Inferencia: Contraste de hipótesis para una población

Grado en Ingeniería Biomédica
Clase 3

Jorge Calero Sanz

Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones
Universidad Rey Juan Carlos

8 de marzo de 2022

Contrastes para la media

Alternativa < Nula ($\mu < \mu_0$) con varianza desconocida

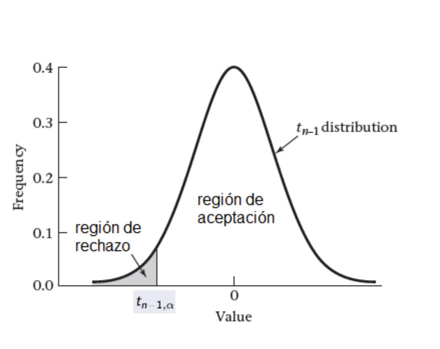
- Las hipótesis son:
  - H_0: $\mu = \mu_0$
  - H_1: $\mu < \mu_0$
- Con un nivel de significación α y varianza σ desconocida.
- Calculamos el estadístico:

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

  donde s es la raiz de la cuasivarianza muestral.
- Entonces, si:
  - Si $t < t_{n-1,\alpha}$, rechazamos H_0.
  - Si $t \geq t_{n-1,\alpha}$, aceptamos H_0.

Contrastes para la media

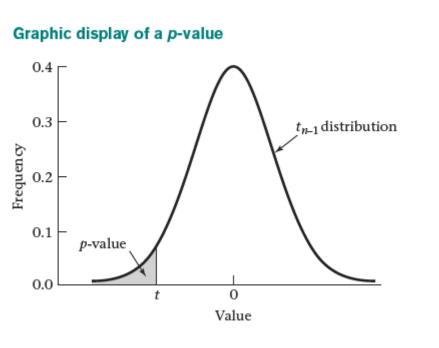
Alternativa < Nula ($\mu < \mu_0$) con varianza desconocida



Contrastes para la media

Alternativa < Nula ($\mu < \mu_0$)

- Definimos el p valor como: $p = P(t_{n-1} \leq t)$



Contrastes para la media

Alternativa > Nula ($\mu > \mu_0$) con varianza desconocida

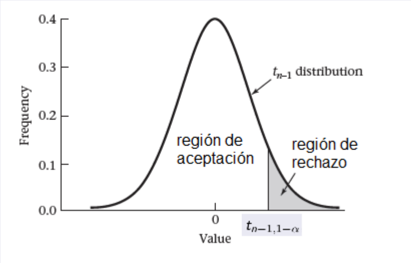
- Las hipótesis son:
  - H_0: $\mu = \mu_0$
  - H_1: $\mu > \mu_0$
- Con un nivel de significación α y varianza σ desconocida.
- Calculamos el estadístico:

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

  donde s es la raiz de la cuasivarianza muestral.
- Entonces, si:
  - Si $t > t_{n-1,1-\alpha}$, rechazamos H_0.
  - Si $t \leq t_{n-1,1-\alpha}$, aceptamos H_0.

Contrastes para la media

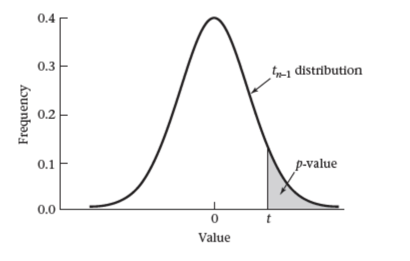
Alternativa > Nula ($\mu > \mu_0$) con varianza desconocida



Contrastes para la media

Alternativa > Nula ($\mu > \mu_0$) con varianza desconocida

- Definimos el p valor como: $p = P(t_{n-1} > t)$



Contrastes para la media

Alternativa $\neq$ Nula ($\mu \neq \mu_0$) con varianza desconocida

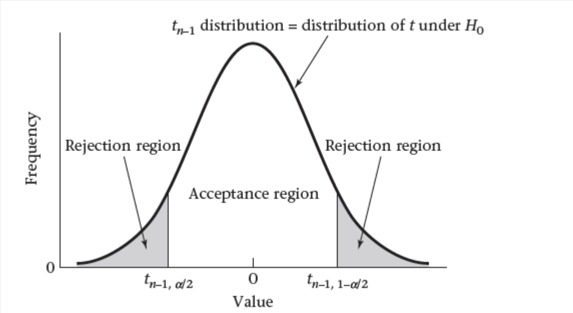
- Las hipótesis son:
  - H_0: $\mu = \mu_0$
  - H_1: $\mu \neq \mu_0$
- Con un nivel de significación α y varianza σ desconocida.
- Calculamos el estadístico:

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

  donde s es la raiz de la cuasivarianza muestral.
- Entonces, si:
  - Si $|t| > t_{n-1,1-\alpha/2}$, rechazamos H_0.
  - Si $|t| \leq t_{n-1,1-\alpha/2}$, aceptamos H_0.

Contrastes para la media

Alternativa $\neq$ Nula ($\mu \neq \mu_0$)

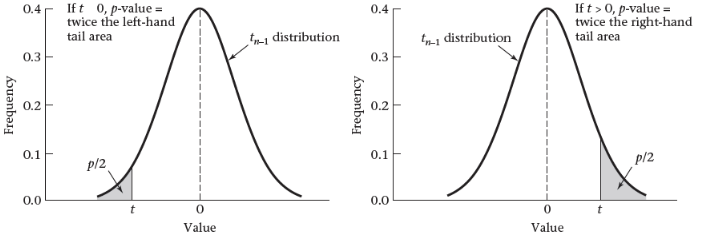


Contrastes para la media

Alternativa $\neq$ Nula ($\mu \neq \mu_0$) con varianza desconocida

- Definimos el p valor como:
  - $p = 2 \cdot P(t_{n-1} \leq t)$ si $t \leq 0$
  - $p = 2 \cdot [1 - P(t_{n-1} \leq t)]$ si $t > 0$

Figure 7.4 Illustration of the *p*-value for a one-sample *t* test for the mean of a normal distribution (two-sided alternative)



Contrastes para la media

Alternativa < Nula ($\mu < \mu_0$) con varianza conocida

- Las hipótesis son:
  - H_0: $\mu = \mu_0$
  - H_1: $\mu < \mu_0$
- Con un nivel de significación α y varianza σ **conocida**.
- Calculamos el estadístico:

$$z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

- Entonces, si:
  - Si $z < z_\alpha$, rechazamos H_0.
  - Si $z \geq z_\alpha$, aceptamos H_0.
- El p valor es $p = \Phi(z)$

Contrastes para la media

Alternativa > Nula ($\mu > \mu_0$) con varianza conocida

- Las hipótesis son:
  - H_0: $\mu = \mu_0$
  - H_1: $\mu > \mu_0$
- Con un nivel de significación α y varianza σ **conocida**.
- Calculamos el estadístico:

$$z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

- Entonces, si:
  - Si $z > z_{1-\alpha}$, rechazamos H_0.
  - Si $z \leq z_{1-\alpha}$, aceptamos H_0.
- El p valor es $p = 1 - \Phi(z)$

Contrastes para la media

Alternativa $\neq$ Nula ($\mu \neq \mu_0$) con varianza conocida

- Las hipótesis son:
  - H_0: $\mu = \mu_0$
  - H_1: $\mu \neq \mu_0$
- Con un nivel de significación α y varianza σ **conocida**.
- Calculamos el estadístico:

$$z = (\overline{x} - \mu_0)/(\sigma/\sqrt{n})$$

- Entonces, si:
  - Si $z < z_{\alpha/2}$ o $z > z_{1-\alpha/2}$, rechazamos H_0.
  - Si $z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{1-\alpha/2}$, aceptamos H_0.
- El p valor es:
  - $p = 2\Phi(z)$ si $z \leq 0$
  - $p = 2(1 - \Phi(z)$ si $z > 0$

Potencia del contraste para la media

Alternativa vs Nula (una alternativa) con varianza conocida

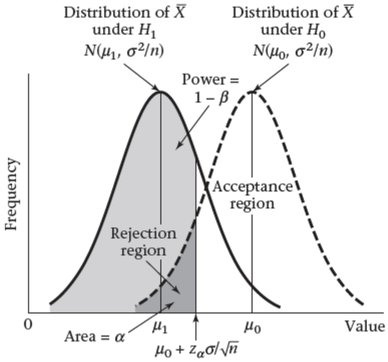
- Las hipótesis son:
  - H_0: $\mu = \mu_0$
  - H_1: $\mu = \mu_1$
- Con un nivel de significación α y varianza σ **conocida**.
- La potencia del test es:

$$\Phi[z_\alpha + |\mu_0 - \mu_1|\sqrt{n}/\sigma] = \Phi[-z_{1-\alpha} + |\mu_0 - \mu_1|\sqrt{n}/\sigma]$$

Potencia del contraste para la media

Alternativa vs Nula (una alternativa) con varianza conocida

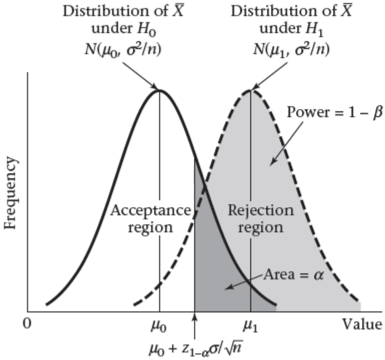
Illustration of power for the one-sample test for the mean of a normal distribution with known variance ($\mu_1 < \mu_0$)



Potencia del contraste para la media

Alternativa vs Nula (una alternativa)

Illustration of power for the one-sample test for the mean of a normal distribution with known variance ($\mu_1 > \mu_0$)



Potencia del contraste para la media

Alternativa vs Nula (doble alternativa) con varianza conocida

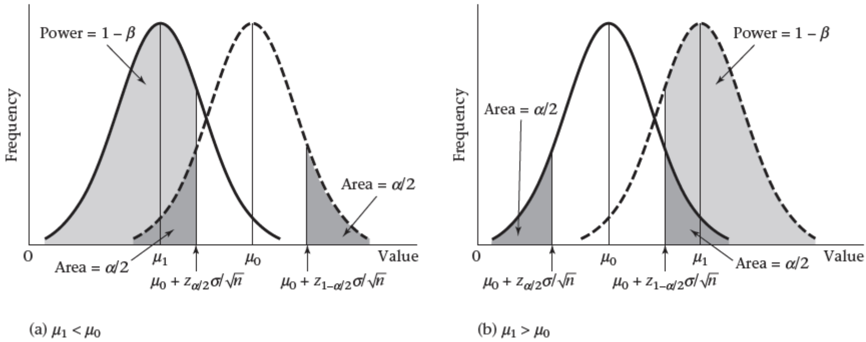
- Las hipótesis son:
  - H_0: $\mu = \mu_0$
  - H_1: $\mu = \mu_1$
- Con un nivel de significación α y varianza σ **conocida**.
- La potencia del test es :

$$\Phi[-z_{1-\alpha/2} + \frac{(\mu_0 - \mu_1)\sqrt{n}}{\sigma}] + \Phi[-z_{1-\alpha/2} + \frac{(\mu_1 - \mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}]$$

Potencia del contraste para la media

Alternativa vs Nula con varianza conocida

Figure 7.8 Illustration of power for a two-sided test for the mean of a normal distribution with known variance



Determinación del tamaño de la muestra para el contraste de la media

Alternativa vs Nula (una alternativa) con varianza conocida

- Dados valores para α y β, podemos utilizar la expresión anterior para calcular el tamaño que debe tener una muestra para poder realizar un test estadístco con esos niveles α y β fijados y que el resultado sea válido.
- Si el contraste es de una alternativa, la n se determina a través de la ecuación:

$$n = \frac{(z_{1-\alpha} + z_{1-\beta})^2 \sigma^2}{(\mu_0 - \mu_1)^2}$$

Determinación del tamaño de la muestra para el contraste de la media

Alternativa vs Nula (doble alternativa) con varianza conocida

- Dados valores para α y β, podemos utilizar la expresión anterior para calcular el tamaño que debe tener una muestra para poder realizar un test estadístco con esos niveles α y β fijados y que el resultado sea válido.
- Si el contraste es de doble alternativa, la n se determina a través de la ecuación:

$$n = \frac{(z_{1-\alpha/2} + z_{1-\beta})^2 \sigma^2}{(\mu_0 - \mu_1)^2}$$

Contraste para la varianza en una normal

Alternativa vs Nula (doble alternativa)

- Las hipótesis son:
  - H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$
  - H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$
- Con un nivel de significación α.
- Calculamos el estadístico:

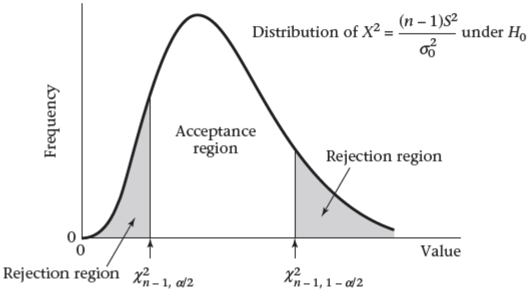
$$X^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

- Entonces, si:
  - Si $X^2 < \chi^2_{n-1,\alpha/2}$ o $X^2 > \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$, rechazamos H_0.
  - Si $\chi^2_{n-1,\alpha/2} \leq X^2 \leq \chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$, aceptamos H_0.

Contraste para la varianza en una normal

Alternativa vs Nula (doble alternativa)

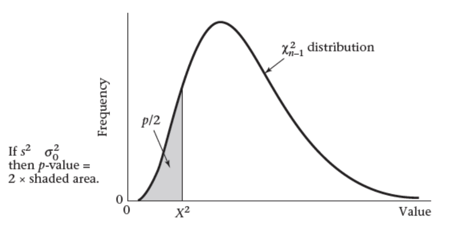
Acceptance and rejection regions for the one-sample χ^2 test for the variance of a normal distribution (two-sided alternative)



Contraste para la varianza en una normal

Alternativa vs Nula (doble alternativa)

- Para este test, el p valor es:
  - $2 \cdot P(\chi^2_{n-1} < X^2)$ si $s^2 \leq \sigma_0^2$



Contrastes para la prevalencia p

Métodos normales

- Las hipótesis son:
  - H_0: $p = p_0$
  - H_1: $p \neq p_0$

  donde p_0 es el parámetro poblacional y p el del grupo de interés.
- El estadístico que usaremos es la proporción muestral $\hat{p}$.
- Los métodos normales son aquellos en los que podemos aproximar la binomial a la normal, y esto ocurre cuando $np_0q_0 \geq 5$. Entonces $\hat{p} \sim N(p_0, p_0q_0/n)$

Contrastes para la prevalencia p

Métodos normales

- Suponemos un nivel de significación α.
- Calculamos el estadístico:

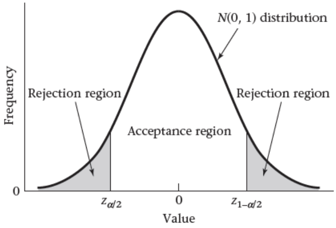
$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0 q_0 / n}}$$

- Entonces, si:
  - Si $z < z_{\alpha/2}$ o $z > z_{1-\alpha/2}$, rechazamos H_0.
  - Si $z_{\alpha/2} \leq z \leq z_{1-\alpha/2}$, aceptamos H_0..

Contrastes para la prevalencia p

Métodos normales

Acceptance and rejection regions for the one-sample binomial test—normal-theory method (two-sided alternative)

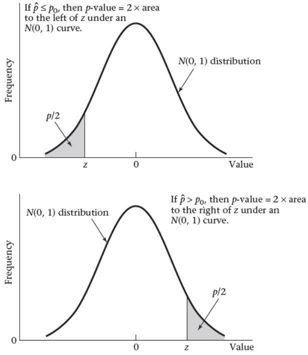


Contrastes para la prevalencia p

Métodos normales

- Si $\hat{p} < p_0$ el p valor es $2\Phi(z)$
- Si $\hat{p} \geq p_0$ el p valor es $2(1 - \Phi(z))$

Illustration of the p-value for a one-sample binomial test— normal-theory method (two-sided alternative)



Contrastes para la prevalencia p

Métodos normales

- La potencia para este test viene dada por:

$$\Phi\left[\sqrt{\frac{p_0 q_0}{p_1 q_1}}\left(z_{\alpha/2} + \frac{|p_0 - p_1|\sqrt{n}}{\sqrt{p_0 q_0}}\right)\right] \tag{1}$$

- Y el tamaño de una muestra viene dado por:

$$n = \frac{p_0 q_0 \left(z_{1-\alpha/2} + z_{1-\beta}\sqrt{\frac{p_1 q_1}{p_0 q_0}}\right)^2}{(p_1 - p_0)^2} \tag{2}$$