Práctica final 2012-2013

Laboratorio de Tratamiento Digital de Señales

1. Igualador basado en entrenamiento (40 %)

Se desea diseñar un filtro lineal para recuperar la señal transmitida a través de un canal de comunicaciones desconocido. Para ello, se envía una señal $x[n]$ conocida (dada en el fichero **s1.mat**) y se recibe una señal $y[n]$ (dada en el fichero **s2.mat**). Se supone que ambas señales son ergódicas y de media nula.

1. **[10 %]** Considere un filtro FIR lineal $\mathbf{w} = [w_0, w_1, ..., w_{P-1}]^T$ con P coeficientes que minimice el coste cuadratico medio $E[(x[n] - \hat{x}[n])^2]$ de la estimación
$$\hat{x}[n] = \sum_{k=0}^{P-1} w_k y[t-k].$$
Halle los coeficientes del filtro de Wiener $\mathbf{w}$ (aproximado) para diferentes valores de $P = 1, 2, 3, 10$.

2. **[2 %]** Escriba la estimación $\hat{R}_{yy}$ de la matriz de autocorrelación R_{yy} de $y[n]$ (de dimensión $P \times P$), para $P = 3$.

3. **[2 %]** Escriba la estimación $\hat{r}_{yy}[\tau]$ de la función de autocorrelación $r_{yy}[\tau]$ de $y[n]$, para $\tau = 0, ..., P-1$, para $P = 3$.

4. **[2 %]** Escriba la estimación $\hat{r}_{yx}[\tau]$ de la función de correlación $r_{yx}[\tau]$, para $\tau = 0, ..., P-1$, para $P = 3$.

5. [**2 %**] Calcule el error cuadratico medio de la estimación para cada filtro (i.e., para cada valor de P). ¿Que filtro FIR aconsejaría utilizar? Discuta la respuesta.

6. [**2 %**] La señal $x[n]$ está formada por símbolos equiprobables de una 2-PAM ($\{-1, +1\}$). Si utiliza un detector símbolo a símbolo sin memoria después del igualador, calcule la tasa de error de decisión para cada posible P.

7. [**10 %**] Repita el punto 1 utilizando un algoritmo LMS para $P = 2$ y $\mu = 0.01$. Muestre los coeficientes obtenidos y la convergencia del algoritmo.

8. [**10 %**] Repita el punto 1 utilizando un algoritmo RLS para $P = 2$ y $\lambda = 0.95$. Muestre los coeficientes obtenidos y la convergencia del algoritmo.

2. Igualadores basados en modelos (20 %)

1. [**5** %] Suponga ahora que la señal $y[n]$ se generó de acuerdo a

$$y[n] = x[n] + v[n], \tag{1}$$

donde $v[n]$ representa un ruido independiente de $x[n]$ ($E[x[n]v[n]] = 0$), con varianza σ^2 y autocorrelación $E[v[n]v[n+\tau]] = r_{vv}[\tau] = \sigma^2\delta[\tau]$ (ruido blanco, $\mathbf{R}_{vv} = \sigma^2\mathbf{I}$) con $\sigma^2 = 1/4$. Considerando $P = 3$ y que los símbolos ($\{-1, 1\}$) que forman $x[n]$ (del fichero **s1.mat**) están generados de forma independiente $r_{xx}[\tau] = \delta[\tau]$, ($\mathbf{R}_{xx} = E_s\mathbf{I}_{P\times P}$, $E_s = 1$) calcule los coeficientes del filtro de Wiener $\mathbf{w} = [w_0, w_1, w_2]^T$.

Ayuda: en este caso, tenga en cuenta que $\mathbf{R}_{yy} = \mathbf{R}_{xx} + \sigma^2\mathbf{I}_{P\times P}$ y $r_{xy}[\tau] = r_{xx}[\tau]$.

2. [**5** %] Ahora suponga el siguiente modelo generativo (que incluye la respuesta de un canal de transmisión con interferencia inter-simbólica (ISI))

$$y[n] = h_0x[n] + h_1x[n-1] + v[n], \tag{2}$$

con $v[n]$ ruido blanco de varianza σ^2 independiente de $x[n]$. Dada la señal $x[n]$ del fichero **s1.mat** y la señal $y[n]$ del fichero **s2.mat** estime el canal $\hat{\mathbf{h}} = [\hat{h}_0, \hat{h}_1]^T$, hallando una solución de mínimos cuadrados (LS, least squares).

3. [**10** %] Para el caso anterior (apartado 2), y utilizando $\hat{\mathbf{h}}$, halle los coeficientes de un filtro igualador de Wiener con $P = 3$.

   Ayuda: En este caso, llamando $L = 1$ a la memoria del canal $\mathbf{h}$, debe construir una matriz de convolución de canal $\mathbf{H}$, definida como

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 \\ 0 & h_1 & h_0 \\ 0 & 0 & h_1 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

   de tamaño $(P + L) \times P$ y hallar P coeficientes del igualador FIR, que son

$$\mathbf{w} = \left(\mathbf{H}^T\mathbf{H} + \frac{\sigma^2}{E_s}\mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{H}^T\mathbf{c},$$

   donde $\mathbf{c} = [1, 0, 0, 0]^T$ es un vector $(P+L) \times 1$. Explique en la memoria el porqué de esta solución mediante un desarrollo teórico que permita deducir la mencionada expresión de $\mathbf{w}$.

3. Modelos autoregresivos (30 %)

1. [**5** %] Genere una señal $x[n]$ de longitud $T = 2000$ muestras de una forma autoregresiva con $N = 2$ coeficientes (AR(2)), es decir,

$$x[n] = a_1 x[n-1] + a_2 x[n-2] + v[n], \tag{4}$$

   con a_1 =0.5 y con a_2 =0.5 y varianza de un ruido blanco Gaussiano $v[n]$ igual a $\sigma^2 = 4$.

2. [**1** %] ¿Es el sistema estable? Calcule los polos del sistema AR(2) dado por la ecuación (4).

3. [**10** %] Considerando la señal $x[n]$, obtenga la estimación LS (Least Squares, mínimos cuadrados) de los coeficientes de un modelo AR(p) para $p = 1, 2, 3$.

4. [**4** %] Calcule el error cuadrático medio para los 3 casos anteriores. En el caso $p = 2$, ¿tiene el error cuadrático medio alguna relación con la varianza del ruido?

5. [**10** %] Repita el punto 3 utilizando el **algoritmo Levinson-Durbin**.

4. Espectro y modelización paramétrica (10 %)

Considere la señal $z[n]$ proporcionada en el fichero **s3.mat**, cuya frecuencia de muestreo es $f_s = 1$ kHz.

1. [**2** %] Utilizando la función **fft** de Matlab, determine el número de frecuencias N que forman la señal $z[n]$ y obtenga sus correspondientes valores f_i, $i = 1, ..., N$, sin olvidar indicar las unidades.

2. [**6** %] Considere la siguiente modelización paramétrica de la señal

$$z[n] = \sum_{i=1}^{N} a_i \sin(2\pi f_i t_n + \phi_i) + v[n], \tag{5}$$

   donde $t_n \geq 0$, $v[n]$ es ruido blanco gaussiano y N y f_i son los hallados en el paso anterior. Obtenga la estimación LS $\hat{a}_i$ y $\hat{\phi}_i$ de los coeficientes a_i y ϕ_i para $i = 1, ..., N$.

   Ayuda: Note que

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha). \tag{6}$$

3. [**2** %] Estime la varianza del ruido $v[n]$.

5. Presentación de la memoria

La memoria debe describir de manera clara el trabajo realizado por el alumno y el detalle de las fuentes de información o referencias utilizadas. En particular, el trabajo debe ser reproducible, es decir, debe contener información suficiente para que cualquier ingeniero independiente pueda reproducir fielmente los experimentos y las conclusiones del alumno. Incluir gráficas, ecuaciones y explicaciones cuando sea necesario, pero no el código. Cada resultado obtenido tiene que ser debidamente discutido por el alumno.

Además de la memoria, se debe entregar el código desarrollado debidamente comentado (en un conjunto de ficheros .m) y ambos deben ser subidos a Aula Global 2 en un fichero comprimido. El último día para entregar esta práctica será el del examen final de la asignatura. Una vez entregada la memoria de la práctica final, no se requiere la asistencia a clase. No se pueden hacer múltiples entregas de la práctica final.

La memoria puede entregarse exclusivamente en **formato pdf** (subiendola en Aula Global 2, así como los ficheros .m), no es necesario imprimirla.

6. Formulas fundamentales para la resolución de la practica

1. Solución del filtro de Wiener:

$$\mathbf{w} = (\mathbf{R}_{yy})^{-1} r_{yx}. \tag{7}$$

2. Pseudo-inversa de una matriz rectangular $\mathbf{Y}$:

$$\mathbf{Y}^{+} = (\mathbf{Y}^{T}\mathbf{Y})^{-1}\mathbf{Y}^{T}. \tag{8}$$

Referencias

[1] S. Qureshi, “Adaptive equalization”, Proc. IEEE, vol. 73(9), pp. 1349-1387, 1985.

[2] B. Petersen, D. Falconer, “Suppression of adjacent-channel, cochannel and intersymbol interference by equalizers and linear combiners”, IEEE Trans. Commun., vol. 42(12), pp. 3109-3118, 1994.

[3] G. Ballou, “Filters and equalizers”, Handbook for Sound Engineers, Fourth edition, Waltham, MA: Focal Press, 2008.

[4] B. Widrow, S. Stearns, *Adaptive Signal Processing*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1985.

[5] G. Goodwin, K. Sin, *Adaptive Filtering, Prediction and Control*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1984.

[6] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1996.

[7] M. Reuter, J. Zeidler, "Nonlinear effects in LMS adaptive equalizers", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 47(6), pp. 1570-1579, 1999.

[8] B. Mitchinson, R.F. Harrison, "Digital communications channel equalization using the Kernel Adaline", IEEE Trans. Commun., vol. 50(4), pp. 571-576, 2002.