Igualación
Suavizador de error cuadrático medio mínimo

Luca Martino

Apuntes-Laboratorio

no revisados (cuidado!!!)

Modelo discreto

- Se considere el siguiente modelo discreto de la señal observada (3 maneras de escribir lo mismo)

conjugado

1) $$y_n = \sum_{i=0}^{N-1} h_i^* x_{n-i} + g_n$$ Ruido.

2) $$y_n = h_0^* x_n + h_1^* x_{n-1} + \ldots + h_{N-1}^* x_{n-N+1} + g_n$$

3) $$y_n = \vec{h}^* \vec{x}_n + g_n$$

$$\vec{h} = \left[h_0, h_1, \ldots, h_{N-1}\right]$$

Coeficientes complejos que describen el efecto del canal (que asumimos conocidos).

$$\vec{x}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \ldots. \\ \ldots. \\ x_{n-N+1} \end{bmatrix}$$

Suavizador

- Se considere ahora un conjunto de observaciones (pasadas y futuras)

$$
\begin{cases}
y_{n+d} = h_0^* x_{n+d} + h_1^* x_{n+d-1} + \ldots + h_{N-1}^* x_{n+d-N+1} + g_{n+d} \\
\ldots . \\
y_n = h_0^* x_n + h_1^* x_{n-1} + \ldots + h_{N-1}^* x_{n-N+1} + g_n \\
\ldots . \\
y_{n-d} = h_0^* x_{n-d} + h_1^* x_{n-d-1} + \ldots + h_{N-1}^* x_{n-d-N+1} + g_{n-d}
\end{cases}
$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{y}_n = A\vec{x}_n + \vec{g}_n$$

Se puede escribir en forma vectorial….
Ahora vamos a ver como.

Sistema de ecuaciones

- Vamos a considerar el siguiente sistema de ecuaciones (sin ruido)

$2d+1$

Ecuaciones

$$
\begin{cases}
y_{n+d} = h_0^* x_{n+d} + h_1^* x_{n+d-1} + \ldots + h_{N-1}^* x_{n+d-N+1} \\
y_{n+d-1} = h_0^* x_{n+d-1} + h_1^* x_{n+d-2} + \ldots + h_{N-1}^* x_{n+d-N} \\
\ldots \\
y_n = h_0^* x_n + h_1^* x_{n-1} + \ldots + h_{N-1}^* x_{n-N+1} \\
\ldots \\
y_{n-d} = h_0^* x_{n-d} + h_1^* x_{n-d-1} + \ldots + h_{N-1}^* x_{n-d-N+1}
\end{cases}
$$

$N+2d$ incógnitas

$$x_{n-d-N+1}, x_{n-d-N+2}, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+d}$$

$$n+d-(n-d-N+1)+1=$$
$$=n+d-n+d+N-1+1=N+2d$$

Matriz A

- Escribimos la matriz A

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_{n+d} \\ y_{n+d-1} \\ \cdots \\ y_n \\ \cdots \\ y_{n-d} \end{bmatrix}}_{2d+1} = \underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix} h_0^* & h_1^* & \dots & h_{N-1}^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_0^* & h_1^* & \dots & h_{N-1}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0^* & h_1^* & \dots & h_{N-1}^* & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_0^* & h_1^* & \dots & h_{N-1}^* \end{bmatrix}}^{N+2d}}_{\text{matriz } A,\; 2d+1} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{n+d} \\ x_{n+d-1} \\ \cdots \\ x_n \\ x_{n-1} \\ \cdots \\ x_{n-d-N+1} \end{bmatrix}}_{N+2d}$$

$N \quad 2d$

$2d \quad N$

Ejemplo d=2; N=3

- Escribimos el sistema para este caso particular

$$N + 2d = 3 + 4 = 7$$

$$2d + 1 = 5 \quad \begin{bmatrix} y_{n+2} \\ y_{n+1} \\ y_{n} \\ y_{n-1} \\ y_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0^* & h_1^* & h_2^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_0^* & h_1^* & h_2^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0^* & h_1^* & h_2^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_0^* & h_1^* & h_2^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_0^* & h_1^* & h_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \\ \boxed{x_{n}} \\ x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ x_{n-3} \\ x_{n-4} \end{bmatrix} \quad N + 2d = 7$$

c_{d+1}

$d + 1 = 3$

$d + N = 5$

- La columna c_{d+1} asociada a x_n es la tercera contando desde la izquierda o la quinta contando desde la derecha.

Ejemplo (casi) con la notación de Joaquín d=2; N=3

- Escribimos el sistema para este caso particular

$$
\begin{bmatrix} y_{n-2} \\ y_{n-1} \\ y_n \\ y_{n+1} \\ y_{n+2} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
h_2^* & h_1^* & h_0^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & h_2^* & h_1^* & h_0^* & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & h_2^* & h_1^* & h_0^* & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & h_2^* & h_1^* & h_0^* & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & h_2^* & h_1^* & h_0^*
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_{n-4} \\ x_{n-3} \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ \boxed{x_n} \\ x_{n+2} \\ x_{n+3} \end{bmatrix}
$$

c_{d+N}

$d+N=5$

$d+1=3$

Esta es la matriz $\boxed{H^H}$

Ejemplo d=2; N=2

- Escribimos el sistema para este caso particular

$$N + 2d = 2 + 4 = 6$$

$$2d+1=5 \qquad \begin{bmatrix} y_{n+2} \\ y_{n+1} \\ y_{n} \\ y_{n-1} \\ y_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0^* & h_1^* & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_0^* & h_1^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0^* & h_1^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_0^* & h_1^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h_0^* & h_1^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \\ \boxed{x_{n}} \\ x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ x_{n-3} \end{bmatrix} \qquad N+2d=6$$

$$c_{d+1}$$

$$d+1=3$$

$$d+N=4$$

- La columna c_{d+1} asociada a x_n sigue siendo la tercera contando desde la izquierda pero ahora es la cuarta contando desde la derecha.

Ejemplo (<u>casi</u>) con la notación de Joaquín d=2; N=2

- Escribimos el sistema para este caso particular

$$\begin{bmatrix} y_{n-2} \\ y_{n-1} \\ y_n \\ y_{n+1} \\ y_{n+2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} h_1^* & h_0^* & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & h_1^* & h_0^* & \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_1^* & \boxed{h_0^*} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{h_1^*} & h_0^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & h_1^* & h_0^* \end{bmatrix}}_{c_{d+N}} \begin{bmatrix} x_{n-3} \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ \boxed{x_n} \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{bmatrix}$$

$d+N=4$

$d+1=3$

Esta es la matriz $\boxed{H^H}$

Filtro FIR de mínimo error cuadrático medio

- Podemos encontrar un filtro FIR con $2d+1$ coeficientes $\boxed{\vec{w}}$:

$$\boxed{\hat{x}_n = \vec{w}\vec{y}_n}$$

- La solución optima es

Hay que tener en cuenta que son vectores ordenados el manera distintas...

$$\boxed{\vec{w}_1 = \left(\sigma_x^2 AA^H + \sigma_g^2 I\right)^{-1} \sigma_x^2 c_{d+1}} \quad \boxed{\vec{w}_2 = \left(\sigma_x^2 H^H H + \sigma_g^2 I\right)^{-1} \sigma_x^2 c_{d+N}}$$

- donde *I* es una matriz identidad $2d+1 \times 2d+1$.