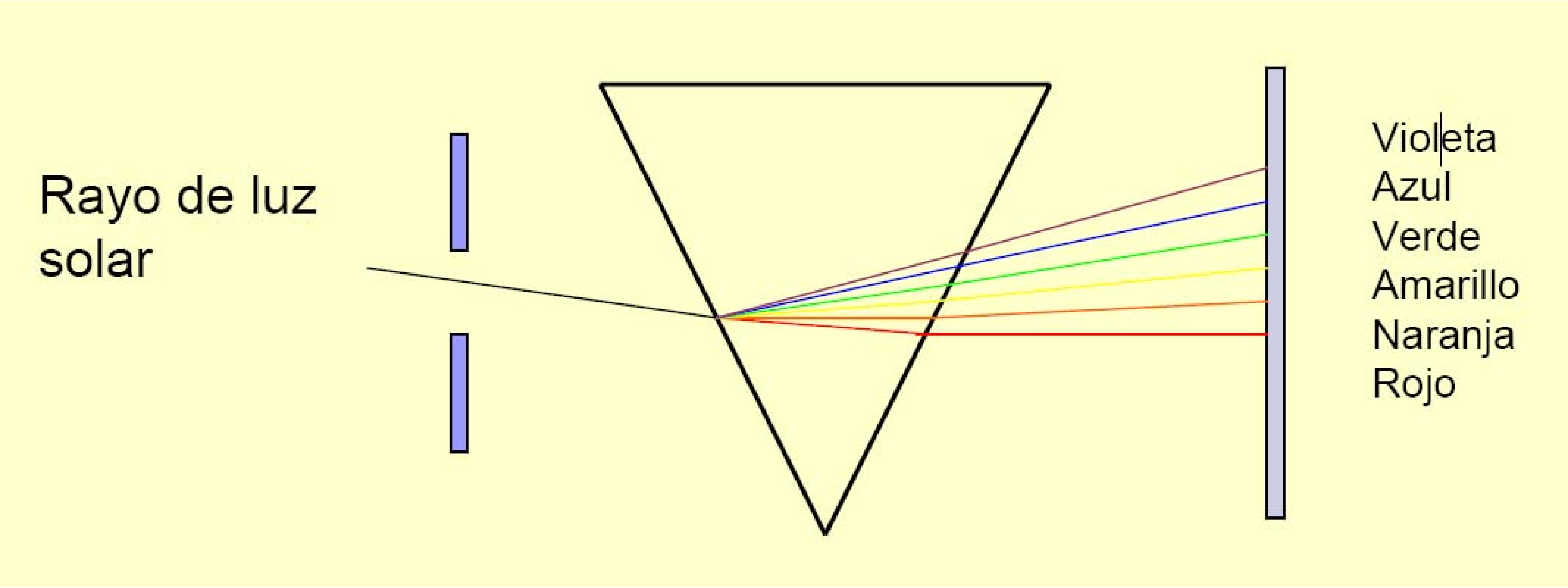
Análisis de Fourier para señales y sistemas de tiempo continuo

1. Introducción
2. Respuesta de sistemas continuos LTI a señales exponenciales complejas.
3. Desarrollo en series de Fourier de señales periódicas
4. Transformada de Fourier para señales no periódicas
5. Transformada de Fourier para señales periódicas
6. Respuesta en frecuencia de sistemas continuos
7. Muestreo ideal
8. Aplicación de la Transformada de Laplace a los sistemas LTI
9. La función del sistema de sistemas continuos
10. Sistemas descritos por ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes
11. Introducción al filtrado

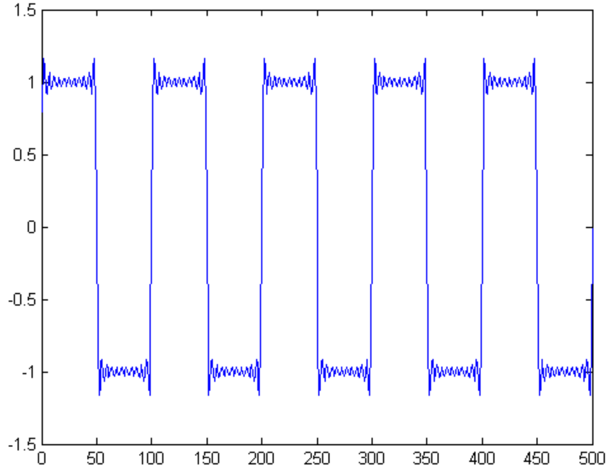
1. Introducción (I)

- Ejemplo de descomposición de Fourier:
  - Luz blanca que atraviesa un prisma

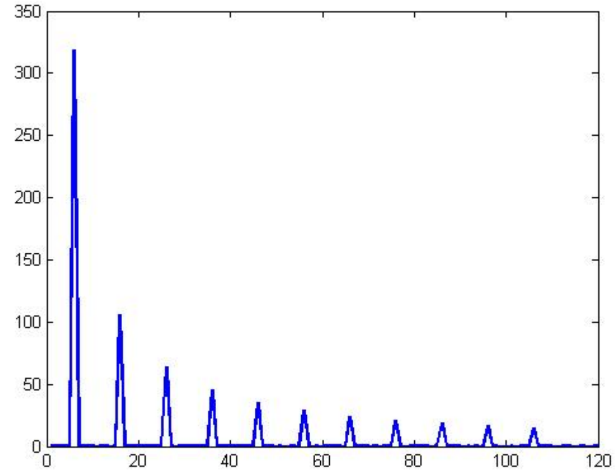


Introducción (II)

- ¿Qué hay detrás de una señal? …
  - Diversas componentes de frecuencia y amplitud



Dominio del tiempo
(continuo o discreto)



Dominio de la frecuencia

¿Cómo se realiza este análisis en frecuencia?

Introducción (III)

- El análisis de Fourier es una de las herramientas más útiles en procesado de señal.
- Se basa en la descomposición de una señal en términos de un conjunto de funciones base (sinusoides de diferente frecuencia).

- Señales continuas (analógicas):
  - Periódicas: Series de Fourier (CTFS).
  - No periódicas: Transformada de Fourier (CTFT).

- Señales discretas (digitales):
  - Periódicas: Series de Fourier en tiempo discreto (DTFS)
  - No periódicas: Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT)

2. Respuesta de sistemas continuos LTI a señales exponenciales complejas

- La salida de un sistema LTI ante una entrada de tipo exponencial compleja es otra exponencial compleja

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega_0 (t-\tau)} d\tau = e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau = e^{j\omega_0 t} H(s)\Big|_{s=j\omega_0}$$

$$y(t) = e^{j\omega_0 t} H(j\omega_0)$$

- Donde
  - $H(j\omega_0) \equiv H(\omega_0) \equiv$ AUTOVALOR $\in$ ¢
  - $e^{j\omega_0 t}$ $\equiv$ AUTOFUNCIÓN

Respuesta de sistemas LTI a una combinación lineal de exponenciales complejas (I)

- Supongamos que la entrada es una combinación lineal de exponenciales:

$$x(t) = \sum_{k=1}^{N} a_k \, \mathrm{e}^{j\omega_k t} \Rightarrow$$

$$y(t) = h(t) * x(t) = \sum_{k=1}^{N} a_k h(t) * \mathrm{e}^{j\omega_k t}$$

$$\boxed{y(t) = \sum_{k=1}^{N} a_k H(j\omega_k)\,\mathrm{e}^{j\omega_k t} = \sum_{k=1}^{N} b_k \, \mathrm{e}^{j\omega_k t}}$$

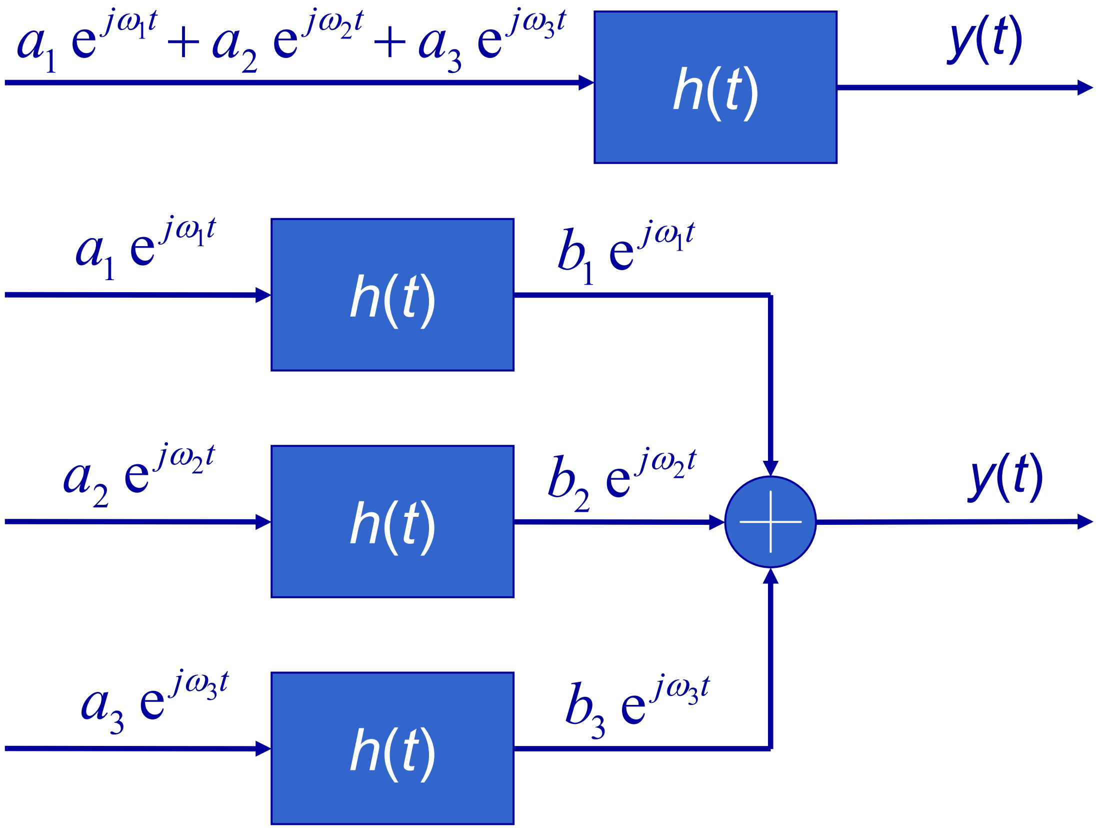
$H(j\omega_k) \equiv H(\omega_k) \in$ ¢

$a_k, b_k \in$ ¢

- La respuesta es otra combinación lineal de las mismas exponenciales.
- Esto es considerablemente más sencillo que realizar la convolución.
- Por ello vamos a estudiar qué tipo de señales se pueden representar mediante combinación lineal de exponenciales complejas.

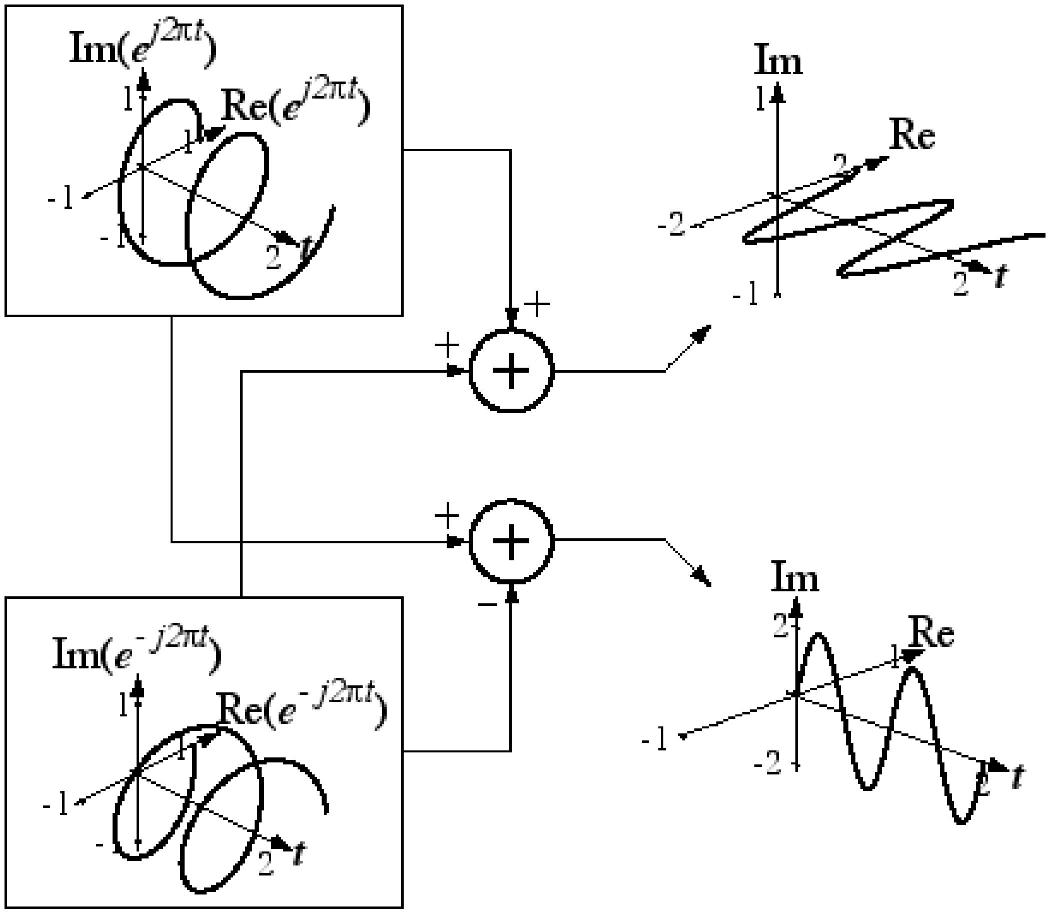
Respuesta de sistemas LTI a una combinación lineal de exponenciales complejas (II)

- De forma más gráfica, y aplicando la propiedad de linealidad…



- Hablaremos de frecuencia (f) y pulsación (ω) indistintamente: $\omega = 2\pi f$

Sinusoides complejas y reales



$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{j2}$$

3. Desarrollo en serie de Fourier de señales periódicas (CTFS)

- Una señal $x(t)$ es periódica $\Leftrightarrow$ $\exists T>0 \,/\, x(t)=x(t+T), \forall\ t$
  - El periodo fundamental T_0 es el mínimo $T>0$ con el que se cumple la condición de periodicidad.
  - Su inverso es la frecuencia fundamental $f_0=1/T_0$
  - La pulsación fundamental es $\omega_0=2\pi\ f_0$.
  - La señal $e^{jk\omega_0 t}$ es periódica de periodo fundamental T_0
  - Los armónicos $\Phi = e^{jk\omega_0 t}$ con k entero tienen periodo fundamental $T_0/|k|$.
  - Por ello T_0 es periodo común a todos los armónicos.
  - Por lo tanto la señal $\sum_k a_k\, e^{jk\omega_0 t}$ es periódica de periodo T_0
- Vamos a comprobar que la señal $x(t)$ periódica de periodo fundamental T_0 se puede expresar como el siguiente CTFS:

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, e^{jk\omega_0 t}}$$

Ecuación de síntesis, $CTFS^{-1}$

CTFS. Cálculo de los coeficientes

- Necesitamos conocer los coeficientes a_k.
- En la ecuación de síntesis, multiplicamos ambos lados por $e^{-jn\omega_0 t}$ e integramos en un periodo y obtenemos:

$$\int_{T_0} x(t)\,e^{-jn\omega_0 t}\,dt = \int_{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\,e^{j(k-n)\omega_0 t}\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t}\,dt$$

$$\textit{Como} \int_{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t}\,dt = \begin{cases} \int_{T_0} 1dt = T_0 & , \ \textit{si}\ k=n \\ \int_{T_0} \cos(k-n)\omega_0 t + j\,\mathrm{sen}(k-n)\omega_0 t dt = 0, & \textit{si}\ k \neq n \end{cases} \Rightarrow$$

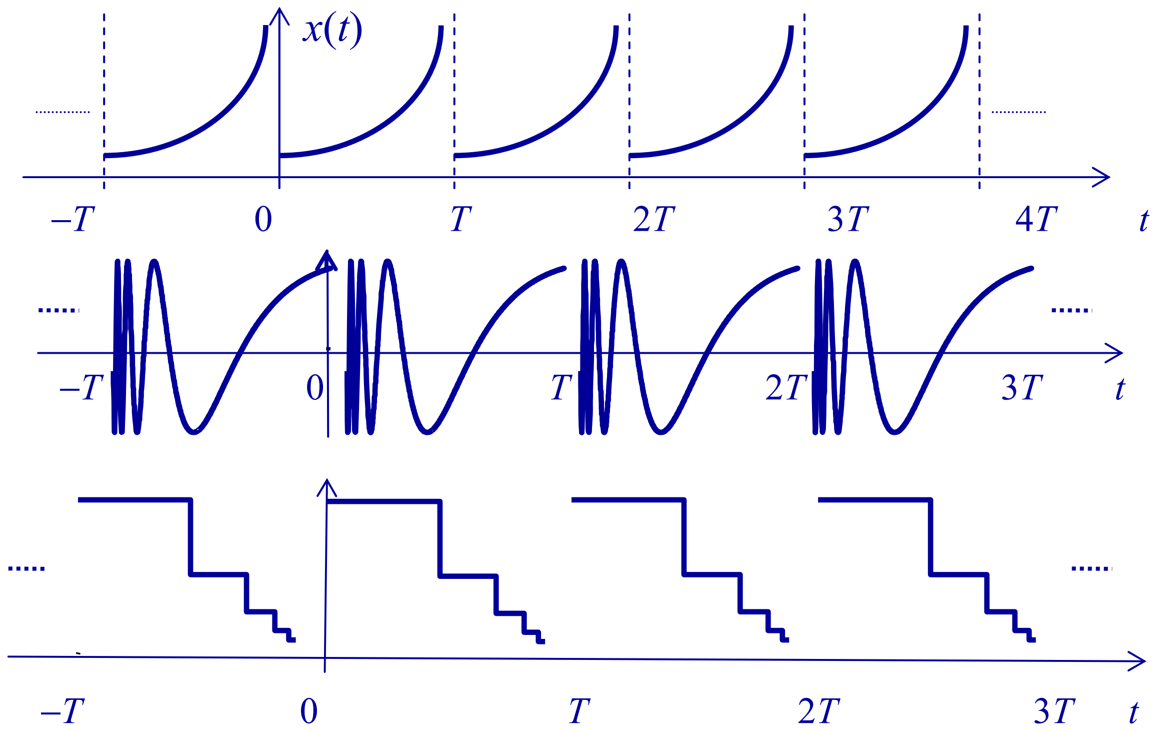
$$\int_{T_0} x(t)\,e^{(-jn\omega_0 t)}\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k T_0 \delta[k-n] = a_n T_0 \Rightarrow$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)\,e^{-jn\omega_0 t}\,dt}$$

Ecuación de análisis, CTFS

Condiciones de existencia del CTFS

- El cálculo de los coeficientes mediante la ecuación de análisis es posible siempre que **no** ocurra alguna de las situaciones siguientes:
  - Señal no absolutamente integrable sobre un periodo
  - Señal con infinitas oscilaciones en un periodo
  - Señal con infinitas discontinuidades en un periodo

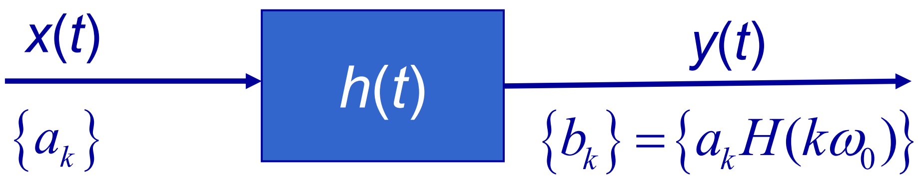


Consideraciones sobre el CTFS

- El CTFS es una combinación lineal de sinusoides complejas armónicamente relacionadas
- En el caso de *señales periódicas reales* a veces se usan otras expresiones para la serie de Fourier. Por ej.:

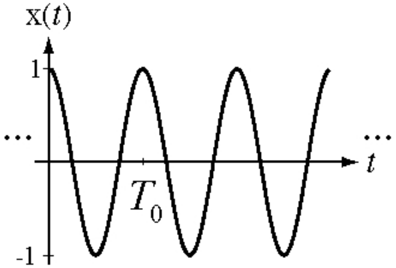
$$x(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\alpha_k \cos(k\omega_0 t) + \beta_k \mathrm{sen}(k\omega_0 t) \right]$$

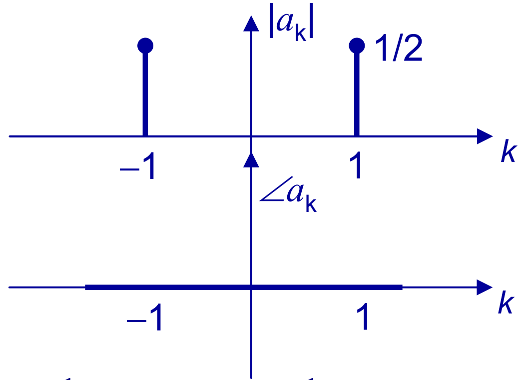
- Para un sistema LTI, la respuesta a una señal periódica es otra señal periódica con los mismos armónicos que la señal de excitación, pero cambiando sus amplitudes y fases



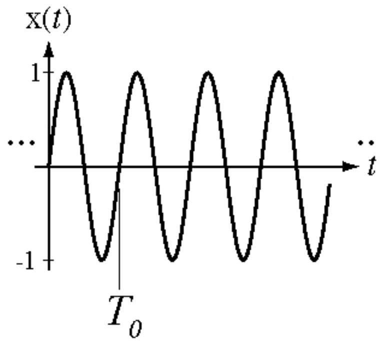
CTFS de las funciones seno y coseno

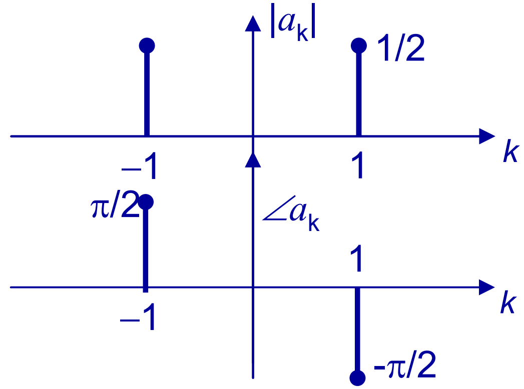
$$x(t) = \cos\left(\omega_0 t\right) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t} \qquad a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_{-1} = \frac{1}{2}$$





$$x(t) = \operatorname{sen}\left(\omega_0 t\right) = \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t} \qquad a_1 = \frac{1}{2j}; \quad a_{-1} = \frac{-1}{2j}$$





Propiedad

- Supongamos que ***x(t)* es real** → $x(t)=x^*(t)$

Recordar
que es w_k

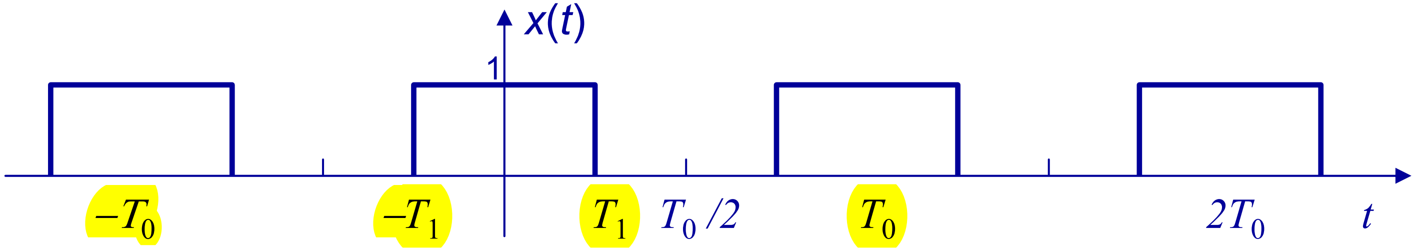
$$x(t)=\sum_k a_k\,e^{j\omega_k t}=\left(\sum_k a_k\,e^{j\omega_k t}\right)^*=x^*(t)=\sum_k a_k^{\,*}\,e^{-j\omega_k t}=\sum_k a_{-k}^{\,*}\,e^{j\omega_k t}$$

- Luego, si la señal es real, los coeficientes de la serie de Fourier verifican:

$$\boxed{a_k=a_{-k}^{\,*}}$$

- Los coeficientes poseen **antisimetría conjugada**, o lo que es lo mismo, son **hermíticos**

CTFS. Ejemplo (I)



$$x(t) = \begin{Bmatrix} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < T_0/2 \end{Bmatrix}; \quad x(t+T_0) = x(t)$$

Los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier son:

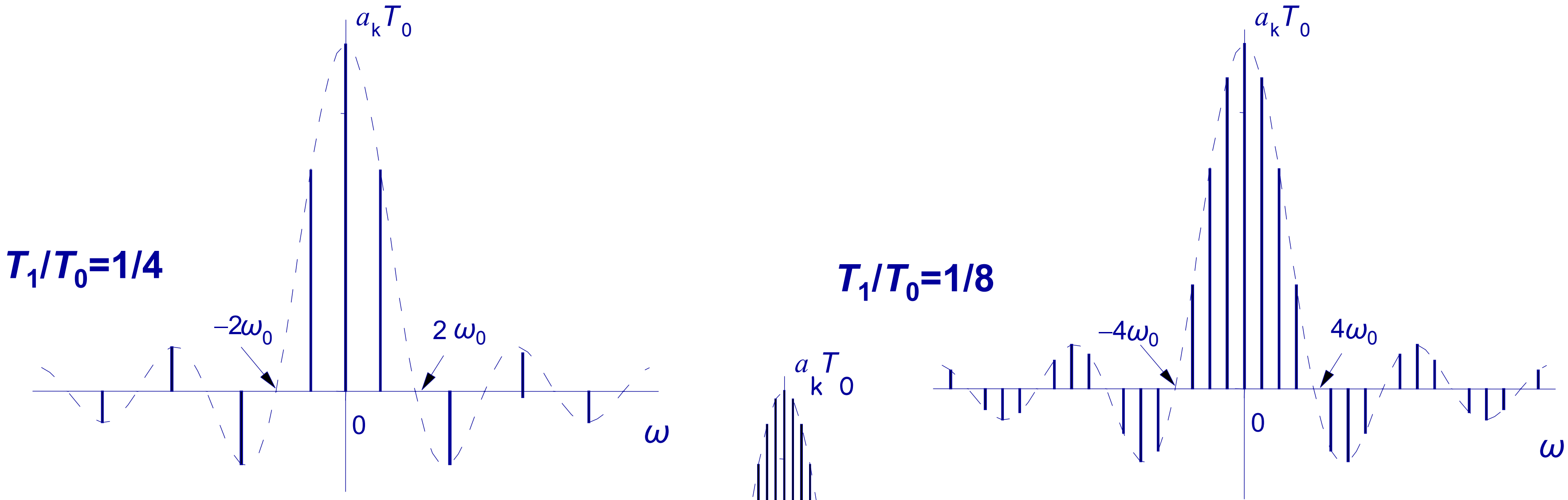
$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,\mathrm{e}^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)\,\mathrm{e}^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-T_1}^{T_1} \mathrm{e}^{-jk\omega_0 t}\,dt \Rightarrow$$

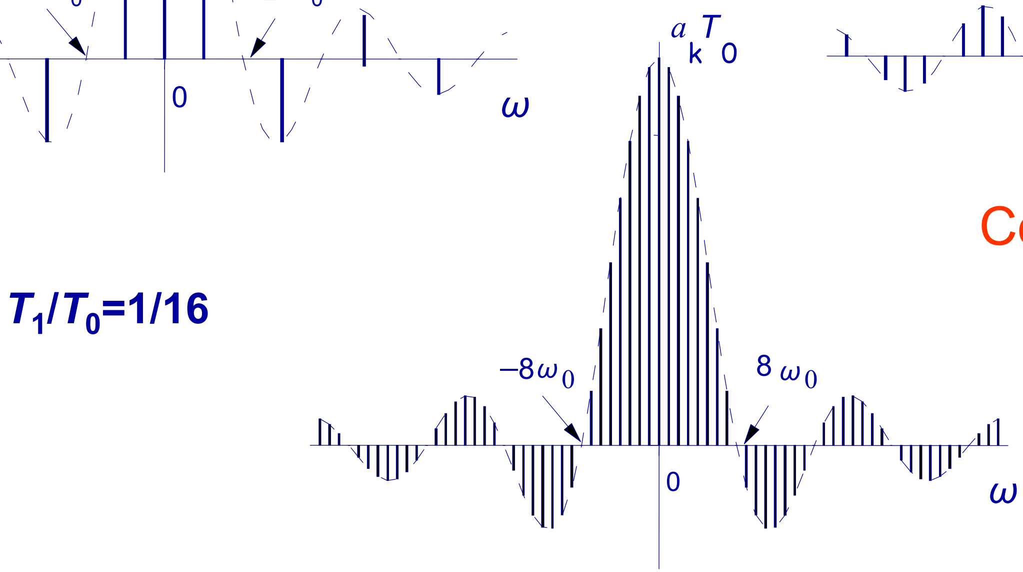
$$a_k = \frac{1}{T_0}\left(\frac{\mathrm{e}^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0}\right)\Bigg|_{-T_1}^{T_1} = \frac{2}{k\omega_0 T_0}\left(\frac{\mathrm{e}^{jk\omega_0 T_1} - \mathrm{e}^{-jk\omega_0 T_1}}{-2j}\right) \Rightarrow$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-T_1}^{T_1} 1\,dt = \frac{2T_1}{T_0}; \qquad a_{k\neq 0} = \frac{\mathrm{sen}(k\omega_0 T_1)}{k\pi} \longrightarrow$$

CTFS. Ejemplo (I)

- Representamos $T_0\, a_k$ para ver la CTFS de un tren de pulsos de distinto periodo:

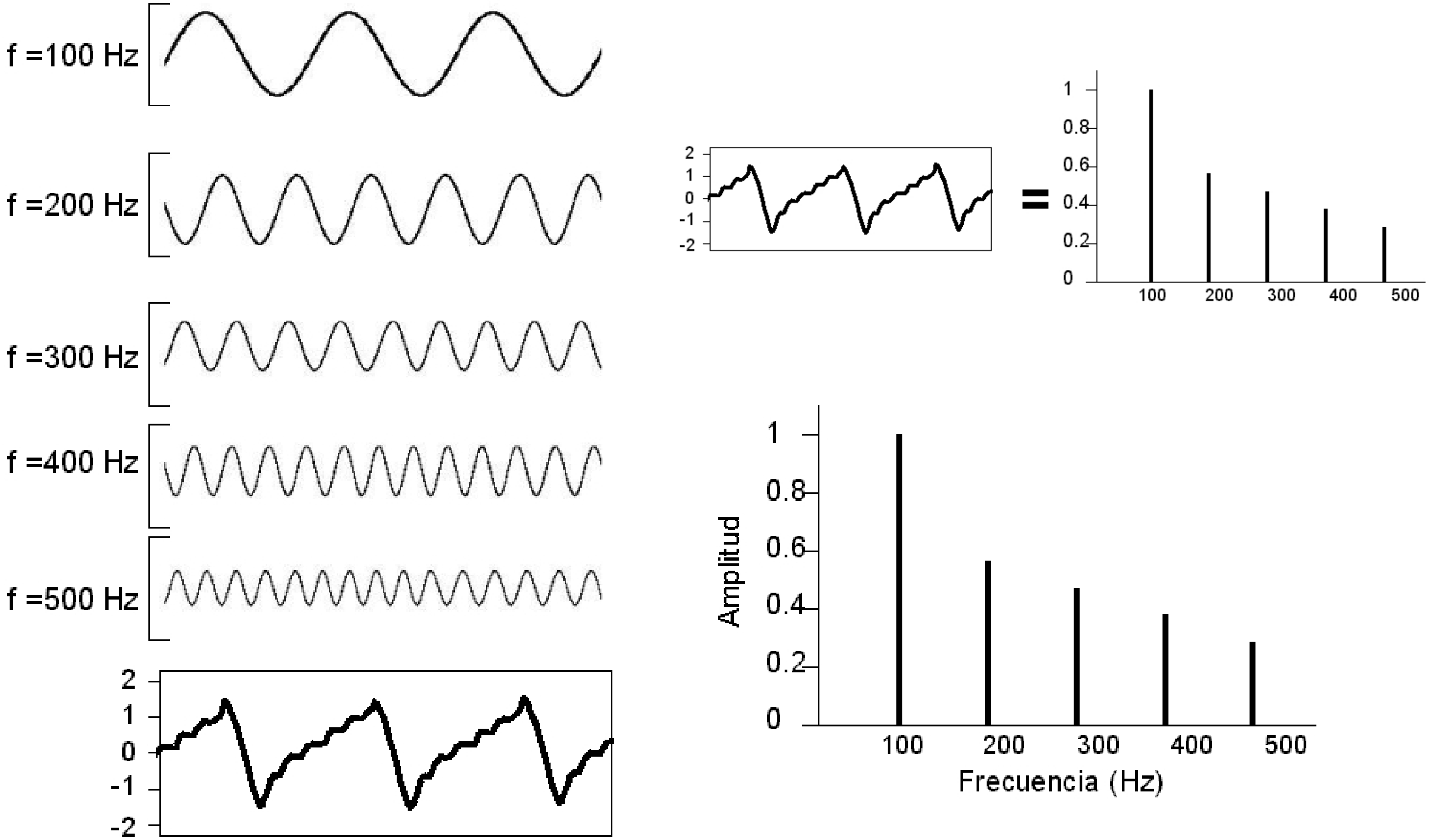




Conforme aumenta $T_{0,}$ aumenta el número de componentes espectrales

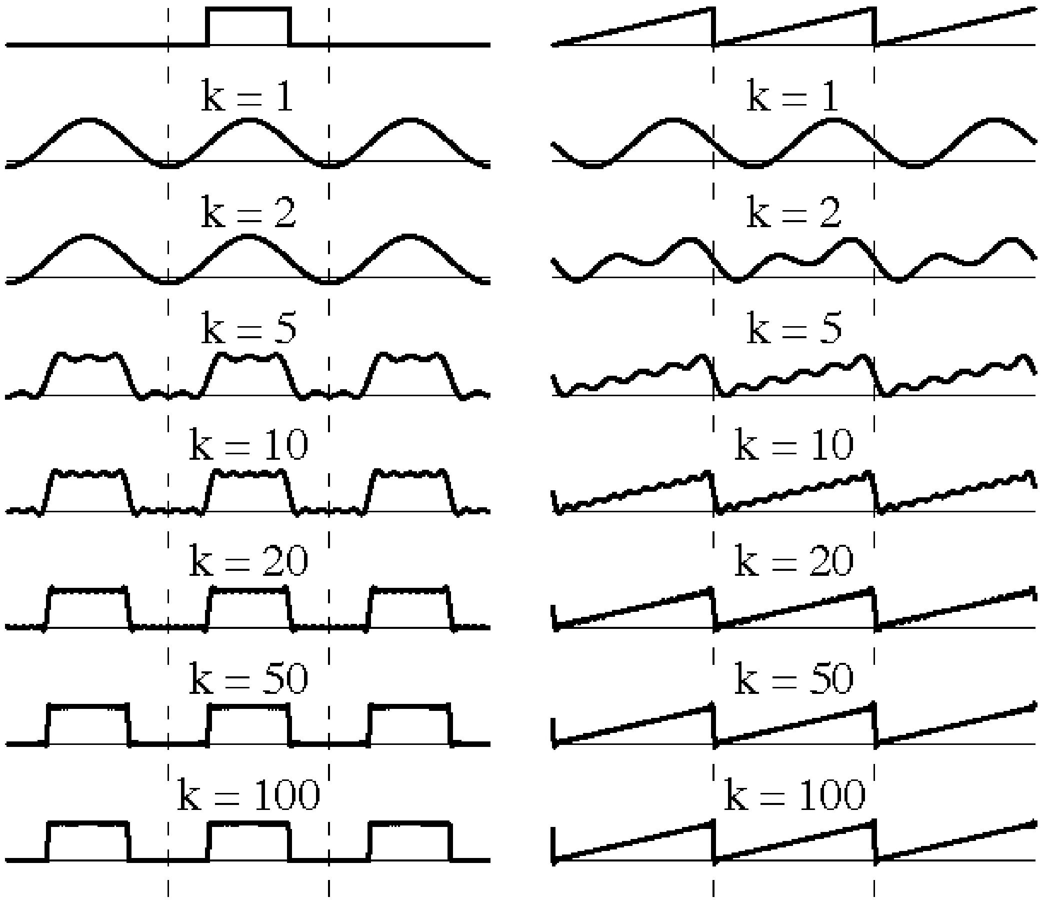
Que pasa cuando To va a infinito?

Interpretación del CTFS (I)



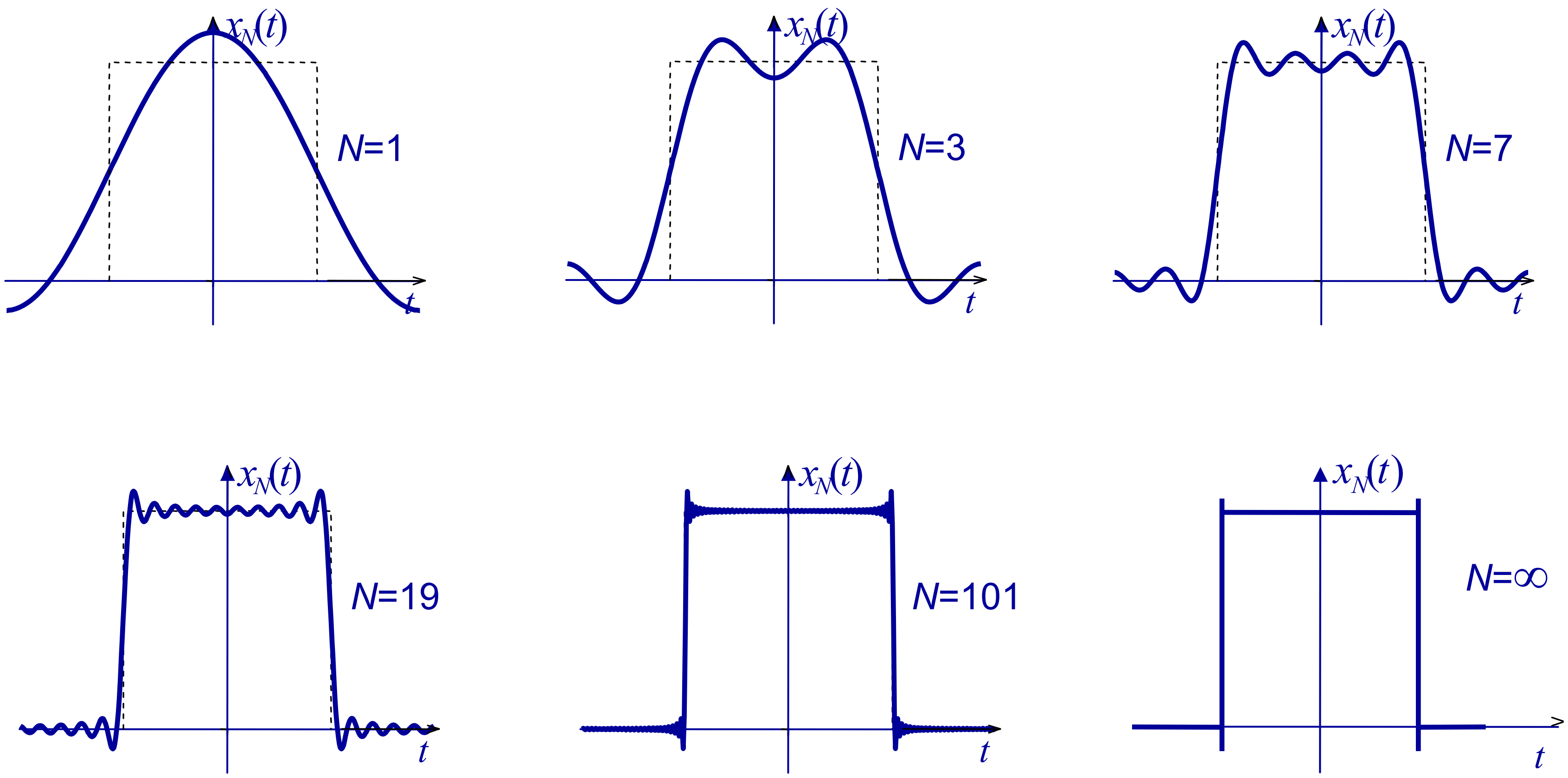
Interpretación del CTFS (II)

- Cualquier función periódica puede ser representada por la suma de senos y cosenos de diferentes amplitudes y frecuencias



CTFS. Fenómeno de Gibbs

- Fenómeno de Gibbs



4. Transformada de Fourier (CTFT) de señales no periódicas.

- Dada una señal $x(t)$ se define su transformada de Fourier como:

$$X(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

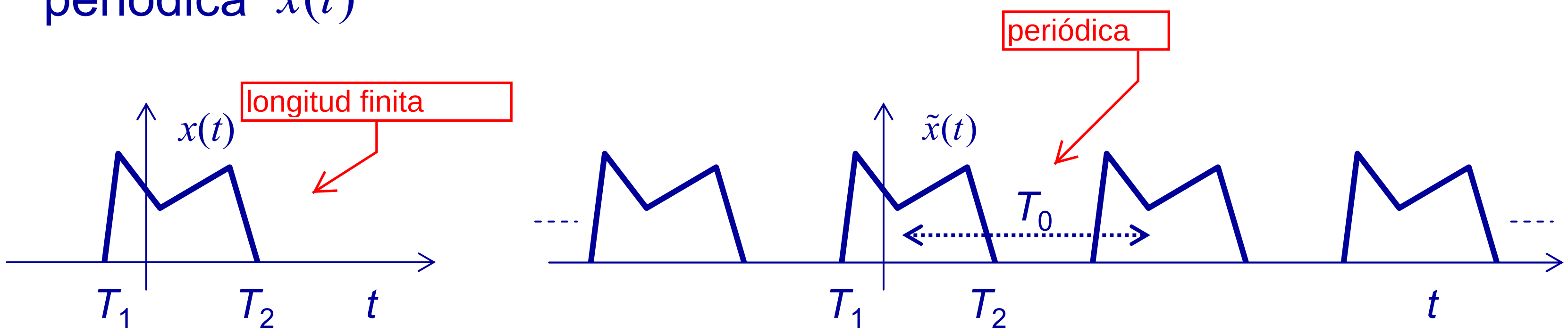
- Es una particularización de la TL en el eje $s=j\omega$
- Para que exista, $\boldsymbol{s=j\omega}$ tiene que estar **dentro de la** $\boldsymbol{ROC_X}$

$$X(\omega) = TL\{x(t)\}\Big|_{s=j\omega}$$

- La CTFT de la señal $x(t)$ existirá siempre que se cumplan unas condiciones similares a las de existencia de la CTFS:
  - $x(t)$ debe ser absolutamente integrable
  - $x(t)$ debe tener un nº finito de oscilaciones en cualquier intervalo finito
  - $x(t)$ debe tener un nº finito de discontinuidades en cualquier intervalo finito

Relación de la CTFT con los coeficientes del CTFS (I)

- Dada una señal de duración finita $x(t)$, realizamos una extensión periódica $\tilde{x}(t)$



- Expresamos la señal periódica $\tilde{x}(t)$ mediante su CTFS

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, e^{jk\omega_0 t} \quad \text{con}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_T \tilde{x}(t) \, e^{-jk\omega_0 t} \, dt \quad \text{y} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Relación de la CTFT con los coeficientes del CTFS (II)

- En el intervalo $T_1 \le t \le T_2$, se cumple $\tilde{x}(t) = x(t)$ de modo que

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} \tilde{x}(t)\,\mathrm{e}^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t)\,\mathrm{e}^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-jk\omega_0 t}\,dt$$

Como

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-jk\omega_0 t}\,dt \\ X(\omega) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{e}^{-j\omega t}\,dt \Rightarrow \end{aligned}\right\} \Rightarrow \qquad \boxed{a_k = \frac{1}{T_0} X(\omega)\Big|_{\omega = k\omega_0}}$$

- Los coeficientes a_k de la extensión periódica son **muestras equiespaciadas de la función $X(\omega)$**

Transformada inversa de Fourier

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, \mathrm{e}^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X(k\omega_0)\, \mathrm{e}^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0)\, \mathrm{e}^{jk\omega_0 t}\, \omega_0$$

- Si hacemos $T_0 \to \infty$, $\omega_0 \to 0$, $\Rightarrow$
  - la suma tiende a una integral
  - $\omega_0 \to d\omega$, $k\omega_0 \to \omega$,
  - y la extensión periódica tiende a la señal original:

$$\tilde{x}(t) = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

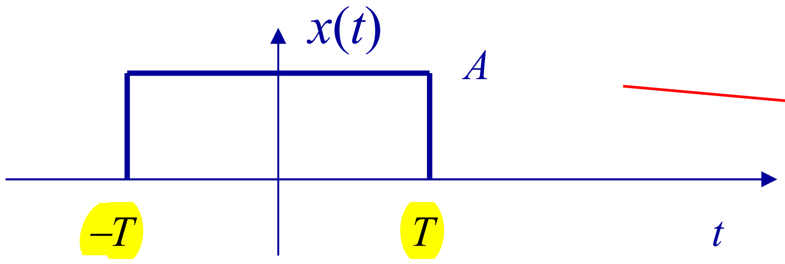
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Ec. de síntesis, $CTFT^{-1}$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Ec. de análisis, CTFT

Ejemplo



$$x(t)=\begin{cases} A, & si\ |t|<T \\ 0, & si\ |t|>T \end{cases}$$

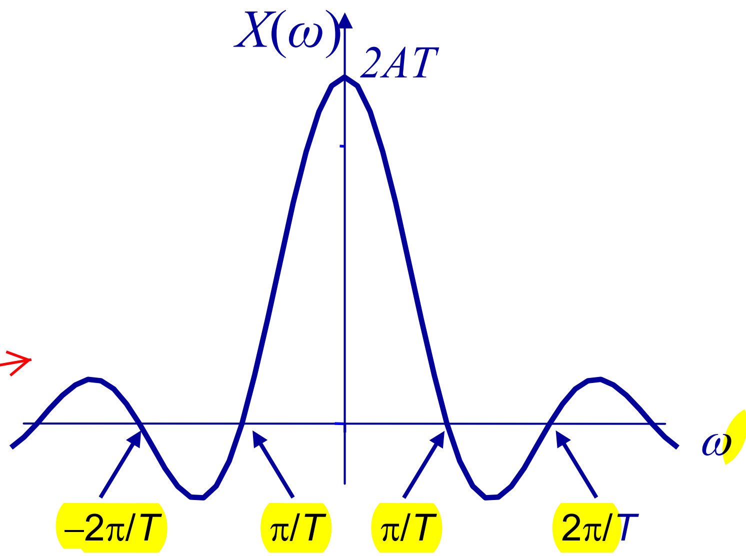
cuidado T no es un periodo!

Si realizamos una extensión periódica de periodo T_0, los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la extensión periódica son los calculados anteriormente para una onda cuadrada:

$$a_k = A\frac{\text{sen}(k\omega_0 T)}{k\pi} = 2A\frac{\text{sen}(k\omega_0 T)}{k\omega_0 T_0}$$

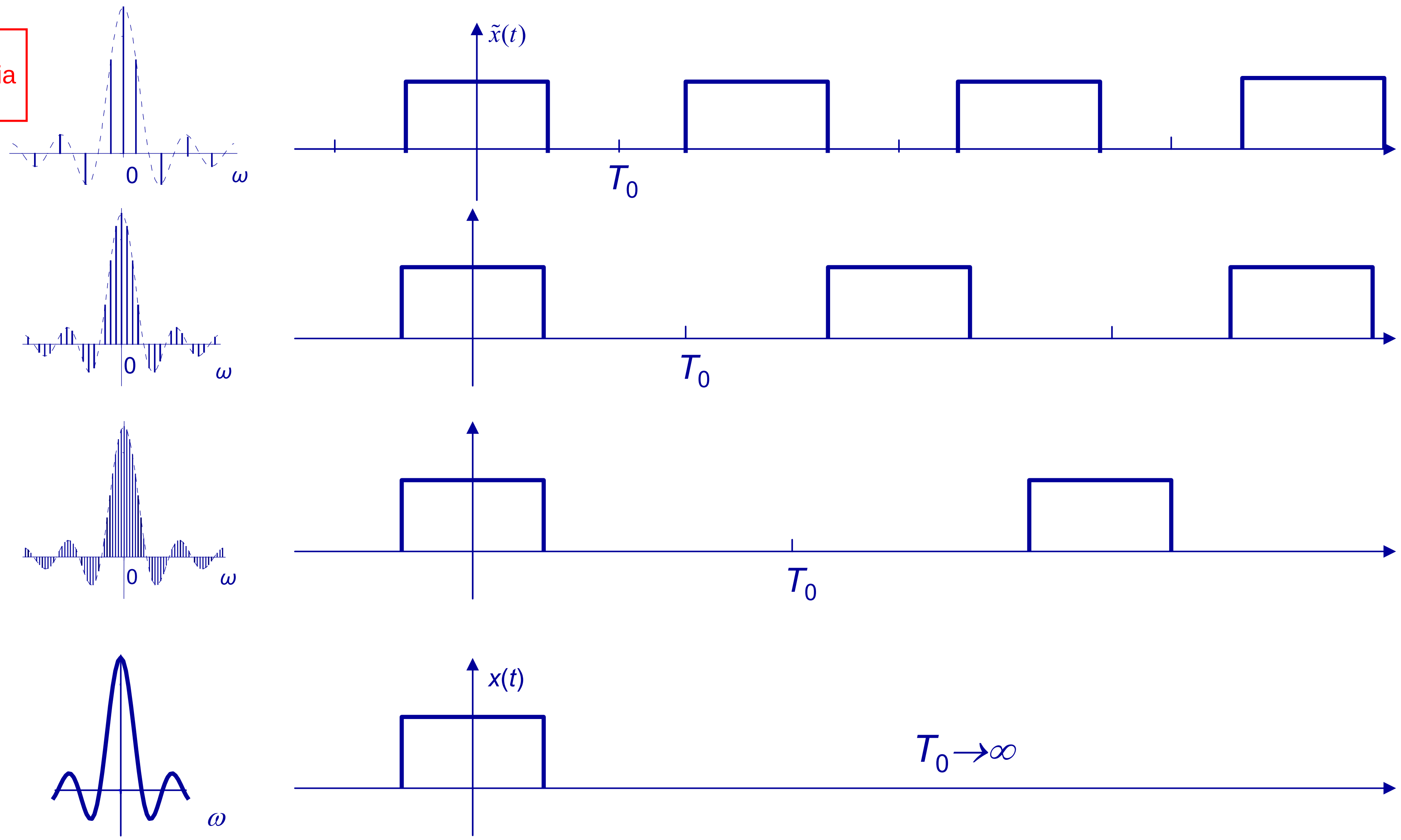
$$a_k = \frac{A}{T_0} X(\omega)\bigg|_{\omega = k\omega_0} \Rightarrow$$

$$X(\omega) = 2A\frac{\text{sen}(\omega T)}{\omega}$$



Interpretación gráfica de la relación CTFS-CTFT

continuación de otra transparencia anterior...



Frecuencias negativas

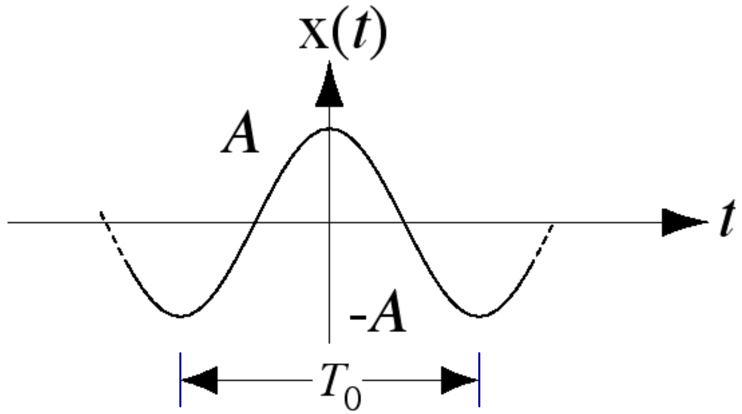
Una sinusoide puede describirse matemáticamente de varias formas:

$$x(t) = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right) = A\cos(\omega_0 t)$$

$$x(t) = A\cos(-\omega_0 t)$$

$$x(t) = A\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

$$x(t) = A_1\cos(\omega_0 t) + A_2\cos(-\omega_0 t) \quad , \quad A_1 + A_2 = A$$



Y se puede representar de otras formas distintas …
Así pues, podríamos considerar que la frecuencia sea positiva o negativa.
Desde el punto de vista del análisis de señal, no importa

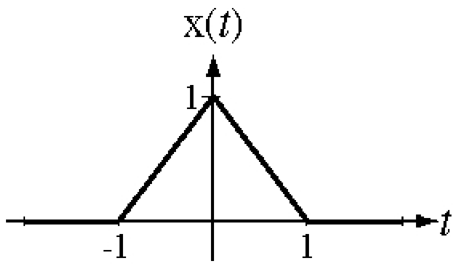
Propiedades de la CTFT (I)

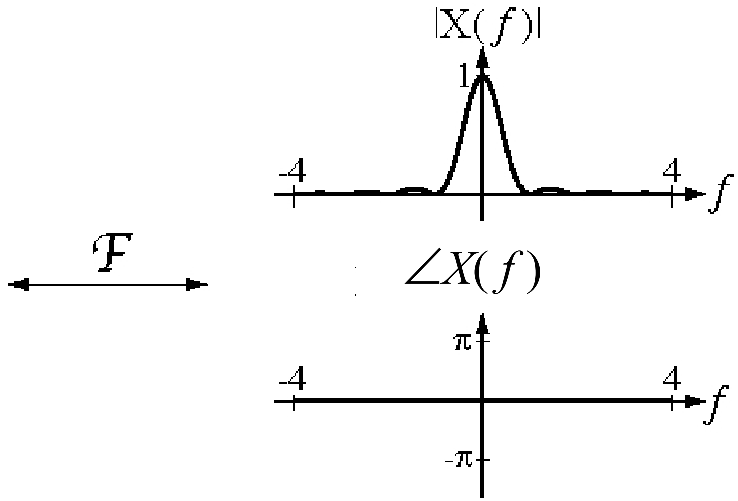
Señal	**Transformada**
$x(t)$	$X(\omega)$
$ax(t)+by(t)$	$aX(\omega)+bY(\omega)$
$x(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(\omega-\omega_0)$
$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
$x(-t)$	$X(-\omega)$
$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X(\omega/a)$
$x(t)*y(t)$	$X(\omega)Y(\omega)$
$x(t)y(t)$	$X(\omega)*Y(\omega)\frac{1}{2\pi}$
$dx(t)/dt$	$j\omega X(\omega)$

Propiedades de la CTFT (I)

Señal	Transformada
$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\dfrac{X(\omega)}{j\omega}+\pi X(0)\delta(\omega)$
$tx(t)$	$j\,dX(\omega)/d\omega$
$x(t)\quad real$	$\begin{cases} X(\omega)=X^{*}(-\omega) \\ \mathrm{Re}\{X(\omega)\}=\mathrm{Re}\{X(-\omega)\} \\ \mathrm{Im}\{X(\omega)\}=-\mathrm{Im}\{X(-\omega)\} \\ \lvert X(\omega)\rvert=\lvert X(-\omega)\rvert \\ \angle X(\omega)=-\angle X(-\omega) \end{cases}$
Relación de Parseval para señales no periódicas	$\int_{-\infty}^{\infty}\lvert x(t)\rvert^{2}dt=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-\infty}\lvert X(\omega)\rvert^{2}d\omega$
$Dualidad$:	$\begin{cases} g(t)\xleftrightarrow{TF} f(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-j\omega t}dt \\ f(t)\xleftrightarrow{TF} 2\pi g(-\omega) \end{cases}$

Desplazamiento en t

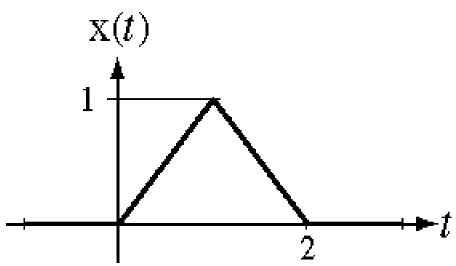


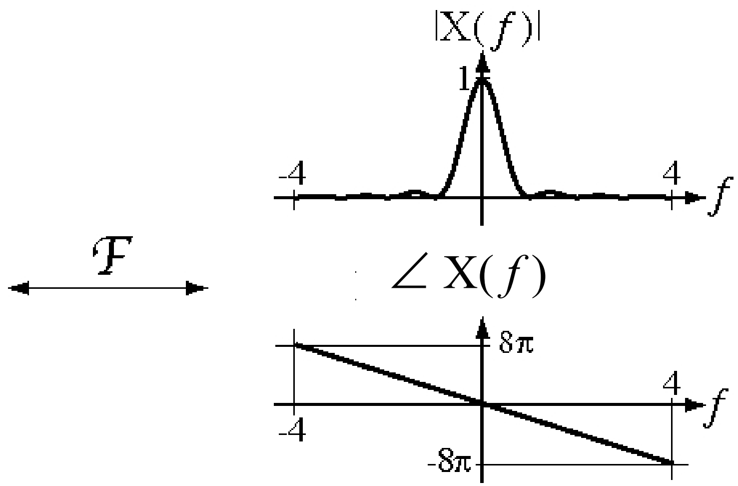


Desplazamiento en el tiempo

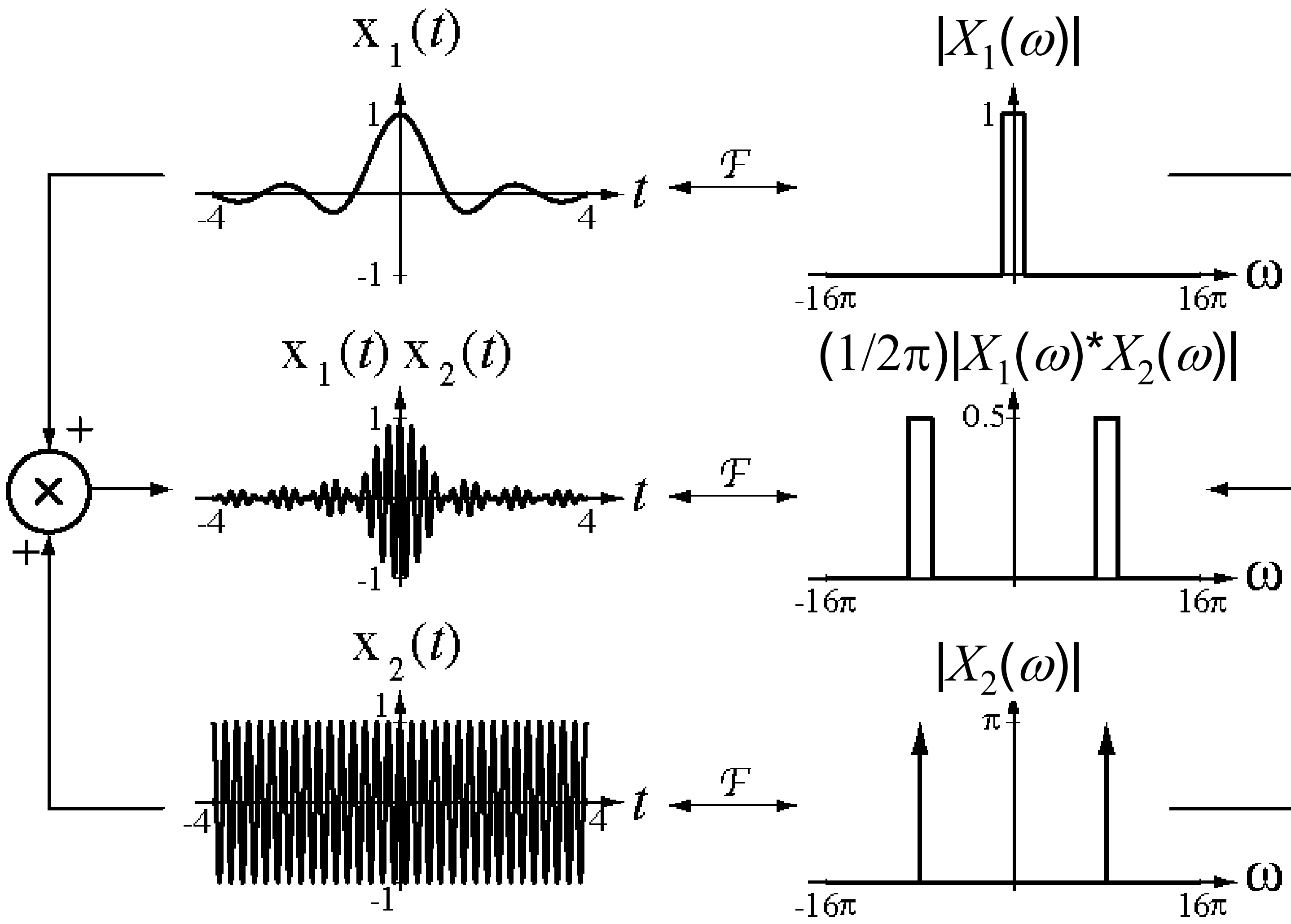
$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{TF} X(f)\,e^{-j2\pi f t_0}$$

$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{TF} X(\omega)\,e^{-j\omega t_0}$$



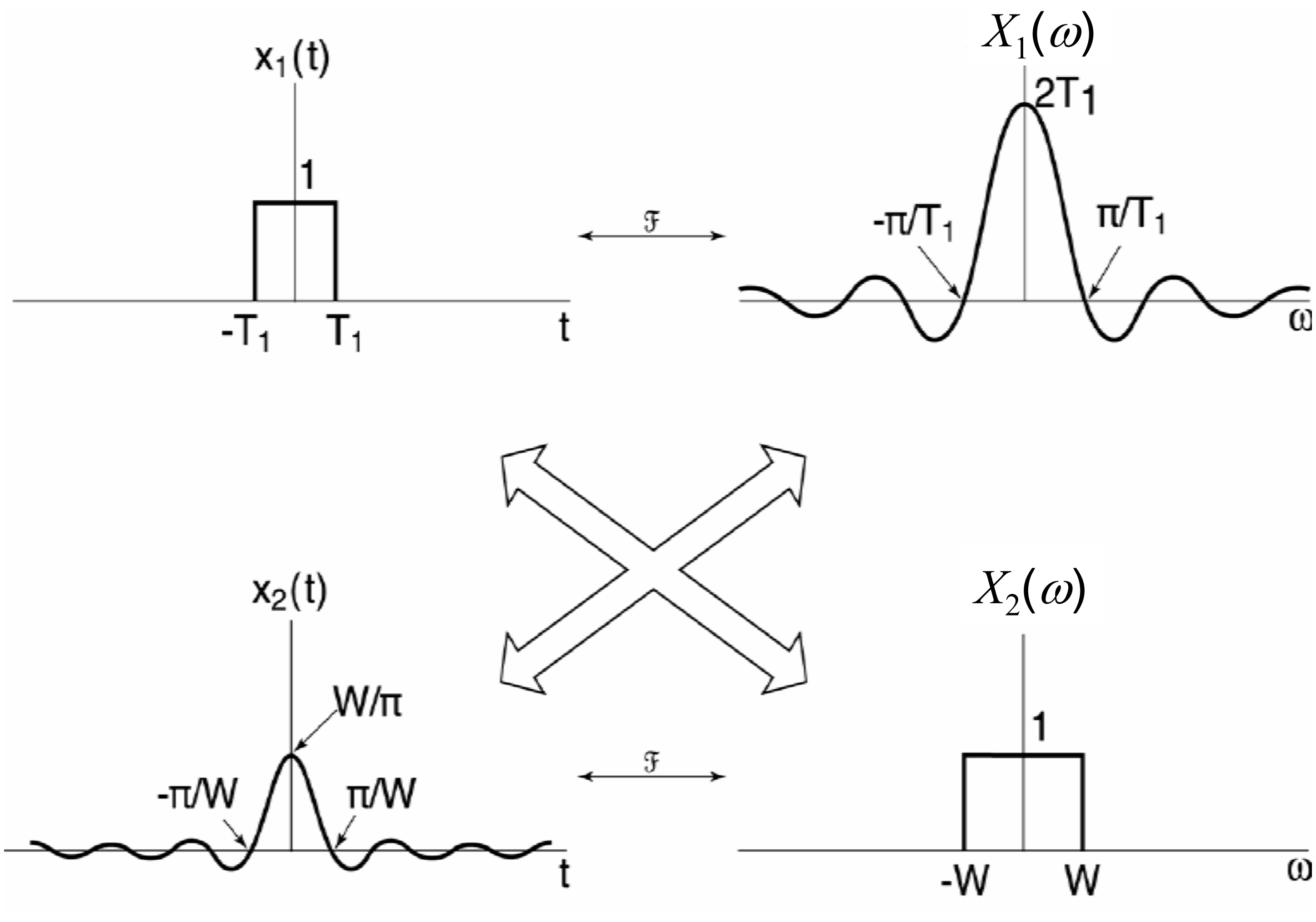


Modulación



$x_1(t)$
1
-4
4
-1
t
$\mathcal{F}$
$|X_1(\omega)|$
1
ω
-16π
16π
$x_1(t)\,x_2(t)$
$(1/2\pi)|X_1(\omega)*X_2(\omega)|$
0.5
$x_2(t)$
$|X_2(\omega)|$
π
+

Dualidad



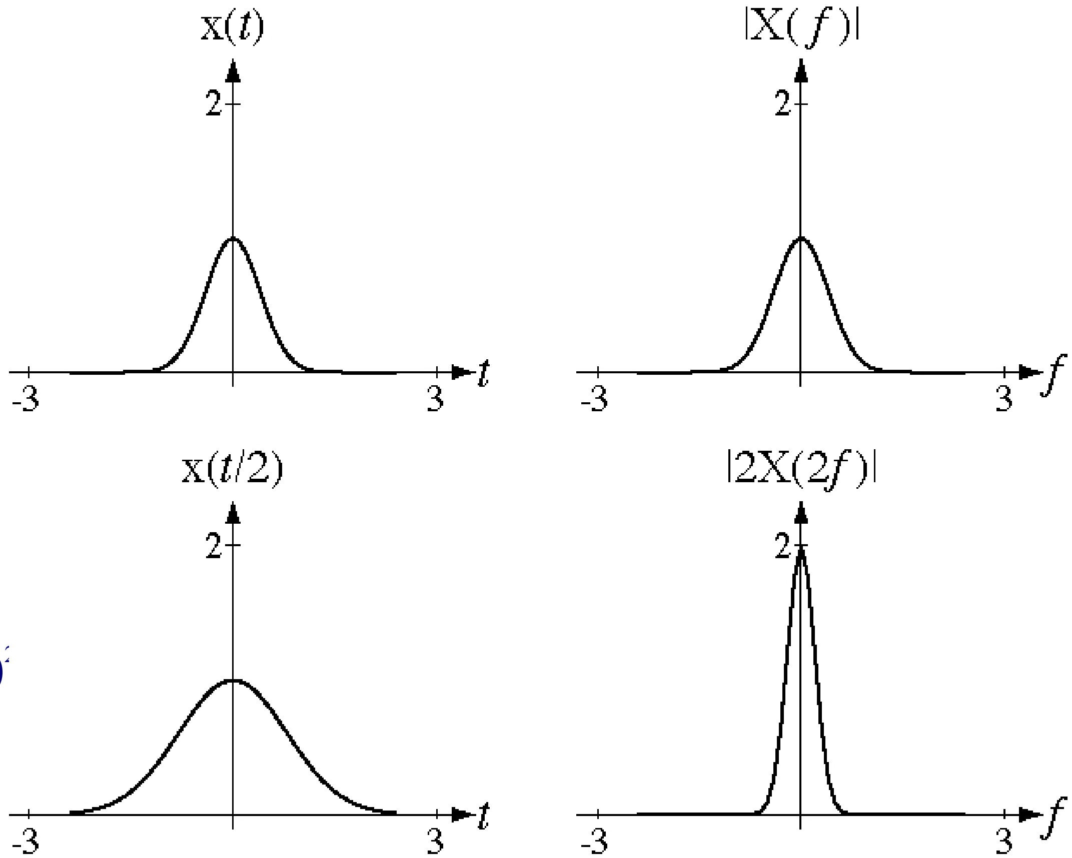
$x_1(t)$
1
$-T_1$
T_1
t
$\mathfrak{F}$
$X_1(\omega)$
$2T_1$
$-\pi/T_1$
π/T_1
ω
$x_2(t)$
W/π
$-\pi/W$
π/W
t
$\mathfrak{F}$
$X_2(\omega)$
1
-W
W
ω

El principio de "incertidumbre"

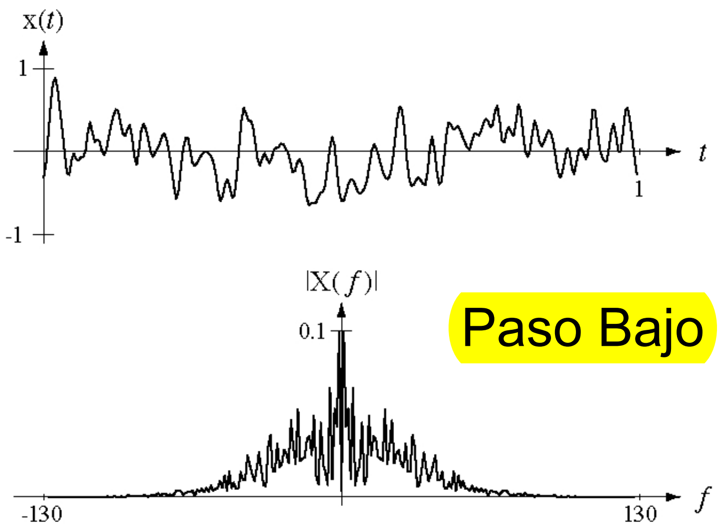
- Las propiedades de escalado en el tiempo y en frecuencia nos indican que **si una señal se expande en uno cualquiera de los dominios**, *t* o *ω* (*f*), **inevitablemente se comprime en el dominio complementario**.

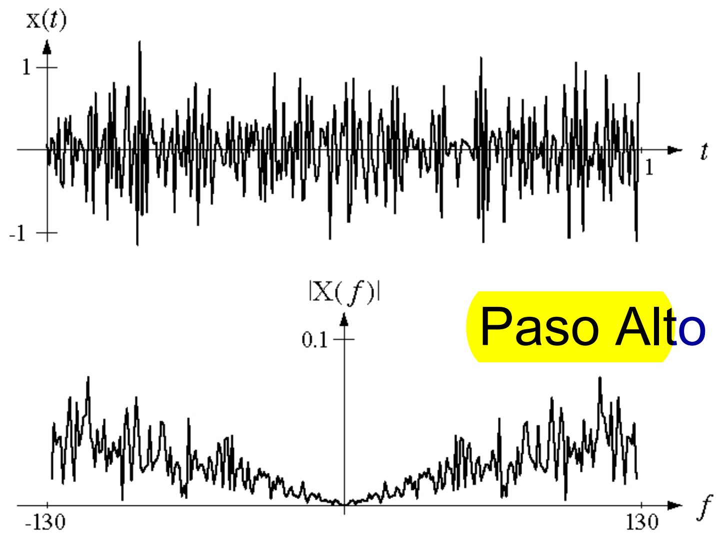
$$e^{-\pi t^2} \xleftrightarrow{\text{TF}} e^{-\pi f^2}$$

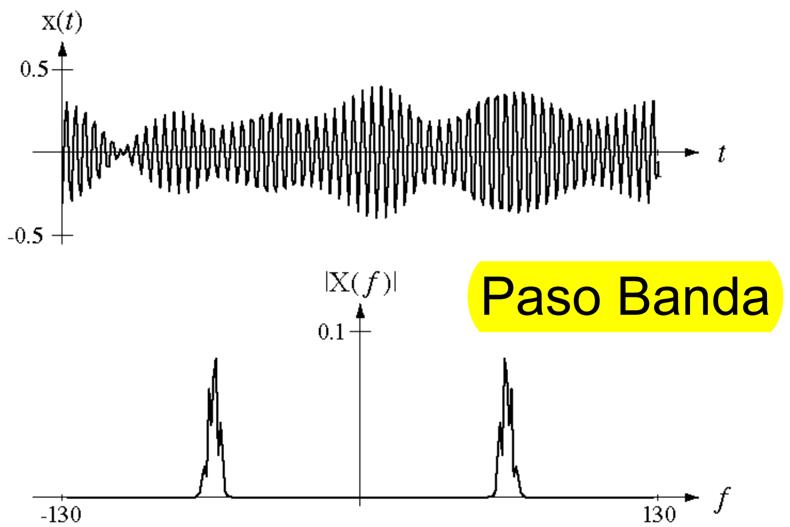
$$e^{-\pi\left(\frac{t}{2}\right)^2} \xleftrightarrow{\text{TF}} 2e^{-\pi(2f)^2}$$



Contenido en frecuencia







5. Transformada de Fourier para señales periódicas (I)

- Calculamos la transformada de un impulso y de una exponencial:

$$TF\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, \mathrm{e}^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, \mathrm{e}^{0}\, dt = 1$$

Como $\delta(t) \xleftrightarrow{TF} 1 \Rightarrow$

cuidado, con la dualidad aqui

Por desplazamiento $\delta(t-t_0) \xleftrightarrow{TF} \mathrm{e}^{-j\omega t_0} \Rightarrow$

Por dualidad $e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{TF} 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

cuidado, es poco mas delicado

- Como cualquier señal periódica la podemos desarrollar en serie de Fourier

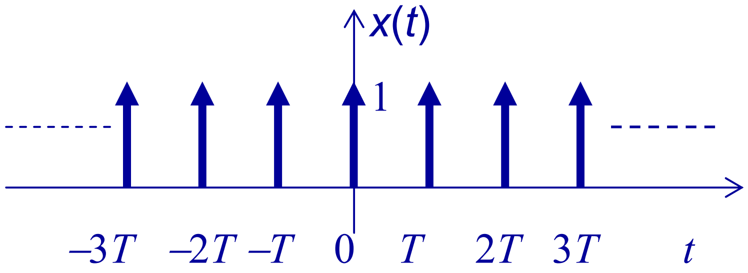
esto se relaciona con un resultado obtenido anteriormente...

Por linealidad $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{TF} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$

Donde $\omega_0 = 2\pi / T_0$, *siendo* T_0 *el periodo fundamental de* $x(t)$

CTFT para señales periódicas (II)

- Para su demostración partimos de un tren de impulsos:



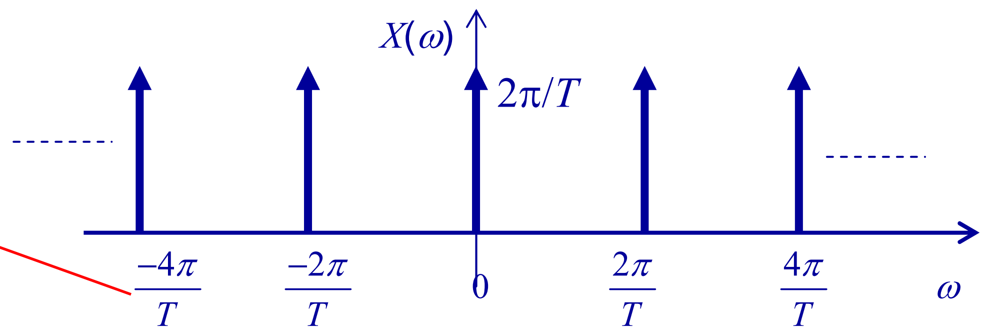
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

- La CTFS del tren de impulsos tiene como coeficientes:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)\,\mathrm{e}^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \delta(t)\,dt = \frac{1}{T} \Rightarrow$$

aplicamos la formula anterior

$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$



Pares transformados (señales no periódicas)

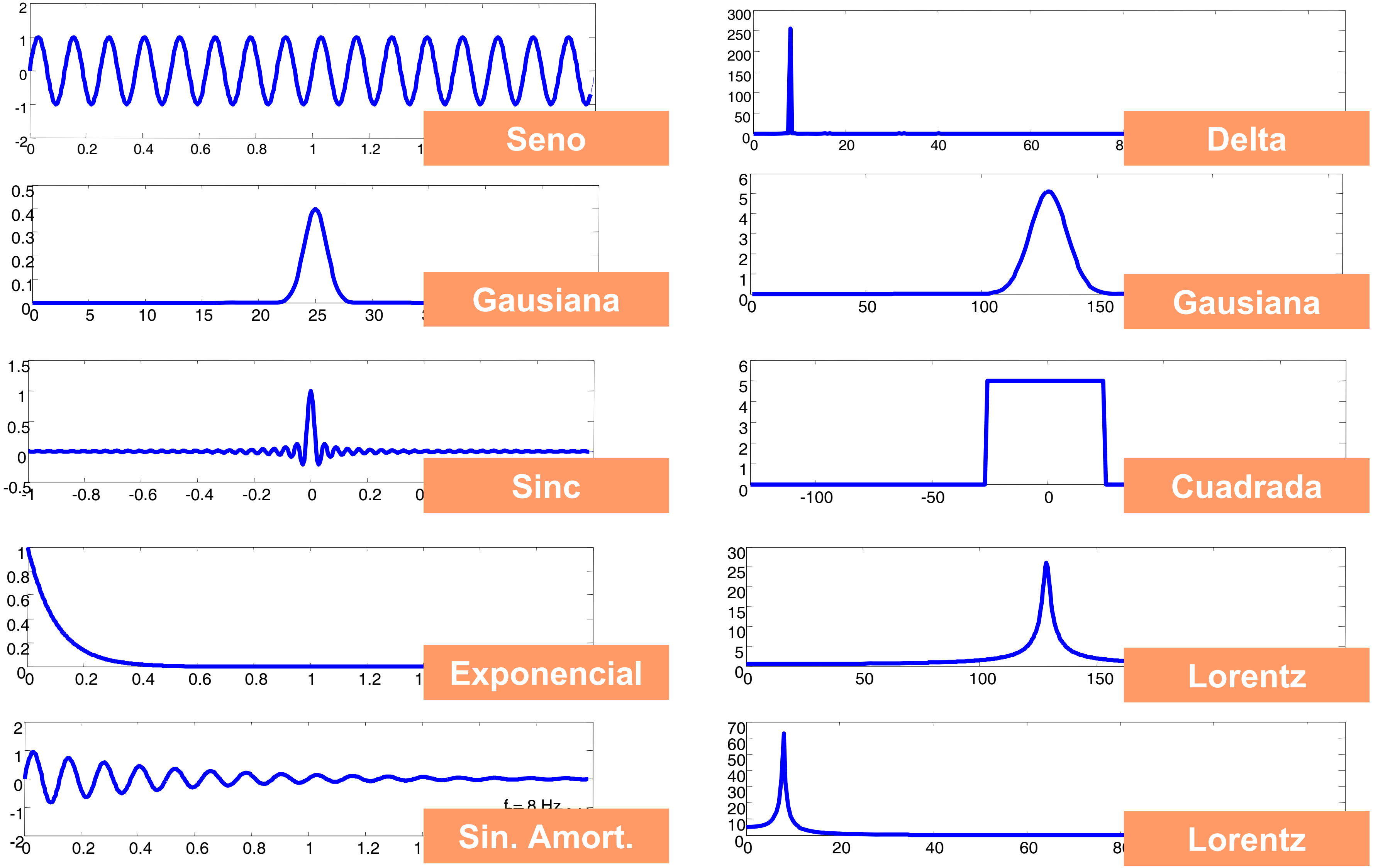
Señal	**Transformada**
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\dfrac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$
$\delta(t-t_0)$	$\mathrm{e}^{-j\omega t_0}$
$\mathrm{e}^{-at}u(t);\quad \mathrm{Re}\{a\}>0$	$\dfrac{1}{a+j\omega}$
$t\,\mathrm{e}^{-at}u(t);\quad \mathrm{Re}\{a\}>0$	$\dfrac{1}{(a+j\omega)^2}$
$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-at}u(t);\quad \mathrm{Re}\{a\}>0$	$\dfrac{1}{(a+j\omega)^n}$
$x(t)=\begin{cases}1, & \lvert t\rvert\le T_1\\ 0, & \lvert t\rvert>T_1\end{cases}$	$\dfrac{2\,\mathrm{sen}(\omega T_1)}{\omega}$
$\dfrac{\mathrm{sen}\,Wt}{\pi t}$	$X(\omega)=\begin{cases}1, & \lvert\omega\rvert<W\\ 0, & \lvert\omega\rvert>W\end{cases}$

Pares transformados (señales periódicas)

Mira luego!

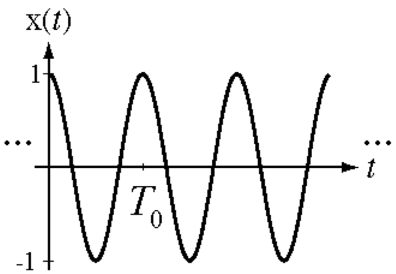
Señal	Transformada
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \, e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$
$e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
$\mathrm{sen}\,(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$
$x(t)=1$	$2\pi\delta(\omega)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$	$\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{T}\right)$
$x(t)=\begin{cases} 1, & \|t\|<T_1 \\ 0, & T_1<\|t\|\le T_0/2 \end{cases}$ $x(t+T_0)=x(t)$	$\frac{2\pi}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi k}{T_0}\right)$

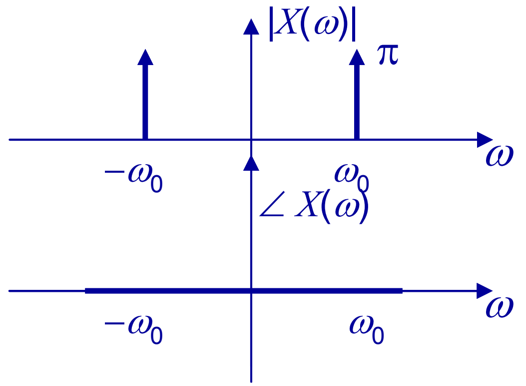
Pares de CTFT de señales típicas



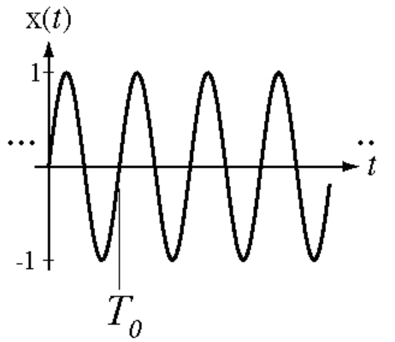
CTFT de las funciones seno y coseno

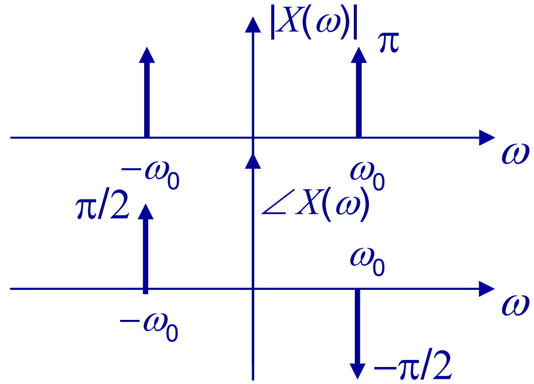
$$x(t)=\cos\left(\omega_0 t\right)=\frac{e^{j\omega_0 t}}{2}+\frac{e^{-j\omega_0 t}}{2}\xleftrightarrow{\text{TF}}X(\omega)=\pi\left[\delta\left(\omega-\omega_0\right)+\delta\left(\omega+\omega_0\right)\right]$$





$$x(t)=\text{sen}\left(\omega_0 t\right)=\frac{e^{j\omega_0 t}}{2j}-\frac{e^{-j\omega_0 t}}{2j}\xleftrightarrow{\text{TF}}X(\omega)=\frac{\pi}{j}\left[\delta\left(\omega-\omega_0\right)+\delta\left(\omega+\omega_0\right)\right]$$





6. Respuesta en frecuencia de sistemas de tiempo continuo (I)

- Dado un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t)$, se define la **respuesta en frecuencia** del sistema $H(\omega)$ como:

$$\boxed{H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{-j\omega t}\, dt}$$

$$\xrightarrow[X(\omega)]{x(t)} \boxed{\begin{matrix} h(t) \\ H(\omega) \end{matrix}} \xrightarrow[Y(\omega)=X(\omega)\cdot H(\omega)]{y(t)=x(t)*h(t)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}}$$

- La respuesta en frecuencia representa el conjunto de autovalores del sistema para las autofunciones del tipo: $x(t) = e^{-j\omega_0 t}$

$$x(t) = e^{-j\omega_0 t} \Rightarrow y(t) = H(\omega_0)\, e^{-j\omega_0 t}$$

Respuesta en frecuencia de sistemas de tiempo continuo (II)

- Dado que $H(\omega)$ es una función compleja de variable real, es necesario conocer su módulo y su fase.
- El módulo y la fase de la respuesta en frecuencia serán:

$$|H(\omega)| = \frac{|Y(\omega)|}{|X(\omega)|} \quad \text{y} \quad \angle H(\omega) = \angle Y(\omega) - \angle X(\omega)$$

- El módulo o amplitud de la respuesta en frecuencia (o **respuesta en amplitud**) representa la ganancia del sistema a cada pulsación ω o componente espectral
- La fase de la respuesta en frecuencia (o **respuesta en fase**) representa el desfase introducido por el sistema a cada pulsación ω o componente espectral
- La respuesta en frecuencia de un sistema LTI existirá si y sólo si el sistema es **estable**.