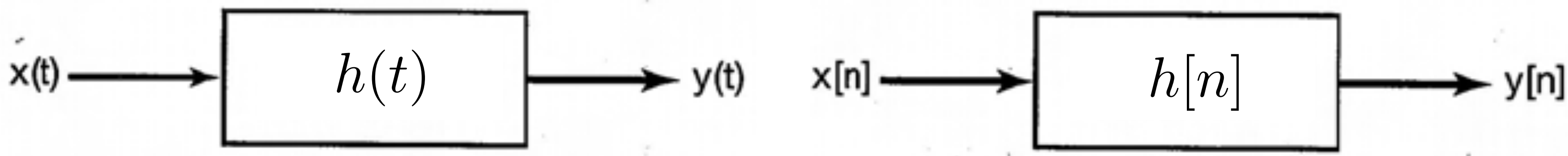
# Ecuaciones diferenciales, convolución, respuesta al impulso

# Sistemas LTI: convolución




- Primera forma de expresar la salida en función de la entrada: <u>con la convolución</u>

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

# Respuesta al impulso

- Si pongo como entrada un impulso,

$$x(t) = \delta(t) \longrightarrow y(t) = h(t)$$

$$x[n] = \delta[n] \longrightarrow y[n] = h[n]$$

---

$$\begin{aligned} y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau, \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = h(t), \end{aligned}$$

# Sistemas LTI, Tiempo Continuo (TC)

- De forma equivalente se pueden expresar con ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}}$$

- La equivalencia perfecta se da cuando las condiciones iniciales son todas nulas:

$$y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \ldots = \frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}} = 0.$$

En general

$\boxed{t_0 = 0}$

Aunque deberia ser "menos infinito"

- pero que hay que precisar algo…

# Hallar h(t)

- Para hallar directamente h(t) desde la ecuación diferencial (sin pasar por el dominio transformado – tipo Laplace), tenemos que tener un poco de cuidado.
- Para ello, necesitamos repasar un poco de la teoría básica de las ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes (EDLCC).

# Teoría Básica de EDLCC

- En general, la solución esta formada por dos partes:

$$y(t) = y_o(t) + y_p(t)$$

- <u>Solución= Sol. homogénea + Sol. Particular</u>

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0$$

- Respuesta natural + Respuesta forzada

# Teoría Básica de EDLCC

- Ecuación homogénea (asociada a la EDLCC)

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0}$$

- <u>con las N-1 condiciones iniciales genéricas</u>

$$y(0), \quad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0}, \dots \quad \left.\frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}}\right|_{t=0}$$

# Teoría Básica de EDLCC

- A la ecuación diferencial homogénea  se asocia un polinomio característico

$$a_k s^k + a_{k-1} s^{k-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

- …cuya raíces/ceros son muy importantes.
- Esto será también el denominador que aparece en la trasformada de Laplace (extensión de la transformada de Fourier).
- La raíces se de este polinomios se suelen llamar "**polos**".

# Teoría Básica de EDLCC

- Consideramos N raíces/ceros diferentes reales o complejas

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_N$$

- La solución (libre) será

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + c_N e^{\lambda_N t}$$

- donde las constantes $c_1, c_2, \ldots c_N$

se hallan usando las condiciones iniciales.

# Teoría Básica de EDLCC

- Si hay raíces/ceros múltiples la solución es un poco mas complicada.
- aparecen términos del tipo

$$\left(\sum_{i=0}^{m_j-1} c_{i,j} t^i\right) e^{\lambda_j t}$$

Donde $m_j$ es la multiplicidad de la raíz $\lambda_j$ .

- <u>En cualquier caso, que la solución es estable (no explota) cuando t crece, solo si todas las raíces son negativas (o nulas).</u>

# Solución libre con cond. Iniciales nulas

- Además nótese que, por lo dicho anteriormente,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0$$

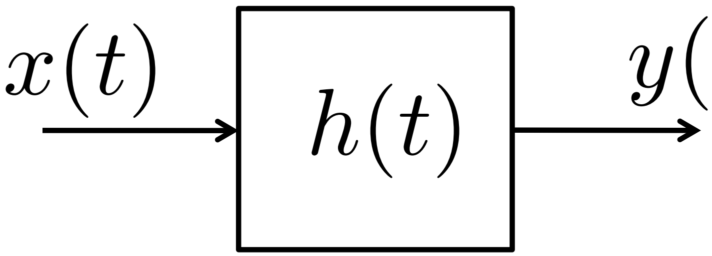
- con todas las condiciones iniciales nulas

$$y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \ldots = \frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}} = 0.$$

- <u>SERÁ SIEMPRE LA SOLUCIÓN NULA</u> $y_0(t) = 0$

# Consecuencia

- Lo que nosotros expresamos como convolución,




$$y(t) = x(t) * h(t)$$

es la respuesta FORZADA/PARTICULAR

$$\boxed{y(t) = y_p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau}$$

$$\boxed{y_0(t) = 0}$$

# Respuesta al impulso= h(t)

- Desde la convolución es facil ver que la respuesta al impulso es h(t).

- Desde la ecuación diferencial, tenemos:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{j=0}^{M} b_j \frac{d^j \delta(t)}{dt^j}$$

- Con condiciones inicial todas nulas:

$$y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \ldots = \frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}} = 0. \qquad \boxed{t_0 = 0}$$

- difícil! Vamos a ver que podemos hacer….

# Primer paso: Sistema sin derivadas de la delta

- Consideremos el sistema simplificado

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \delta(t)$$

- Con condiciones inicial todas nulas:

$$y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \dots = \frac{d^{N-1} y(t_0)}{dt^{N-1}} = 0. \qquad \boxed{t_0 = 0}$$

- buscamos la SOLUCION PARTICULAR $\boxed{y_p(t)}$ DE ESTE PROBLEMA, porque sabemos que:

$$\boxed{y_0(t) = 0}$$

# Primer paso: Sistema sin derivadas de la delta

- Por definición de delta, tenemos la tentación de estudiar el sistema homogéneo

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0$$

- Siendo las condiciones iniciales nulas, la solución seria nula

$$y(t) = 0$$

- … algo no va bien! El problema es que entre

$$t = 0^-, t = 0^+$$

la delta no es nula! Que podemos hacer?

# Primer paso: Sistema sin derivadas de la delta

- Método: se considera en sistema homogéneo

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0$$

- pero con las siguientes condiciones

$$y(0) = 0, \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = 0, \ldots \left.\frac{d^{N-2} y(t)}{dt^{N-2}}\right|_{t=0} = 0$$

$$\left.\frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}}\right|_{t=0} = \frac{1}{a_N}$$

# Solución parcial y completa

- Resolviendo el sistema anterior obtenemos una solución que llamaremos

$$\boxed{\widetilde{y}(t)}$$

- Y la solución del sistema completo?

$$\boxed{y_p(t) = \sum_{j=0}^{M} b_j \frac{d^j \widetilde{y}(t)}{dt^j}}$$

$$h(t) = y_p(t)$$

# Ejemplo

- Ejemplo:

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 2\dot{x}(t) + x(t)$$

(con cond. Iniciales nulas)

---

Polinomio característico

$$s^2 + 3s + 2 = 0$$

Las raíces son -1, -2, then:

$$y_o(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t}$$

# Ejemplo

- Queremos resolver:

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 2\dot{\delta}(t) + \delta(t)$$

con cond. Iniciales nulas

# Respuesta al impulso: solución parcial $\widetilde{y}(t)$

- Consideremos el problema homogéneo y las condiciones iniciales:

$$y(0) = 0 \qquad \dot{y}(0) = \frac{1}{a_2} = 1$$

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ -A - 2B &= 1 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} A &= 1 \\ B &= -1 \end{aligned}$$

$$\boxed{\widetilde{y}(t) = e^{-t} - e^{-2t}} \qquad t \geq 0$$

Cero para t<0

# Respuesta al impulso!!!

$$h(t) = 2\frac{d\widetilde{y}(t)}{dt} + \widetilde{y}(t)$$

$$h(t) = -e^{-t} + 3e^{-2t} \qquad t \geq 0$$

Cero para t<0

# Con Laplace

Unilatera o bilatera no importa, porque las condiciones iniciales son nulas:

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = 2s + 1$$

$$(s^2 + 3s + 2)H(s) = 2s + 1$$

$$\boxed{H(s) = \frac{2s+1}{s^2+3s+2}}$$

# Con Laplace

Tenemos que anti-trasformar

$$H(s) = \frac{2s+1}{s^2+3s+2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

$$H(s) = \frac{A(s+2)+B(s+1)}{(s+1)(s+2)}$$

$$H(s) = \frac{(A+B)s+2A+B}{(s+1)(s+2)}$$

$$\begin{aligned} A+B &= 2 \\ 2A+B &= 1 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} A &= -1 \\ B &= 3 \end{aligned}$$

# Con Laplace

Tenemos que anti-trasformar

$$H(s) = \frac{-1}{(s+1)} + \frac{3}{(s+2)}$$

$$h(t) = -e^{-t} + 3e^{-2t}$$

$$t \geq 0$$

Cero para t<0

Tenemos que aclarar mas esto...

# Transformada de Laplace de h(t) como auto-valor

## Exponenciales como autofunciones de sistemas LTI

$$x(t) = e^{st} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$\boxed{s = \sigma + j\omega}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau = \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s\tau} d\tau\right] e^{st} = \underbrace{H(s)}_{\text{autovalor}}\,\underbrace{e^{st}}_{\text{autofunción}}$$

¿Cómo podemos <u>probar</u> que las exponenciales son autofunciones? ➔ Convolución

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$\boxed{H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-st} dt}$$

➢ En general, si *x*(*t*) es una combinación lineal de exp. complejas:

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \rightarrow y(t) = \sum_k H(s_k) a_k e^{s_k t}$$

# Caso discreto

EQUIVALENCIA CON LA CONVOLUCION (UN SISTEMA LTI SE PUEDE REPRESENTAR ASI)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{j=0}^{M} b_j x[n-j]$$

con condiciones iniciales

$$y[-1] = y[-2] = y[-3] = \ldots = y[-N] = 0$$

a veces se escribe así tambien

$$y[n] = -\frac{1}{a_0} \boxed{\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]} + \frac{1}{a_0} \sum_{j=0}^{M} b_j x[n-j]$$

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \ldots + a_N y[n-N] = \sum_{j=0}^{M} b_j x[n-j]$$

# Ecuación homogénea asociada

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0$$

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + ... + a_N y[n-N] = 0$$

---

$$a_0 + a_1 z^{-1} + ... + a_N z^{-N} = 0$$

$$\boxed{a_0 z^N + a_1 z^{N-1} + ... + a_N = 0}$$

$$\Big\downarrow \text{ ceros}$$

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_N$$

# Solución libre

- Consideramos N raíces/ceros diferentes reales o complejas (multiplicidad 1)

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_N$$

- La solución (libre) será

$$\boxed{y[n] = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + ... + c_N\lambda_N^n}$$

- donde las constantes $c_1, c_2, \ldots c_N$

se hallan usando las condiciones iniciales.

# Solución libre con cond. Iniciales nulas

- Además nótese que, por lo dicho anteriormente,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0$$

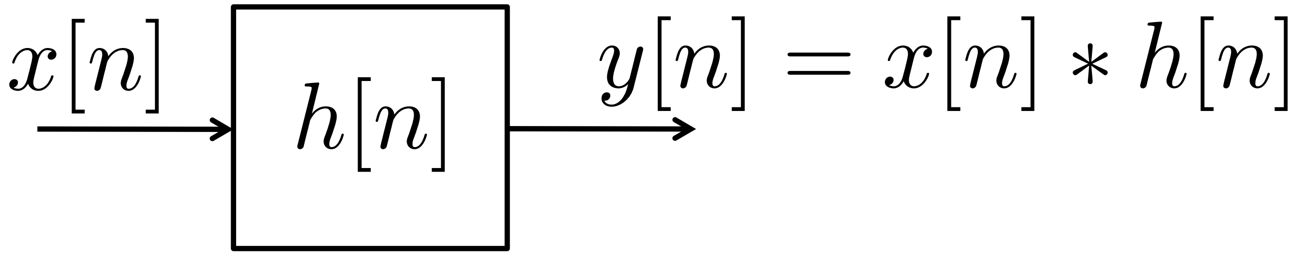
- con todas las condiciones iniciales nulas

$$y[-1] = y[-2] = y[-3] = ... = y[-N] = 0$$

- <u>SERÁ SIEMPRE LA SOLUCIÓN NULA</u> $\boxed{y_0[n] = 0}$

# Consecuencia

- Lo que nosotros expresamos como convolución,




es la respuesta FORZADA/PARTICULAR

$$\boxed{y[n] = y_p[n] = \sum_{k=1}^{N} x[n]h[n-k]}$$

$$\boxed{y_0[n] = 0}$$

# Respuesta al impulso= h[n]

- Desde la convolución es facil ver que la respuesta al impulso es h[n].

- Desde la ecuación diferencial, tenemos:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{j=0}^{M} b_j \delta[n-j]$$

- Con condiciones inicial todas nulas:

$$y[-1] = y[-2] = y[-3] = ... = y[-N] = 0$$

# Primer paso: Sistema sin deltas desplazadas

- Consideremos el sistema simplificado

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \delta[n]$$

- Con condiciones inicial todas nulas:

$$y[-1] = y[-2] = y[-3] = ... = y[-N] = 0$$

- buscamos la SOLUCION PARTICULAR $\boxed{y_p[n]}$ DE ESTE PROBLEMA, porque sabemos que:

$$\boxed{y_0[n] = 0}$$

# Primer paso: Sistema sin derivadas de la delta

- Por definición de delta, tenemos la tentación de estudiar el sistema homogéneo

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0$$

- Siendo las condiciones iniciales nulas, la solución seria nula

$$y[n] = 0$$

- … algo no va bien! El problema es que entre

$$n = 0^-, n = 0^+$$

la delta no es nula! Que podemos hacer?

# Primer paso: Sistema sin derivadas de la delta

- Método: se considera en sistema homogéneo

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0$$

- pero con las siguientes condiciones

$$\boxed{y[0] = \frac{1}{a_0}}$$

$$y[-1] = y[-2] = y[-3] = ... = y[-N+1] = 0$$

- Hemos quitado la condición inicial sobre ➔ $y[-N]$

Pero realmente esta! Mirad después!

# Primer paso: Sistema sin derivadas de la delta

- Esto se puede entender porque $\delta[0] = 1$, entonces

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[0-k] = 1$$

$$a_0 y[0] + \cancel{a_1 y[-1]} + \cancel{a_2 y[-2]} + \ldots + \cancel{a_N y[-N]} = 1$$

$$a_0 y[0] = 1 \Longrightarrow y[0] = \frac{1}{a_0}$$

# Solución parcial y completa

- Resolviendo el sistema anterior obtenemos una solución que llamaremos

$$\boxed{\widetilde{y}[n]}$$

- Y la solución del sistema completo?

$$\boxed{y_p[n] = \sum_{j=0}^{M} b_j \widetilde{y}[n-j]}$$

$$h[n] = y_p[n]$$

# Ejemplo

- Queremos resolver:

$$2y[n] + 3y[n-1] + y[n-2] = \delta[n] + 2\delta[n-1]$$

con cond. Iniciales nulas

# Ejemplo

$$2 + 3z^{-1} + z^{-2} = 0$$

$$2z^2 + 3z + 1 = 0$$

$$z = -1 \qquad\qquad z = -\frac{1}{2}$$

$$y_o[n] = A(-1)^n + B\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

# Ejemplo

$$y_o[n] = A(-1)^n + B\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$y_o[0] = \frac{1}{2} \qquad y_o[-1] = 0$$

$$A + B = \frac{1}{2} \qquad A = 1$$

$$-A - 2B = 0 \qquad B = -\frac{1}{2}$$

$$\widetilde{y}[n] = y_o[n] = (-1)^n - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

# Solución completa

$$\widetilde{y}[n] = y_o[n] = (-1)^n - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$h(t) = \widetilde{y}[n] + 2\widetilde{y}[n-1]$$

$$h[n] = (-1)^n - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2(-1)^{n-1} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Se puede llegar al mismo resultado usando la transformada Zeta

# Transformada Zeta de h[n] como auto-valor

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

$$x[n] = z^n \Longrightarrow \quad y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{n-k}$$

$$\boxed{z = re^{j\omega}}$$

$$y[n] = \boxed{\left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k} \right)} z^n$$

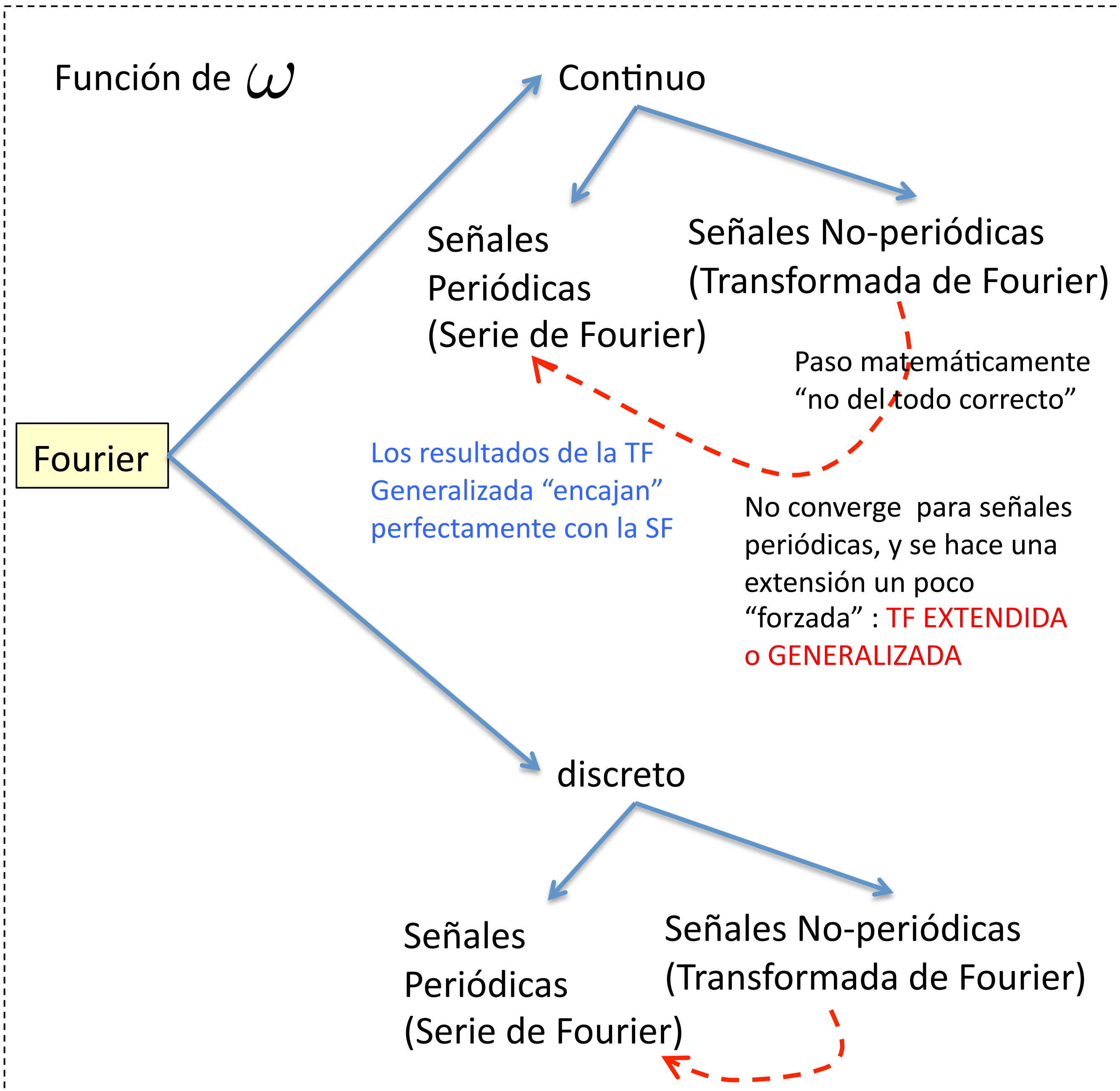
$$y[n] = \boxed{H(z)} z^n$$

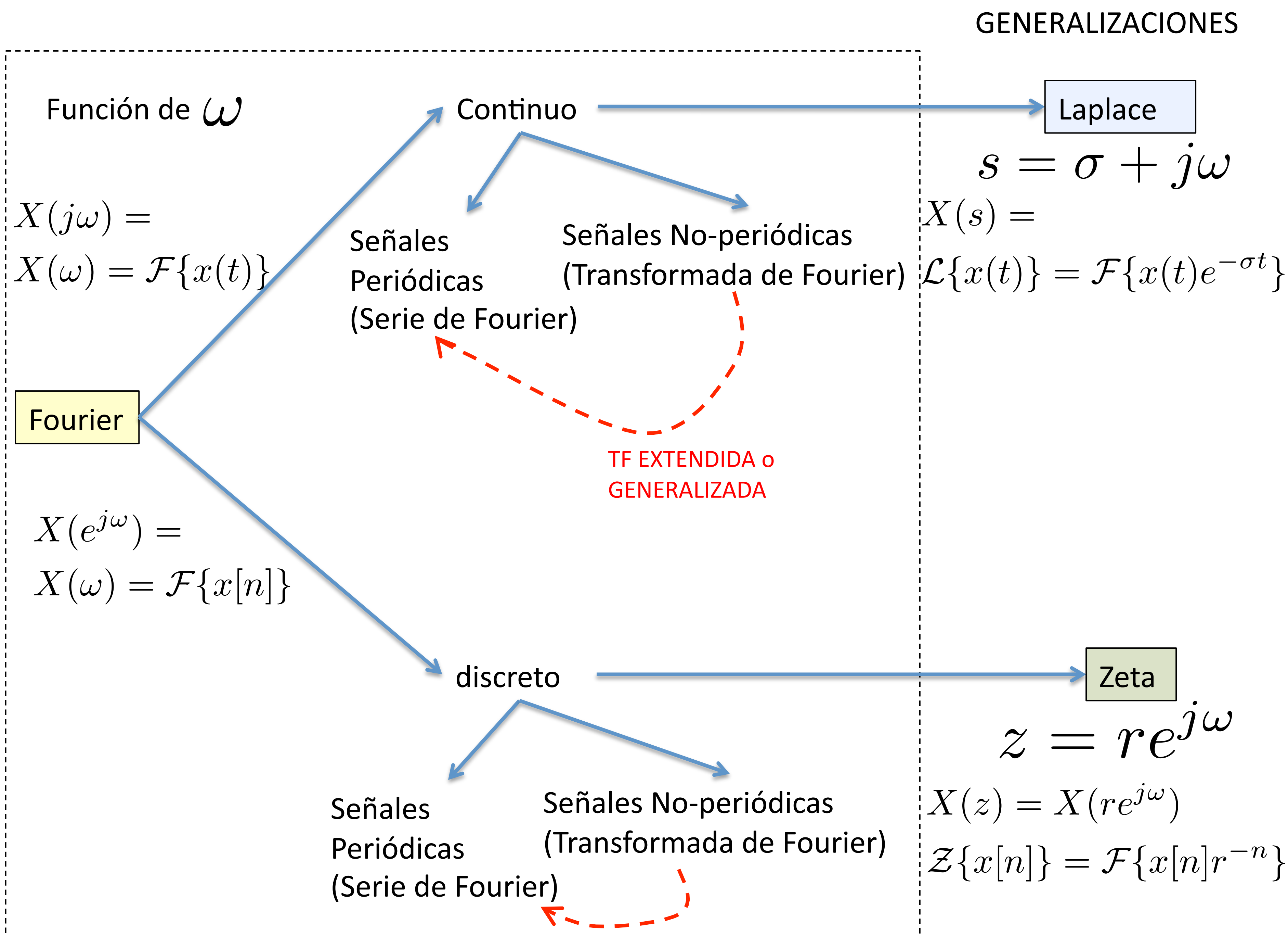
# Dominio transformado

- HASTA AHORA: DOMINIO TEMPORAL (convolución, ecuaciones diferenciales, ecuaciones a las diferencias)

- DOMINIO TRASFORMADO: ESTUDIO DE LOS AUTOVALORES DE LOS SISTEMAS LTI

- Útil para:
  - Estudiar comportamiento del sistema
  - Resolver una convolución de una forma fácil
  - Resolver ecuaciones diferenciales, ecuaciones a las diferencias de una forma fácil
  - Etc.


Función de $\omega$
Fourier
Continuo
Señales Periódicas (Serie de Fourier)
Señales No-periódicas (Transformada de Fourier)
Paso matemáticamente "no del todo correcto"
Los resultados de la TF Generalizada "encajan" perfectamente con la SF
No converge para señales periódicas, y se hace una extensión un poco "forzada" : TF EXTENDIDA o GENERALIZADA
discreto
Señales Periódicas (Serie de Fourier)
Señales No-periódicas (Transformada de Fourier)


GENERALIZACIONES
Función de $\omega$
Continuo
Laplace
$s = \sigma + j\omega$
$X(j\omega) =$
$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$
Señales Periódicas (Serie de Fourier)
Señales No-periódicas (Transformada de Fourier)
$X(s) =$
$\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}$
Fourier
TF EXTENDIDA o GENERALIZADA
$X(e^{j\omega}) =$
$X(\omega) = \mathcal{F}\{x[n]\}$
discreto
Zeta
$z = re^{j\omega}$
Señales Periódicas (Serie de Fourier)
Señales No-periódicas (Transformada de Fourier)
$X(z) = X(re^{j\omega})$
$\mathcal{Z}\{x[n]\} = \mathcal{F}\{x[n]r^{-n}\}$