Kalman Extendido – Práctica 2

Luca Martino y

Francisco Rodríguez Ruiz

Apuntes-Laboratorio

no revisados (cuidado!!!)

Modelo

- Consideramos las ecuaciones

$$x_t = Fx_{t-1} + w_t \qquad\qquad w_t \sim N(0,Q)$$
$$y_t = Hx_t + v_t \qquad\qquad v_t \sim N(0,R)$$

- Observamos las y_t . Estamos interesado en calcular la media de la probabilidad a posteriori

$$p(x_t \mid y_1, y_2, \ldots, y_t)$$

Que en nuestro caso, es también Gaussiana.

- El filtro de Kalman es un método secuencial para hallar la media y la varianza de la probabilidad a posteriori en cada paso.

Filtro de Kalman

- Ecuaciones recursivas del filtro de Kalman
- Predicción

$$\hat{x}_t = F\tilde{x}_{t-1}$$

$$\hat{P}_t = F\tilde{P}_{t-1}F^T + Q$$

- Actualización

$$z_t = y_t - H\hat{x}_t$$

$$S_t = H\hat{P}_t H^T + R$$

$$K_t = \hat{P}_t H^T S_t^{-1}$$

Nos interesa esto! Es nuestra estimación

$$\tilde{x}_t = \hat{x}_t + K_t z_t$$

Media posterior

$$\tilde{P}_t = (I - K_t H)\hat{P}_t$$

Varianza posterior

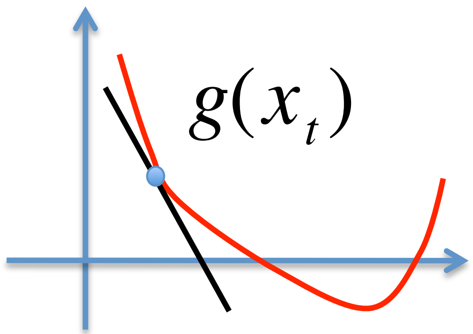
En la práctica 2

- Pero nosotros tenemos un sistema no lineal

$$x_t = Fx_{t-1} + w_t$$
$$y_t = g(x_t) + v_t$$

- Entonces nosotros vamos a utilizar el filtro de Kalman con un sistema lineal

$$x_t = Fx_{t-1} + w_t$$
$$y_t \approx g(\hat{x}_t) + J_{\hat{x}_t}(x_t - \hat{x}_t) + v_t$$



En la práctica 2

- Además si lo escribimos así

$$x_t = F x_{t-1} + w_t$$
$$y_t - g(\hat{x}_t) + J_{\hat{x}_t} \hat{x}_t \approx J_{\hat{x}_t} x_t + v_t$$

- Tiene la misma forma de

$$x_t = F x_{t-1} + w_t$$
$$y_t = H x_t + v_t$$

- Así que podríamos utilizar las ecuaciones del filtro escritas antes.

En la práctica 2

- En nuestro caso tenemos

$$F = 1$$

O Mejor dicho, una matriz identidad

- Luego siendo la segunda ecuación no lineal, H será el Jacobiano evaluado en $\hat{x}_t$

$$\boldsymbol{H = J_{\hat{x}_t}}$$

- Y las observaciones a utilizar en el filtro de Kalman serían

$$y_t - g(\hat{x}_t) + J_{\hat{x}_t}\hat{x}_t$$

- Pero se pueden modificar un poco las formulas… como enseñamos en la siguiente diapositiva.

ALTERNATIVA-En la práctica 2

- de todas formas las ecuaciones pueden ser ligeramente modificadas con una pequeña variación...

$$\hat{x}_t = F\tilde{x}_{t-1}$$
$$\hat{P}_t = F\tilde{P}_{t-1}F^T + Q$$

$$z_t = y_t - g(\hat{x}_t) + J_{\hat{x}_t}\hat{x}_t$$
$$S_t = H\hat{P}_t H^T + R$$
$$K_t = \hat{P}_t H^T S_t^{-1}$$
$$\tilde{x}_t = \hat{x}_t + K_t z_t$$
$$\tilde{P}_t = (I - K_t H)\hat{P}_t$$

$$F = 1$$
$$H = J_{\hat{x}_t}$$

En la práctica 2

- Si consideramos las posiciones de los sensores como una matriz

$$B \rightarrow 2 \times 5$$

- Tenemos también

$$Q \rightarrow \text{diagonal } 2 \times 2$$

$$R \rightarrow \text{diagonal } 5 \times 5$$

$$H = J_{\hat{x}_t} \rightarrow 5 \times 2$$

$$y_t \rightarrow \text{para cada instante de tiempo tenemos 5 observaciones}$$

$$y_t \rightarrow \text{para cada instante de tiempo } 5 \times 1$$

En la práctica 2

- Como consecuencia tenemos

$$\hat{x}_t \rightarrow \text{para cada instante de tiempo } 2 \times 1$$

$$\tilde{x}_t \rightarrow \text{para cada instante de tiempo } 2 \times 1$$

$$z_t \rightarrow 5 \times 1$$

$$\hat{P}_t \rightarrow 2 \times 2$$

$$\tilde{P}_t \rightarrow 2 \times 2$$

$$S_t \rightarrow 5 \times 5$$

$$K_t \rightarrow 2 \times 5$$