Ecuación de síntesis del DSF de señales periódicas discretas

- Sea $x[n]$ una señal periódica discreta de periodo N
  - *Cualquier* $x[n]$ de periodo N se puede descomponer en una suma de N exponenciales complejas armónicamente relacionadas, es decir, de frecuencias múltiplo de la frecuencia fundamental:

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

(<N> ≡ suma sobre cualesquiera N valores de k consecutivos)

  - A los coeficientes a_k se les conoce con el nombre de coeficientes del DSF de $x[n]$ y son números complejos.
  - Dada una señal periódica en tiempo discreto $x[n]$, ¿cómo podemos obtener los coeficientes de su DSF?

¿Cómo obtener los coeficientes del DSF?

- Opción 1: Resolviendo el siguiente sistema de N ecuaciones y N incógnitas (los coeficientes)

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega_0 n} \rightarrow$$

$$x[0] = \sum_{k=<N>} a_k$$

$$x[1] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega_0}$$

$$x[2] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega_0 2}$$

$$\cdots = \cdots$$

$$x[N-1] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega_0 (N-1)}$$

Ecuaciones de las SF en TD

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega_0 n} \rightarrow$$ Ec. síntesis

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \rightarrow$$ Ec. análisis

- Nota: Conviene pensar en a_k como una señal definida para todos los valores enteros *k*. Por lo tanto:
  - $a_{k+N} = a_k$ — Propiedad especial de los Coef. de Fourier: periódicos, con periodo *N*.
  - Sólo necesitamos *N* valores consecutivos de a_k en la ec. síntesis. (Puesto que *x*[*n*] es periódica, se especifica para *N* valores, tanto en tiempo como en frecuencia)

Convergencia de las Series de Fourier en DT

- Recordemos que las fórmulas de análisis y síntesis eran

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega_0 n} \rightarrow$$ Ec. síntesis

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \rightarrow$$ Ec. análisis

- ¡TODAS las series son finitas! → no hay problemas de convergencia
  - En ambos casos estamos sumando un número finito de términos (N)
  - Cada uno de esos términos está acotado (p.e., x[n] vale como mucho x_{max})
  - La suma como mucho vale $x_{max} \cdot N$ ➔ La suma está acotada ➔ Los coeficientes están acotados

2.2 Transformada de Fourier (TF) de señales discretas

- Vamos a ver:

  - TF de señales aperiódicas discretas definidas en energía.
  - TF de señales periódicas discretas.
  - Propiedades de la TF.
  - Respuesta en frecuencia de SLTI descritos por ecuaciones en diferencias.

Comenzaremos con la definición de la TF de señales discretas y de la TF inversa…

Definición de la TF en DT y de su inversa

- Sea $x[n]$ una secuencia aperiódica y definida en energía.
  - Su TF es una señal compleja que depende de la variable real
  - El par de la señal y su TF se denota como $x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\Omega})$
- Las ecuaciones de análisis y síntesis son:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \left\{ \begin{array}{l} \text{- Ec.análisis} \\ \text{- TF} \\ \text{- espectro de x[n]} \end{array} \right.$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n} d\Omega \left\{ \begin{array}{l} \text{- Ec. síntesis} \\ \text{- TF. Inversa} \end{array} \right.$$

  - Propiedad fundamental: $X(e^{j\Omega})$ es siempre periódica en Ω, con periodo 2π
  - Las ecuaciones anteriores, que suponen que x[n] no es periódica, pueden deducirse de las del DSF de señales periódicas.
  - Eso es lo que hacemos en las siguientes transparencias

La TF a través del DSF: ¿cómo se obtiene?

- Como $x[n]$ es periódica, podemos representarla como una SF:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega_0 n} \quad , \ \Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$$

$$\Rightarrow \quad a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \tilde{x}[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_2} \tilde{x}[n] e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

$$x[n] = 0, \ \forall n \notin [-N_1, N_2]$$

- Comparemos estos coeficientes con la TF

$$\Rightarrow \quad X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n} \qquad \text{Periódica en } \Omega \text{ con período } 2\pi$$

$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{jk\Omega_0})$$

- DSF muy parecido a TF ➔ coef. proporcionales a muestras equiespaciadas de la TF

La TF a través del DSF: ¿cómo se obtiene?

- Lo único que nos queda ahora es convertir la suma en integral

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} \underbrace{\frac{1}{N} X(e^{jk\Omega_0})}\, e^{jk\Omega_0 n} =$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=<N>} X(e^{jk\Omega_0}) e^{jk\Omega_0 n} \Omega_0 (*)$$

$$\text{Si } N \longrightarrow \infty : \tilde{x}[n] \longrightarrow x[n]$$

$$\Omega_0 \longrightarrow 0, \sum \Omega_0 \longrightarrow \int d\Omega, k\Omega_0 \longrightarrow \Omega$$

la suma en (*) es una integral

- Al trabajar en discreto, n es un número entero, por lo que la señal $e^{j\Omega n}$ *con respecto a la variable* Ω, es periódica con periodo 2π
  - $X(e^{j\Omega})$ es periódica, de periodo 2π
  - $X(e^{j\Omega})$ se puede ver como la envolvente de Na_k

- La periodicidad de la TF no debe sorprendernos puesta que…
  - Los a_k también eran periódicos (eso sí, con otro periodo)

Par de ecuaciones de la TF en DT

- Llegamos por tanto a las ecuaciones que pusimos al principio de esta sección. Son tan importantes que las repetimos.

- Par secuencia-TF:

$$x[n] \longleftrightarrow X(e^{j\Omega})$$

La TF es una señal continua.

Esta notación nos ayuda a recordar que la TF es periódica cada 2π

$$X(e^{j(\Omega_0+2\pi)}) = X(e^{j\Omega_0}e^{j2\pi}) = X(e^{j\Omega_0})$$

Cuando veamos la TZ, esta notación será muy útil.

- Ecuaciones de análisis y síntesis:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \left\{ \begin{array}{l} \text{- Ec.análisis} \\ \text{- TF} \\ \text{- espectro de x[n]} \end{array} \right.$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega \left\{ \begin{array}{l} \text{- Ec. síntesis} \\ \text{- TF. Inversa} \end{array} \right.$$

Convergencia

- Ec. síntesis:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega$$

  - Integramos sobre un intervalo finito → no hay problemas de convergencia
  - Si los valores de la TF son finitos, la integral (el área) es finita

- Ec. análisis:

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n}$$

  - Tenemos una suma infinita, esto es “peligroso” porque aunque los valores de la secuencia sean finitos, sumamos infinitos términos, con lo cual la suma sí puede dar infinito
  - Conclusión, no todas las señales discretas tienen TF
  - Para poder garantizar que la TF existe, necesitamos exigir a la señal unas condiciones análogas a las que pedíamos en CT, por ejemplo:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty \text{ -Energía finita}$$