\frac{\sqrt{2}}{4}(1 - j)\delta(\omega + 2\omega_0) + (1 + 0.5j)\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega)$$

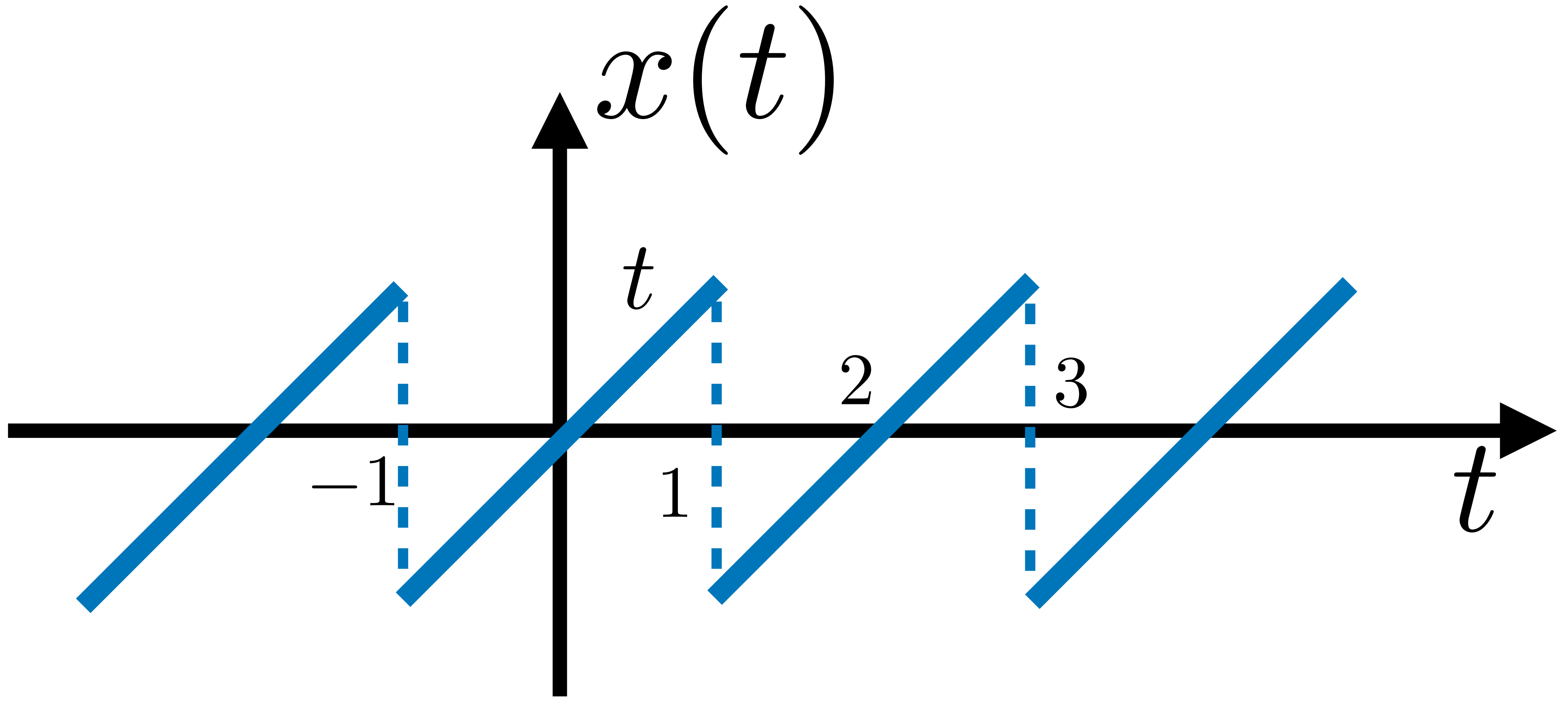
$$+(1 - 0.5j)\delta(\omega - \omega_0) + \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + j)\delta(\omega - 2\omega_0)\Big]$$

This is the solution

Example 5

$$x(t) = t \qquad -1 < t < 1$$

$$T_0 = 2$$



Compute the coefficient of the Fourier Series

Example 5

By definition: $$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$a_k = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} te^{-jk\frac{2\pi}{2}t}dt$$

$$a_k = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} te^{-jk\pi t}dt$$

Example 5

About integral of this type: $$\int t e^{at} dt$$

Integral by parts ("lo de la vaca…"):

$$\begin{aligned}\int t e^{at} dt &= t\frac{1}{a}e^{at} - \frac{1}{a}\int e^{at} dt \\ &= \frac{1}{a} t e^{at} - \frac{1}{a^2} e^{at} + C \\ &= \frac{1}{a^2}[at - 1]e^{at} + C\end{aligned}$$

Example 5

We obtain: $$\int te^{at}dt = \frac{1}{a^2}[at - 1]e^{at} + C$$

Apply to our definite integral:

$$a_k = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} te^{-jk\pi t}dt$$

$$= \left[\frac{1}{(-jk\pi)^2}[(-jk\pi)t - 1]e^{-jk\pi t}\right]_{-1}^{1}$$

Example 5

$$a_k = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} te^{-jk\pi t}dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(-jk\pi)^2}[(-jk\pi)t - 1]e^{-jk\pi t}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{k^2\pi^2}[jk\pi t + 1]e^{-jk\pi t}\right]_{-1}^{1}$$

$$= -\frac{1}{2k^2\pi^2}\left([jk\pi + 1]e^{-jk\pi} - [-jk\pi + 1]e^{+jk\pi}\right)$$

This is already the solution

Example 5

$$= -\frac{1}{2k^2\pi^2}\left([jk\pi + 1]e^{-jk\pi} - [-jk\pi + 1]e^{+jk\pi}\right)$$

$$a_k = -\frac{1}{2k^2\pi^2}\left[jk\pi\underbrace{\left(e^{-jk\pi} + e^{+jk\pi}\right)}_{2\cos(\pi k)} + \underbrace{\left(e^{+jk\pi} - e^{+jk\pi}\right)}_{2j\sin(\pi k)}\right]$$

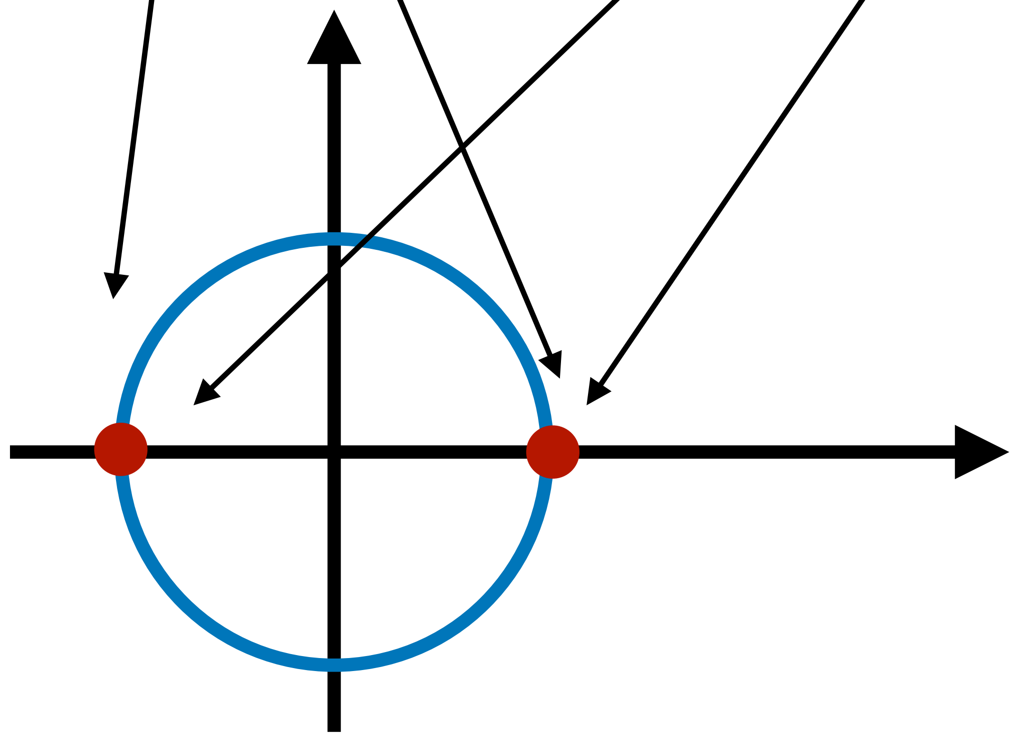
$$a_k = -\frac{1}{2k^2\pi^2}\left[2jk\pi\cos(\pi k) + 2j\sin(\pi k)\right]$$

Example 5

$$a_k = -\frac{1}{2k^2\pi^2}\left[2jk\pi\cos(\pi k) + 2j\sin(\pi k)\right]$$

$$\cos(\pi k) = (-1)^k$$

$$\sin(\pi k) = 0$$



Example 5

$$a_k = -\frac{j}{k\pi}(-1)^k$$

Other form of the solution;

from this form we see that is indeterminate at k=0

$$a_k = -\frac{j}{k\pi}(-1)^k \qquad k \neq 0$$

Example 5

$$a_k = -\frac{j}{k\pi}(-1)^k \qquad k \neq 0$$

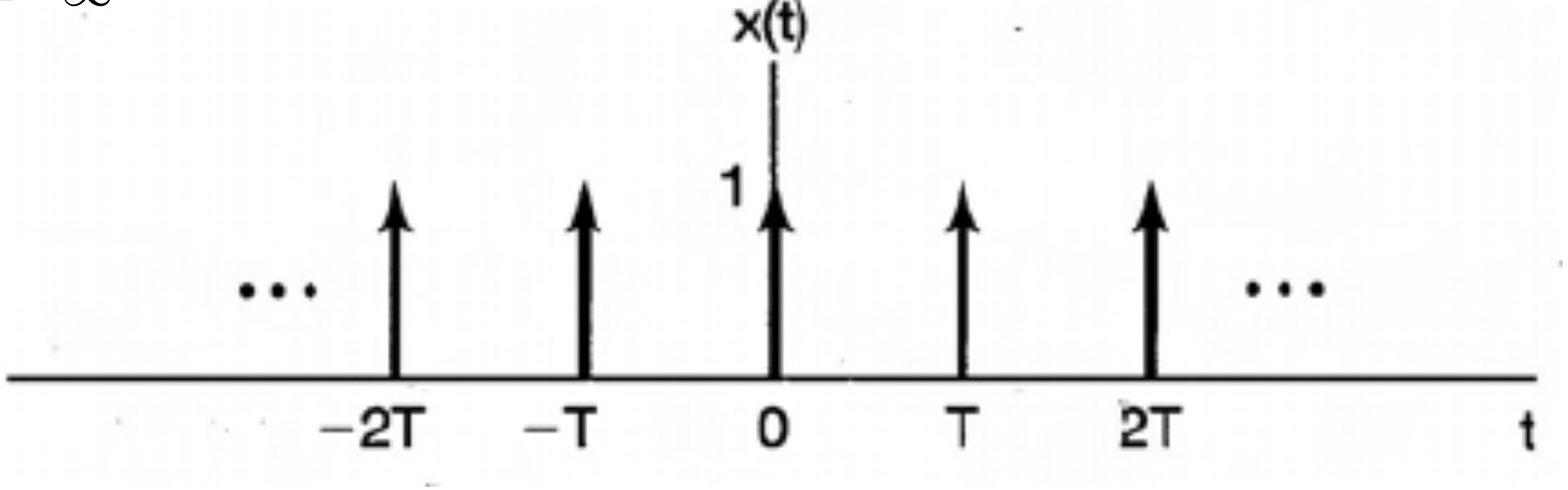
For k=0 we can do the following:

$$a_k = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} te^{-jk\pi t}dt \qquad a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} tdt$$

$$a_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^{1} = 0$$

Example 6

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - kT\right)$$



Compute the coefficient of the Fourier Series

Example 6

Una señal que será en extremo útil en nuestro análisis de sistemas de muestreo en el capítulo 7 es el tren de impulsos

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT),$$

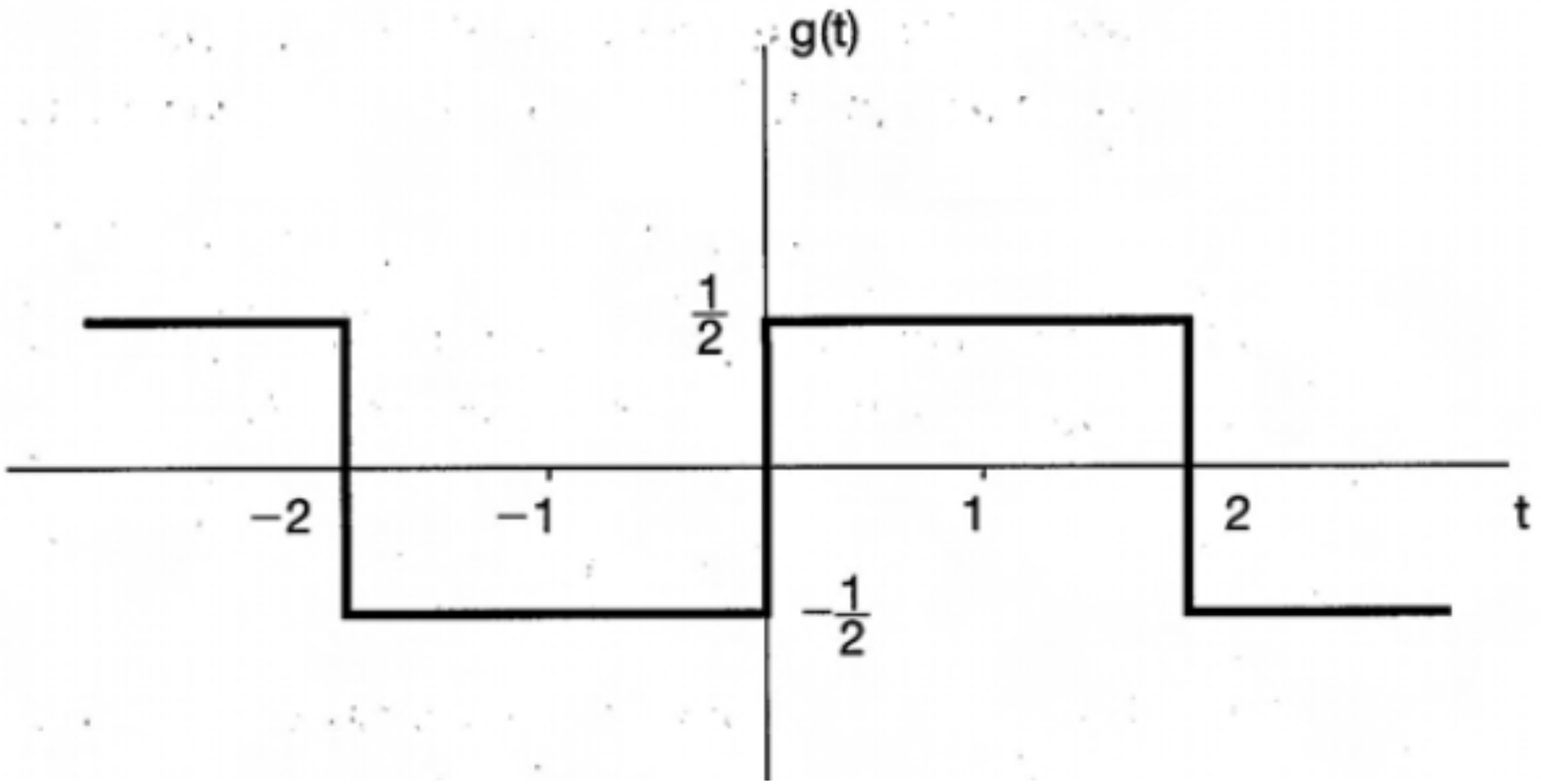
el cual es periódico con periodo T, como se indica en la figura 4.14(a). Los coeficientes de la serie de Fourier para esta señal se calcularon en el ejemplo 3.8 y están dados por

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t}\, dt = \frac{1}{T}.$$

This is the solution

Example 7

Considere la señal $g(t)$ con un periodo fundamental de 4,

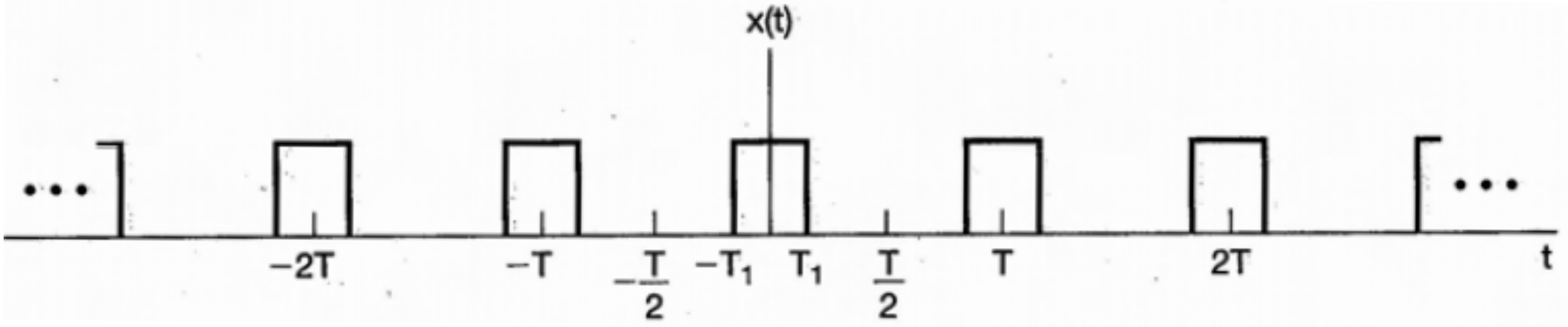


Compute the coefficient of the Fourier Series of g(t)

Example 7

we could use the definition,
but here we use another methodology

We use the relationship with the following signal:



The coefficients are in this case: $a_k = \frac{\text{sen}(k\omega_0 T_1)}{k\pi}, \quad k \neq 0, \qquad a_0 = \frac{1}{2}.$

Example 7

Looking the figures, We can write:

With: $T_1 = 1 \quad T = 4 \quad \text{for } x(t)$

$$g(t) = x(t-1) - 1/2.$$

$$a_k = \frac{\text{sen}(\pi k/2)}{k\pi}, \qquad k \neq 0,$$

Example 7

La propiedad de desplazamiento de tiempo en la tabla 3.1 indica que, si los coeficientes de la serie de Fourier de $x(t)$ se denotan como a_k, los coeficientes de Fourier de $x(t-1)$ se pueden expresar como

$$b_k = a_k e^{-jk\pi/2}.$$

Los coeficientes de Fourier del *nivel* de *cd* en $g(t)$, es decir, los términos de $-1/2$ del miembro derecho de la ecuación $\qquad$ están dados por

$$g(t) = x(t-1) - 1/2.$$

$$c_k = \begin{cases} 0, & \text{para } k \neq 0 \\ -\frac{1}{2}, & \text{para } k = 0 \end{cases}.$$

Example 7

Aplicando la propiedad de linealidad de , concluimos que los coeficientes para $g(t)$ se pueden expresar como

$$d_k = \begin{cases} a_k e^{-jk\pi/2}, & \text{para } k \neq 0 \\ a_0 - \frac{1}{2}, & \text{para } k = 0 \end{cases},$$

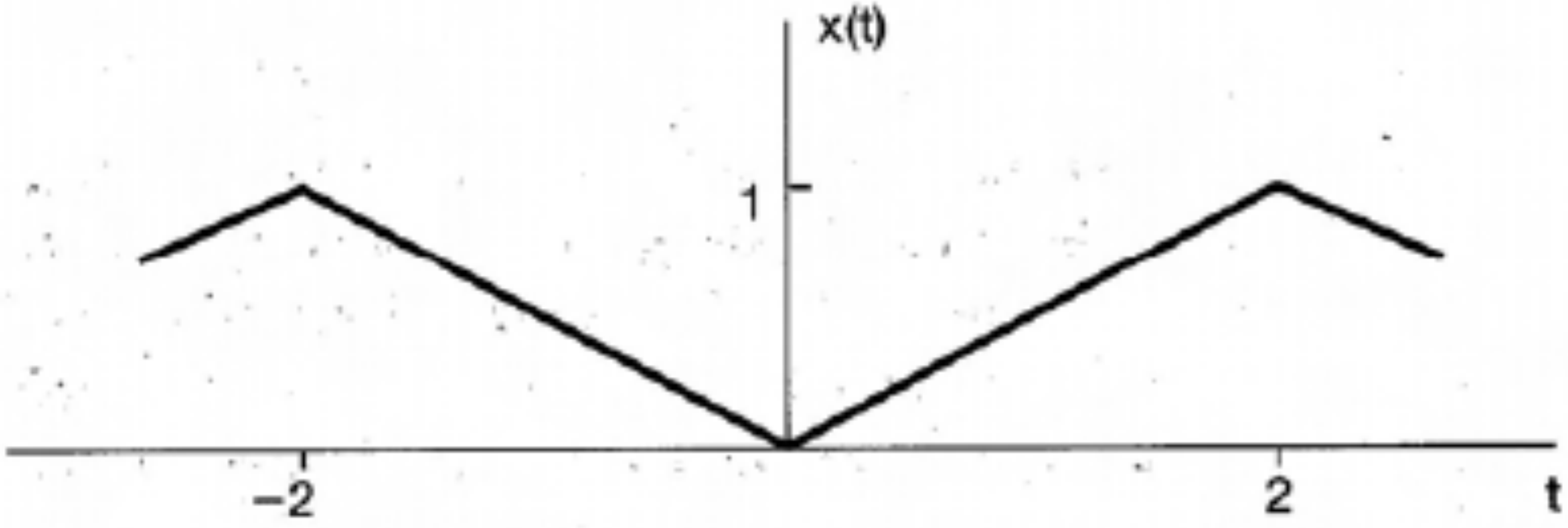
donde cada a_k se puede reemplazar ahora por la expresión correspondiente de las ecuaciones , lo que produce

$$d_k = \begin{cases} \frac{\text{sen}(\pi k/2)}{k\pi} e^{-jk\pi/2}, & \text{para } k \neq 0 \\ 0, & \text{para } k = 0 \end{cases}. \tag{3.72}$$

This is the solution

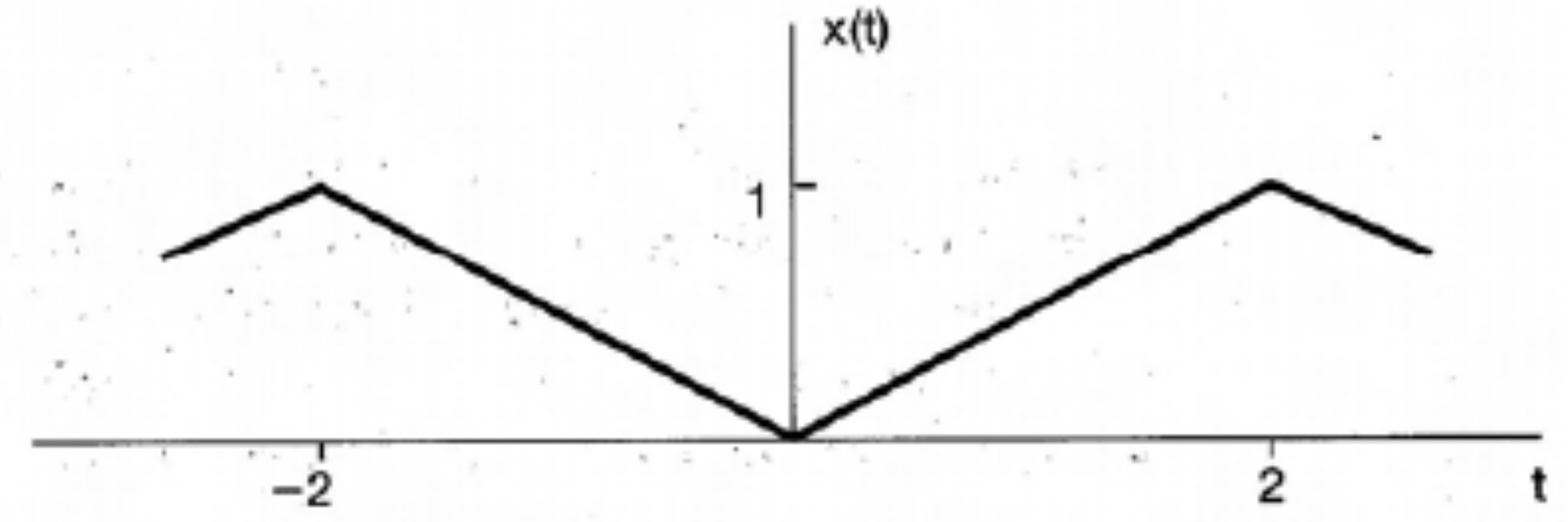
Example 8

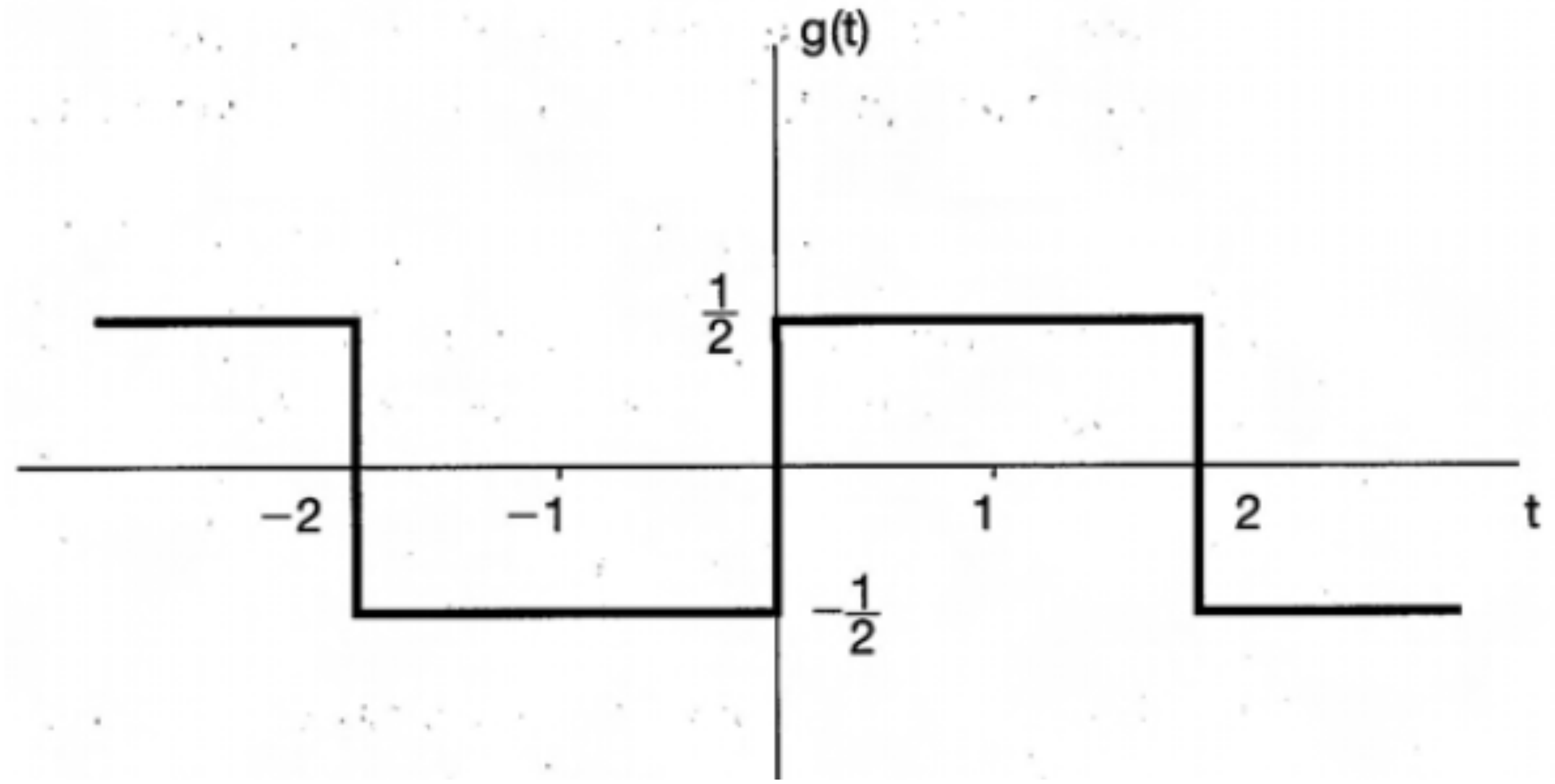
Considere la señal de onda triangular $x(t)$ con periodo $T = 4$ y frecuencia fundamental $\omega_0 = \pi/2$



Compute the coefficient of the Fourier Series of x(t)

Example 8





We can use the direct definition, but here we can use other method. The derivative of this signal x(t) is the g(t) of the previous example

Example 8

Denotando los coeficientes de Fourier de $g(t)$ mediante d_k y los de $x(t)$ mediante e_k, vemos que la propiedad de diferenciación de la tabla 3.1 indica que

$$d_k = jk(\pi/2)e_k.$$

Esta ecuación se puede usar para expresar e_k en términos de d_k, excepto cuando $k = 0$. Específicamente, de la ecuación (3.72),

$$e_k = \frac{2d_k}{jk\pi} = \frac{2\,\mathrm{sen}(\pi k/2)}{j(k\pi)^2}e^{-jk\pi/2}, \qquad k \neq 0.$$

Para $k = 0$, e_0 se puede determinar encontrando el área bajo un periodo de $x(t)$ y dividiendo entre la longitud del periodo:

$$e_0 = \frac{1}{2}.$$

This is the solution

Example 9

Let us consider the periodic signal with To=2:

$$x(t) = 1 + e^{-j\pi t} + (1 + j)e^{j\pi t} - 3e^{-j2\pi t}$$

Compute the coefficient of the Fourier Series of x(t)

Example 9

The fundamental frequency is: $$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$x(t) = 1 + e^{-j\pi t} + (1+j)e^{j\pi t} - 3e^{-j2\pi t}$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) = 1 + e^{-j\omega_0 t} + (1+j)e^{j\omega_0 t} - 3e^{-j2\omega_0 t}$$

Example 9

Compare now the two formulas:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(t) = 1 + e^{-j\omega_0 t} + (1+j)e^{j\omega_0 t} - 3e^{-j2\omega_0 t}$$

$$a_0 = 1,\ a_{-1} = 1,\ a_1 = 1 + j,\ a_{-2} = -3$$

The rest of a_k are zero, $a_k = 0$

This is the solution

Example 10

Suponga que se nos dan los siguientes datos sobre la señal $x(t)$:

1. $x(t)$ es una señal real.
2. $x(t)$ es periódica con periodo $T = 4$, y tiene coeficientes de la serie de Fourier a_k.
3. $a_k = 0$ para $|k| > 1$.
4. La señal con coeficientes de Fourier $b_k = e^{-j\pi k/2} a_{-k}$ es impar.
5. $\frac{1}{4}\int_4 |x(t)|^2 dt = 1/2$.

With this information, write the analytical form x(t)

Example 10

Suponga que se nos dan los siguientes datos sobre la señal $x(t)$:

1. $x(t)$ es una señal real.
2. $x(t)$ es periódica con periodo $T = 4$, y tiene coeficientes de la serie de Fourier a_k.
3. $a_k = 0$ para $|k| > 1$.
4. La señal con coeficientes de Fourier $b_k = e^{-j\pi k/2} a_{-k}$ es impar.
5. $\frac{1}{4}\int_{4} |x(t)|^2 dt = 1/2$.

With this information, write the analytical form x(t)

Example 10

Mostraremos ahora que esta información es suficiente para determinar la señal $x(t)$ hasta quedar solamente la incertidumbre del signo de un factor. De acuerdo con el punto 3, $x(t)$ tiene cuando mucho tres coeficientes a_k de la serie de Fourier diferentes de cero: a_0, a_1 y a_{-1}. Entonces, puesto que $x(t)$ tiene frecuencia fundamental $\omega_0 = 2\pi/4 = \pi/2$, se sigue a que

$$x(t) = a_0 + a_1 e^{j\pi t/2} + a_{-1} e^{-j\pi t/2}.$$

Ya que $x(t)$ es real (punto 1), podemos usar las propiedades de simetría para concluir que a_0 es real y $a_1 = a^*_{-1}$. En consecuencia,

$$x(t) = a_0 + a_1 e^{j\pi t/2} + (a_1 e^{j\pi t/2})^* = a_0 + 2\Re e\{a_1 e^{j\pi t/2}\}.$$

Example 10

Determinemos ahora la señal correspondiente a los coeficientes de Fourier b_k dados por el punto 4. Usando la propiedad de inversión del tiempo , observamos que a_{-k} corresponde a la señal $x(-t)$. Asimismo, de la propiedad de desplazamiento en el tiempo en la tabla indica que la multiplicación del $k$ésimo coeficiente de Fourier por $e^{-jk\pi/2} = e^{-jk\omega_0}$ corresponde a la señal en cuestión siendo desplazada en 1 a la derecha (es decir, con $t-1$ reemplazando a t). Concluimos que los coeficientes b_k corresponden a la señal $x(-(t-1)) = x(-t+1)$, la cual, de acuerdo con el punto 4, debe ser impar. Ya que $x(t)$ es real, $x(-t+1)$ también debe ser real. , se desprende que los coeficientes de Fourier de $x(-t+1)$ deben ser puramente imaginarios e impares. Entonces, $b_0 = 0$ y $b_{-1} = -b_1$. En vista de que las operaciones de inversión del tiempo y desplazamiento en el tiempo no pueden cambiar la potencia promedio por periodo, el punto 5 se cumple aun si $x(t)$ es reemplazada por $x(-t+1)$. Esto es,

$$\frac{1}{4}\int_4 |x(-t+1)|^2 dt = 1/2.$$

Example 10

Ahora podemos usar la relación de Parseval para concluir que

$$|b_1|^2 + |b_{-1}|^2 = 1/2. \tag{3.83}$$

Sustituyendo $b_1 = -b_{-1}$ en esta ecuación, obtenemos $|b_1| = 1/2$. Puesto que sabemos que b_1 también es sólo imaginaria, debe ser $j/2$ o $-j/2$.

Ahora podemos trasladar estas condiciones en b_0 y b_1 a los equivalentes de a_0 y a_1. Primero, como $b_0 = 0$, el punto 4 implica que $a_0 = 0$. Con $k = 1$, esta condición implica que $a_1 = e^{-j\pi/2}b_{-1} = -jb_{-1} = jb_1$. Así pues, si tomamos $b_1 = j/2$, entonces $a_1 = -1/2$, y por tanto, de la ecuación (3.81), $x(t) = -\cos(\pi t/2)$. De forma alternativa, si tomamos $b_1 = -j/2$, entonces $a_1 = 1/2$ y, por tanto, $x(t) = \cos(\pi t/2)$.

Questions?