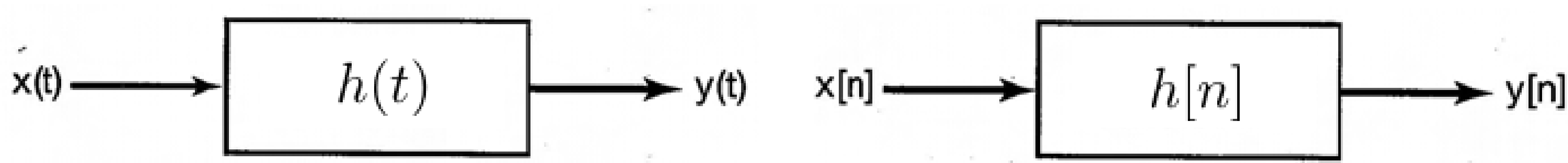
Transformada de Laplace

Sistemas LTI: convolución



- Primera forma de expresar la salida en función de la entrada: <u>con la convolución</u>

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

Sistemas LTI, Tiempo Continuo (TC)

- De forma equivalente se pueden expresar con ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}}$$

- La equivalencia perfecta se da cuando las condiciones iniciales son todas nulas:

$$y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \ldots = \frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}} = 0.$$

En general $\boxed{t_0 = 0}$

Caso discreto

EQUIVALENCIA CON LA CONVOLUCION (UN SISTEMA LTI SE PUEDE REPRESENTAR ASI)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{j=0}^{M} b_j x[n-j]$$

con condiciones iniciales

$$y[-1] = y[-2] = y[-3] = ... = y[-N] = 0$$

a veces se escribe así tambien

$$y[n] = -\frac{1}{a_0} \boxed{\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]} + \frac{1}{a_0} \sum_{j=0}^{M} b_j x[n-j]$$

$$a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + \ldots + a_N y[n-N] = \sum_{j=0}^{M} b_j x[n-j]$$

Resumen: en el dominio del tiempo…

PARA EXPRESAR LA SALIDA y(t), y[n] EN EL TIEMPO, tenemos:

CONVOLUCIÓN

ECUACIONES DIFERENCIALES

ECUACIONES A LAS DIFERENCIAS

Por que pasamos a un dominio “transformado”?

Transformada de Laplace de h(t) como auto-valor

Exponenciales como autofunciones de sistemas LTI

$$x(t) = e^{st} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$\boxed{s = \sigma + j\omega}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = [\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s\tau}d\tau]e^{st} = \underbrace{H(s)}_{\text{autovalor}}\underbrace{e^{st}}_{\text{autofunción}}$$

¿Cómo podemos <u>probar</u> que las exponenciales son autofunciones? ➔ Convolución

$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$\boxed{H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt}$$

- En general, si *x*(*t*) es una combinación lineal de exp. complejas:

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \rightarrow y(t) = \sum_k H(s_k) a_k e^{s_k t}$$

Transformada de Laplace (TL) **“bilatera”**

$$\boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt}$$

$$\boxed{s = \sigma + j\omega}$$

$$\text{If } \sigma = 0 \Longrightarrow \text{TL=TF !!}$$

$$\boxed{\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}}$$

Transformada de Laplace (TL) “bilatera”

Formula de Análisis

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt$$

$$s = \sigma + jw$$

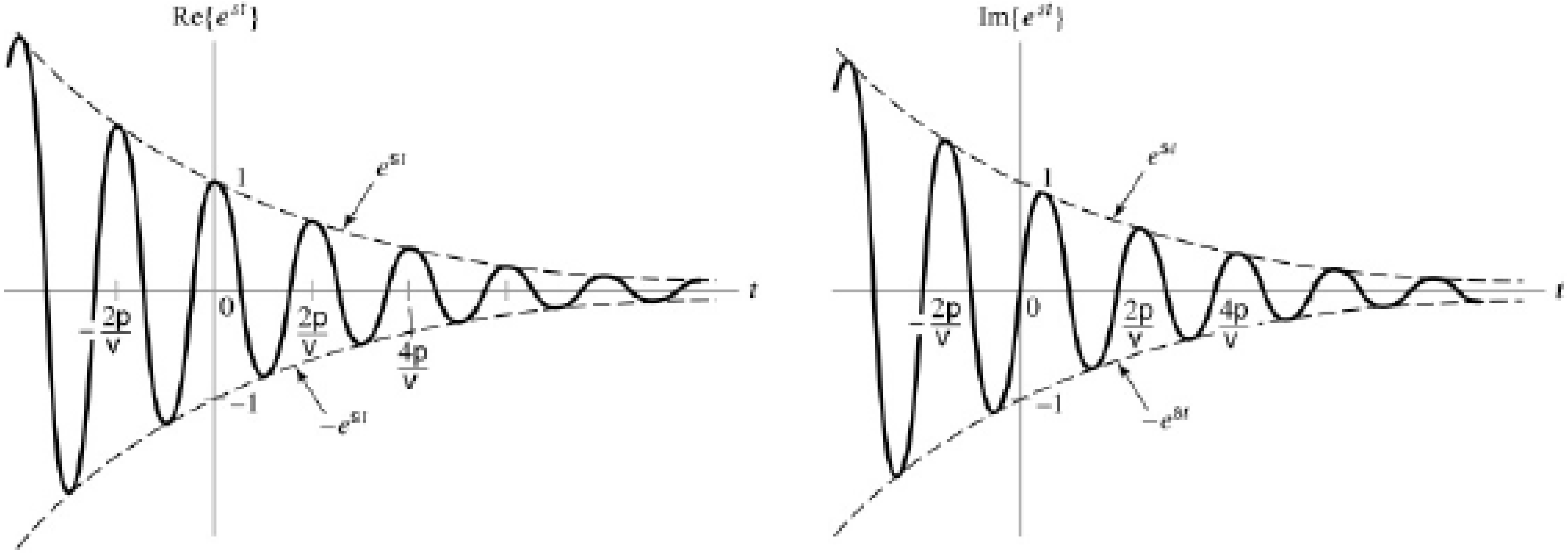
$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{F}\{x(t) e^{-\sigma t}\}$$

Es una extensión de Fourier: la Transformada de Laplace puede existir para ciertos valores de \sigma aunque la transformada de Fourier no existe.

6.2 La transformada de Laplace

$$s = \sigma + j\omega$$

$$e^{st} = e^{\sigma t} e^{j\omega t} = e^{\sigma t}\cos(\omega t) + j e^{\sigma t} sen(\omega t)$$



$\sigma =$ Factor de amortiguamiento exponencial < 0

$\omega =$ Frecuencia del coseno y seno

Transformada de Laplace (TL) **“unilatera”**

$$\boxed{s = \sigma + j\omega}$$

$$\boxed{X(s) = \int_{0}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt}$$

La integral es de cero a infinito. Hay algunas razones para considerar (a veces) esta definición:

1) Una de ellas es que esta definición vale solo para señales x(t) causales (que se desarrollan de cero en adelante...).

2) Hay otra razón que tiene que ser con las derivadas de x(t) y las ecuaciones diferenciales (la veremos mas en adelante).

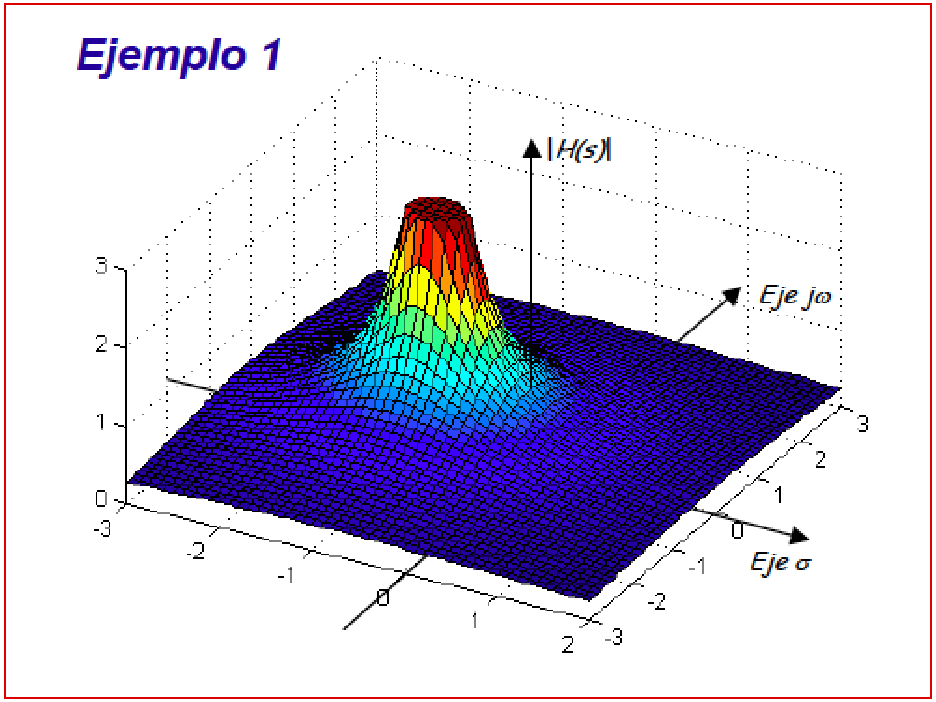
Luego vamos a explicar porque el primer punto es interesante.

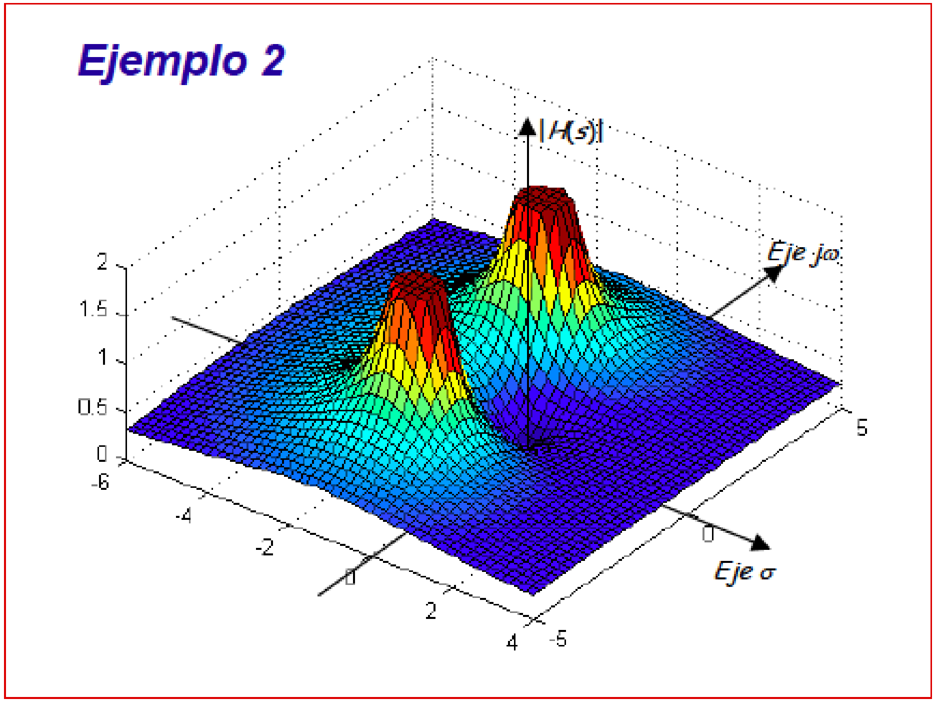
La T. de Laplace es algo bidimensional

$$\boxed{s = \sigma + j\omega}$$

$$\boxed{X(s)}$$

Es algo dimensional respecto a s y es una función a valores complejos;
Ejemplo de MODULOS de TL:





Ejemplo y Región de convergencia de Laplace (Region of Convergence- ROC)

$$x(t) = e^{-at}u(t) \qquad a \in \mathbb{R}$$

Vamos a considerar la bilatera:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+s)t}dt = \left[-\frac{1}{a+s}e^{-(a+s)t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a+s}$$

Solo si $a + \sigma > 0$!!!

Ejemplo y Región de convergencia de Laplace (Region of Convergence- ROC)

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

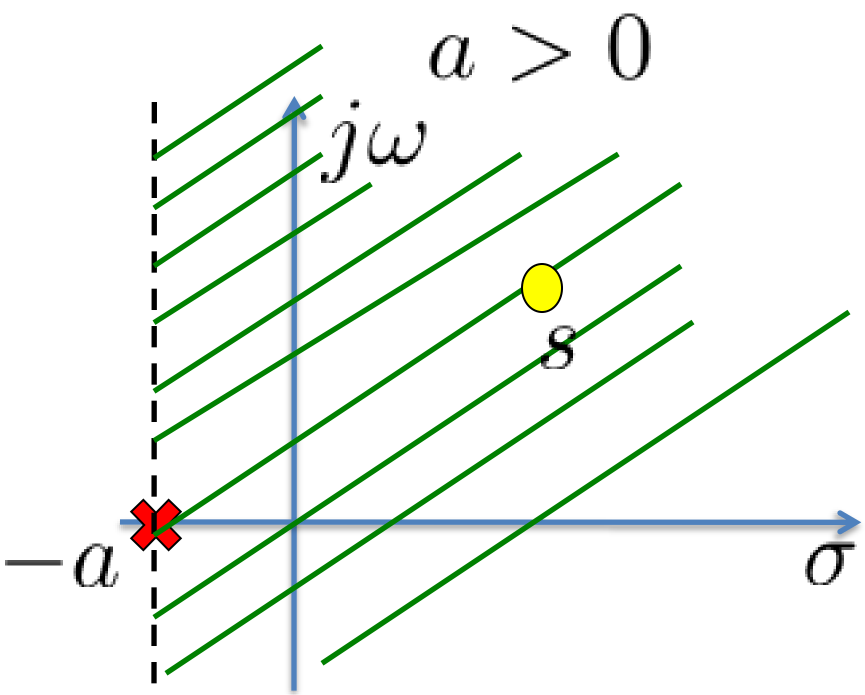
$$\boxed{X(s) = \frac{1}{s+a} \qquad \sigma > -a}$$

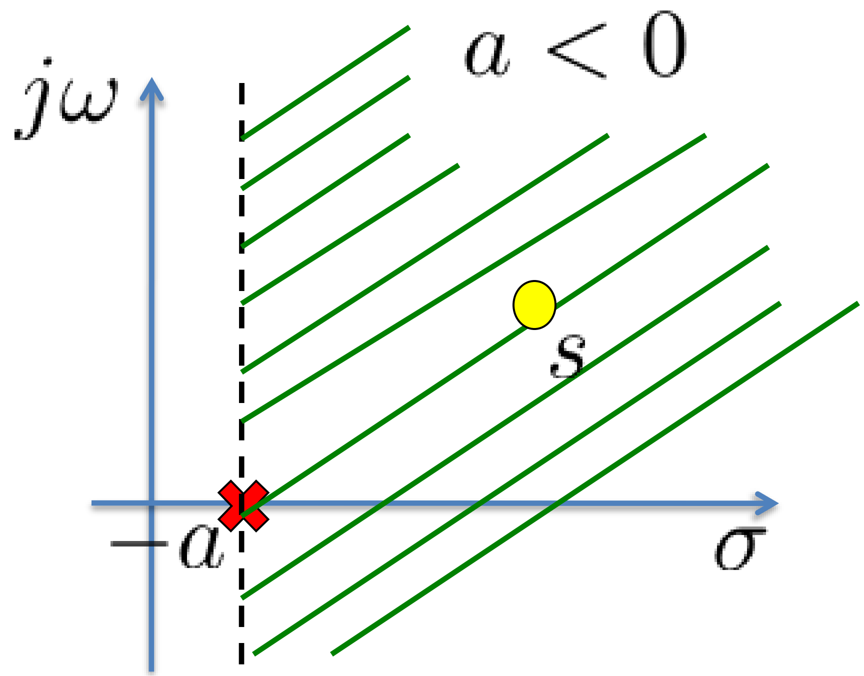
$$X(s) \to \infty \qquad \sigma \leq -a$$

Ejemplo y Región de convergencia de Laplace (Region of Convergence- ROC)

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

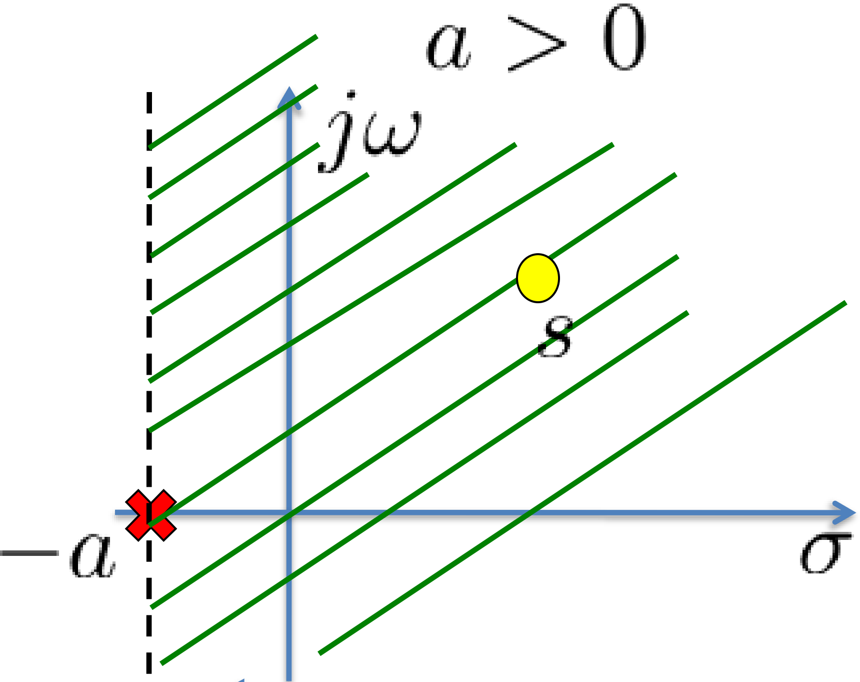
$$\boxed{X(s) = \frac{1}{s+a} \quad \sigma > -a}$$

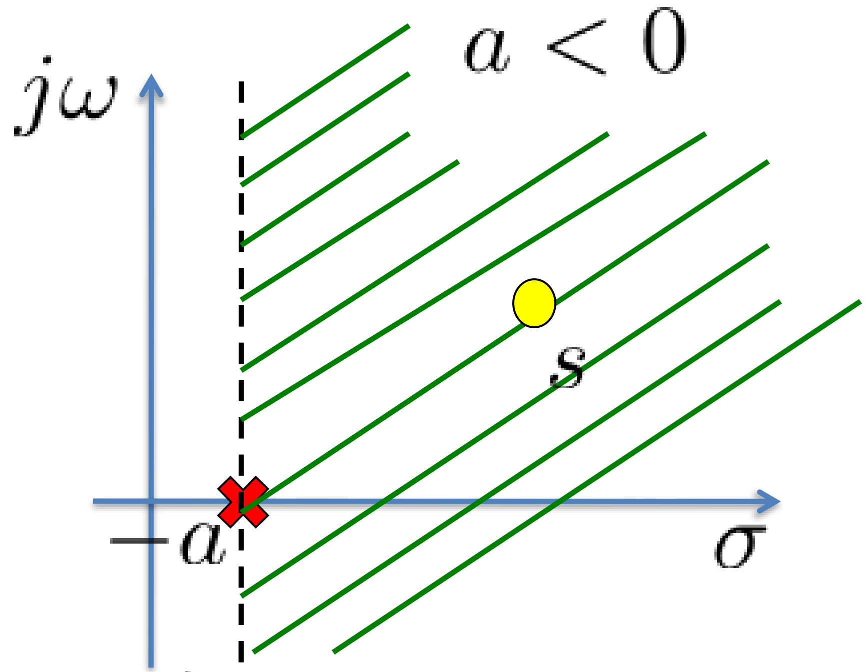




Para cada s en esta región existe X(s) y vale 1/(s+a)

Ejemplo y Región de convergencia de Laplace (Region of Convergence- ROC)





Para cada s en esta región existe X(s) y vale 1/(s+a)

EXISTE LA TRANSFORMADA DE FOURIER !!!

NO EXISTE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

Ejemplos ROC

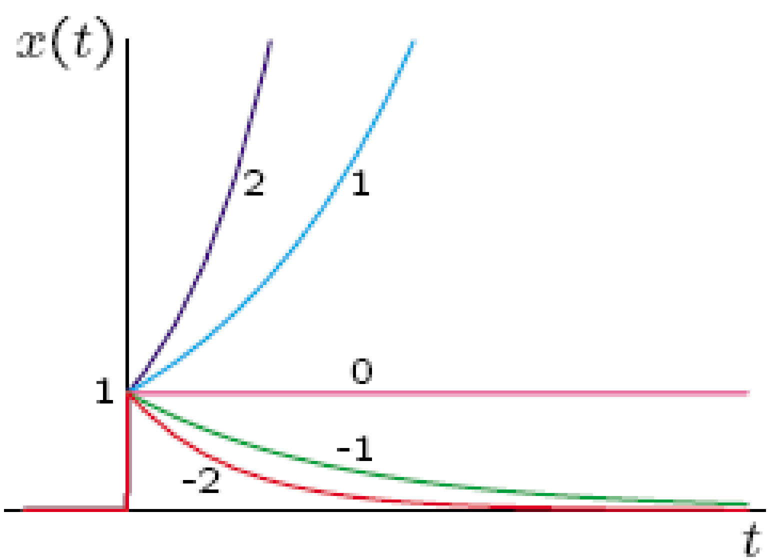
Consider the causal exponential time function and its Laplace transform

Doble flecha en el caso de la unilatera….

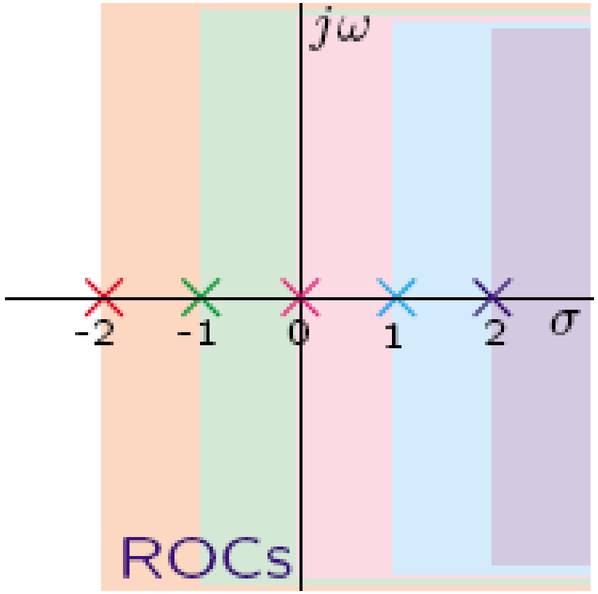
$$x(t) = e^{\alpha t}u(t) \overset{\mathcal{L}}{\Longleftrightarrow} X(s) = \frac{1}{s-\alpha} \text{ for } \sigma > \alpha$$

The following shows both the time functions and the pole-zero diagrams for 5 different values of α.

Time functions



Pole-zero diagrams



Ejemplo y Región de convergencia de Laplace (Region of Convergence- ROC)

$$x(t) = -e^{-at}u(-t) \qquad a \in \mathbb{R}$$

Vamos a considerar la bilatera:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{-at}u(-t)e^{-st}dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-(a+s)t}dt = -\left[\frac{-1}{s+a}e^{-(a+s)t}\right]_{-\infty}^{0}$$

$$= \frac{1}{s+a}$$

Solo si $a + \sigma < 0$!!!

Ejemplo y Región de convergencia de Laplace (Region of Convergence- ROC)

$$x(t) = -e^{-at}u(-t)$$

$$\boxed{X(s) = \frac{1}{s+a} \quad \sigma < -a}$$

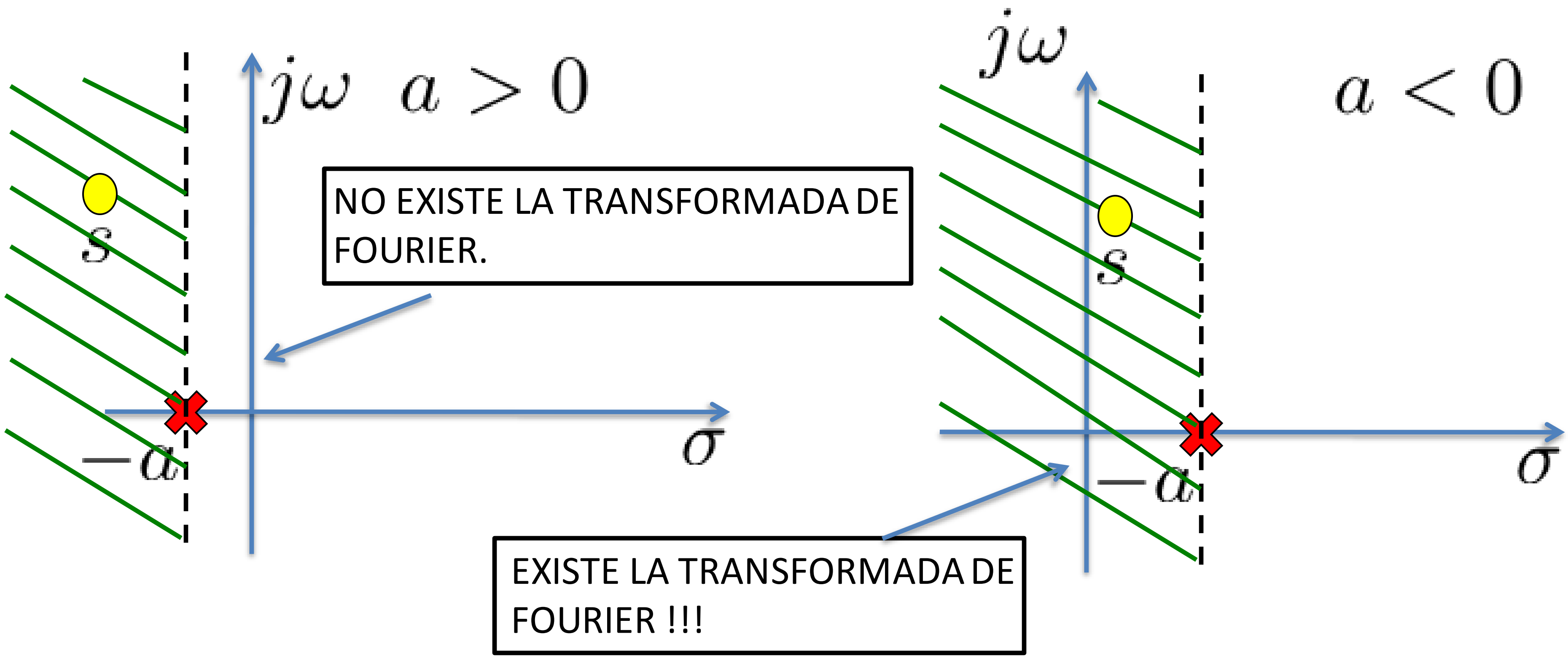
$$\boxed{X(s) \to \infty \quad \sigma > -a}$$

Ejemplo y Región de convergencia de Laplace (Region of Convergence- ROC)

$$x(t) = -e^{-at}u(-t)$$

$$\boxed{X(s) = \frac{1}{s+a} \quad \sigma < -a}$$

Para cada s en esta región existe X(s) y vale 1/(s+a)



Resumen (hasta ahora)

$$x(t) = e^{-at}u(t) \Rightarrow \boxed{X(s) = \frac{1}{s+a} \quad \sigma > -a}$$

$$x(t) = -e^{-at}u(-t) \Rightarrow \boxed{X(s) = \frac{1}{s+a} \quad \sigma < -a}$$

Tienen misma transformada! Pero diferentes ROC!

$$x(t) = e^{-at}u(t)$$

$$x(t) = -e^{-at}u(-t)$$

$$X(s) = \frac{1}{s+a}$$

Resumen (hasta ahora)

- Es decir, con la relación entre la TL <u>bilatera</u> X(s) y la no tenemos una relación biunívoca con x(t).

- Necesitamos la información de la ROC, también.

Con la TL unilatera….

$$\boxed{X(s) = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st}dt}$$

$$x(t) = e^{-at}u(t) \longrightarrow X(s) = \frac{1}{s+a}$$

$$x(t) \cancel{= -e^{-at}u}(-t)$$

- Esta definición tiene sentido solo para señales causales.
- Tenemos una relación biunívoca.

Otro Ejemplo

$$a \in \mathbb{R}$$

$$x(t) = e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$$

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{at}u(-t)e^{-st}dt \\ &= \int_{0}^{+\infty} e^{-at}e^{-st}dt + \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-st}dt \\ &= \underbrace{\frac{1}{s+a}}_{\sigma > -a} - \underbrace{\frac{1}{s-a}}_{\sigma < a} = \frac{-2a}{s^2 - a^2} \end{aligned}$$

$$a \leq 0$$

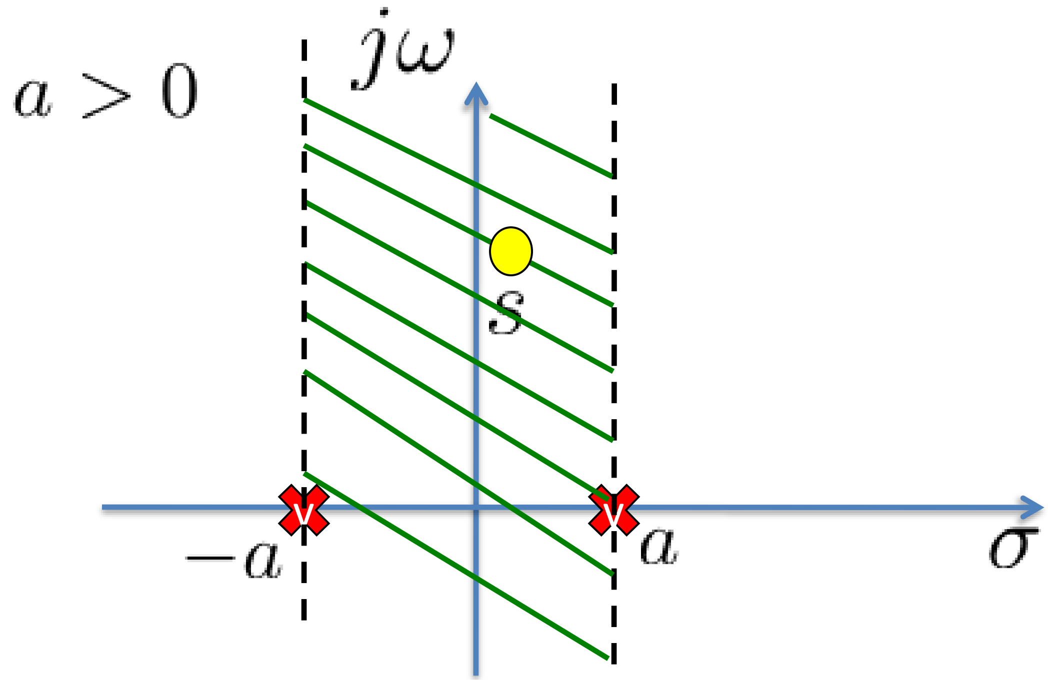
$$\Downarrow$$

$$X(s) = \text{no existe}$$

$$a > 0 \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} X(s) = \dfrac{-2a}{s^2 - a^2} \\ \text{ROC:} -a < \sigma < a \end{array}}$$

Ejemplo

$$x(t) = e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$$



Y con a>0 existe también TF

$$a > 0 \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} X(s) = \dfrac{-2a}{s^2 - a^2} \\ \text{ROC:} -a < \sigma < a \end{array}}$$

Polos y ceros

- **POLOS:** todos los valores de *s* tal que

$$X(s) \rightarrow \infty$$

- **Ceros:** todos los valores de *s* tal que

$$X(s) = 0$$

- la ROC no contiene polos.

Algunas Propiedades

- la ROC no contiene polos.

- Si la señal x(t) es de duración finita y existe por lo menos un valor de σ (que nosotros conozcamos) para que existe la TL, entonces en realidad la TL converge en todo el plano complejo (es decir la ROC es todo el plano).

Algunas Propiedades

- Si la señal x(t) es causal: la ROC está a la derecha de todos los polos.

- Si la señal x(t) es anti-causal: la ROC está a la izquierda de todos los polos.

- Si la señal x(t) esta formado por una parte causal y una anti-causal: la ROC es una "franja" en el piano *s, contenida entre los polos*.

Otro Ejemplo: exponencial truncado

$$\boxed{x(t) = e^{-at} \quad 0 \leq t \leq T}$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_0^T e^{-at} e^{-st} dt$$

$$= \int_0^T e^{-(a+s)t} dt = \left[\frac{-e^{-(a+s)t}}{s+a} \right]_0^T,$$

$$\boxed{X(s) = \frac{1}{s+a} \left(1 - e^{-(a+s)T} \right)}$$

Exponencial truncado

$$x(t) = e^{-at} \quad 0 \leq t \leq T$$

$$X(s) = \frac{1}{s+a}\left(1 - e^{-(a+s)T}\right)$$

POLOS: $s = -a$

CEROS:

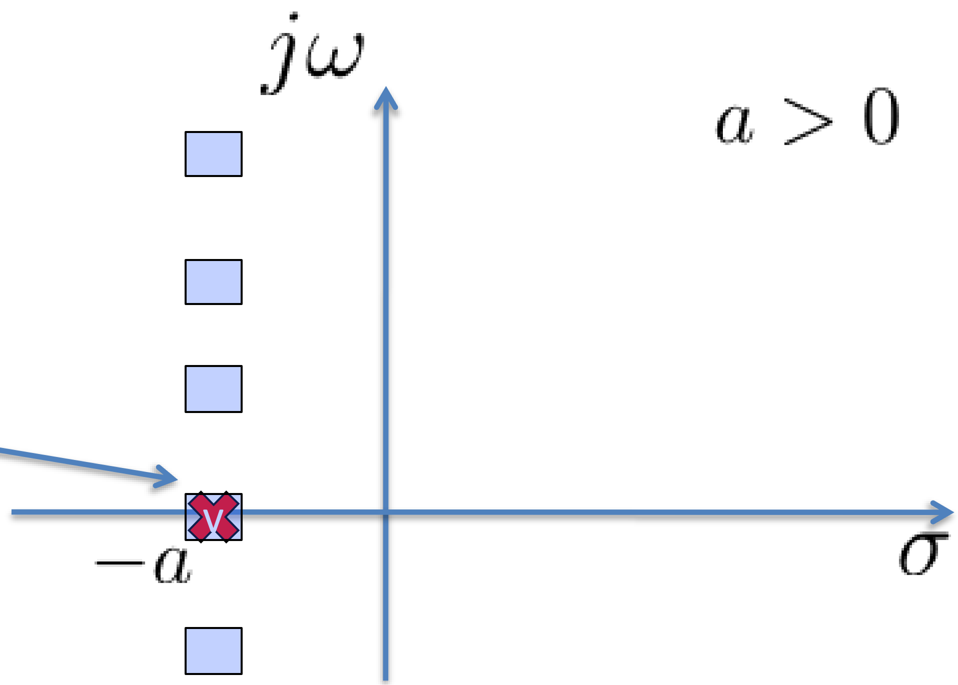
$$e^{-(s+a)T} = 1 \rightarrow (s+a)T = j2\pi k$$

$$s = -a + j\frac{2\pi k}{T} \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$$

Exponencial truncado

POLOS: $\boxed{s = -a}$

CEROS: $\boxed{s = -a + j\frac{2\pi k}{T}}$ $k = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$



$a > 0$

Un cero (k=0) se va con el polo (se eliminan)…. entonces no hay polos !!

ROC: TODO EL PLANO !!!

Anti-transformada de Laplace

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{u \to \infty} \oint_{\gamma - ju}^{\gamma + ju} X(s) e^{st} ds$$

- Donde γ esta contenido en la ROC.

- en general, vamos usar otros métodos para invertir X(s) y obtener x(t).

Fracciones simples para anti-transformar

EXPRESARAMOS LA TRANSFORMADA
DE LAPLACE COMO SUMA DE
FRACCIONES……

<u>Polos reales:</u>

polos d_k distintos, $X(S)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{s-d_k}$; $\boxed{A_k e^{d_k t}u(t)\xleftrightarrow{L_u}\frac{A_k}{s-d_k}}$

polo d_i multiplicidad r, $\frac{A_{i_1}}{s-d_i},\frac{A_{i_2}}{(s-d_i)^2},\ldots,\frac{A_{i_r}}{(s-d_i)^r}$

$$\boxed{\frac{At^{n-1}}{(n-1)!}e^{d_k t}u(t)\xleftrightarrow{L_u}\frac{A}{(s-d_i)^n}}$$

"Doble flecha", porque se
refiere a la unilatera…

Fracciones simples para anti-transformar

<u>Polos complejos</u>

Si los coeficientes en el polinomio del denominador son reales, los polos complejos se presentan en pares conjugados complejos.

$$polos\ conjugados\ complejos: \quad \alpha + j\omega_0 \quad , \quad \alpha - j\omega_0$$

$$\cancel{\frac{A_1}{s-\alpha-j\omega_0}+\frac{A_1}{s-\alpha+j\omega_0}} = \frac{B_1 s + B_2}{(s-\alpha-j\omega_0)(s-\alpha+j\omega_0)} = \frac{B_1 s + B_2}{(s-\alpha)^2+\omega_0{}^2} =$$

$$= \boxed{\frac{C_1(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\omega_0{}^2}+\frac{C_2\omega_0{}^2}{(s-\alpha)^2+\omega_0{}^2}} \quad ; \quad C_1 = B_1 \quad ; \quad C_2 = \frac{B_1\alpha + B_2}{\omega_0{}^2}$$

$$C_1 e^{\alpha t}\cos(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{L_u} \frac{C_1(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\omega_0{}^2}$$

$$C_2 e^{\alpha t} sen(\omega_0 t)u(t) \xleftrightarrow{L_u} \frac{C_2\omega_0{}^2}{(s-\alpha)^2+\omega_0{}^2}$$

Propiedades – (Bilatera)

Property	$x(t)$	$X(s)$
Linearity	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$
Delay by T	$x(t-T)$	$X(s)e^{-sT}$
Multiply by t	$tx(t)$	$-\frac{dX(s)}{ds}$
Multiply by $e^{-\alpha t}$	$x(t)e^{-\alpha t}$	$X(s+\alpha)$
Differentiate in t	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$
Integrate in t	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$	$\frac{X(s)}{s}$
Convolve in t	$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)\, d\tau$	$X_1(s)X_2(s)$

Propiedades: derivada

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = \left[x(t)e^{-st}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \left[-s\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt\right]$$

0

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = s\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}dt$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = sX(s)}$$

Propiedades: derivada (**TL UNILATERA**)

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = \underbrace{[x(t)e^{-st}]_0^{+\infty}}_{-x(0)} - \left[-s \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt \right]$$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = sX(s) - x(0)}$$

IMPORTANTE CUANDO SE USAN CONDICIONES INICIALES (no nulas)... en las ecuaciones diferenciales !

Propiedades (mas generales)

$$t^k x(t) \Longleftrightarrow (-1)^k \frac{d^k X(s)}{ds^k}$$

$$\frac{d^k x(t)}{dt^k} \Longleftrightarrow s^k X(s)$$

Bilatera

$$\frac{d^k x(t)}{dt^k} \Longleftrightarrow s^k X(s) - s^{k-1}x(0) - s^{k-2}x^{(1)}(0) - s^{k-3}x^{(2)}(0) + \\ \ldots - s x^{(k-2)}(0) - x^{(k-1)}(0)$$

Unilatera

$$x^{(k)}(0) = \left. \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right|_{t=0}$$

Propiedades (mas generales)

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \Longleftrightarrow s^2X(s)$$ **Bilatera**

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \Longleftrightarrow s^2X(s) - sx(0) - x^{(1)}(0)$$ **Unilatera**

$$x^{(1)}(0) = \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0}$$

Recordar que ya habíamos visto:

$$\frac{dx(t)}{dt} \Longleftrightarrow sX(s) - x(0)$$ **Unilatera**

Propiedades (Unilatera)

6.3 La transformada de Laplace unilateral.

$$X(s)=\int_{0^+}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \quad ; \quad x(t) \xleftrightarrow{L_u} X(s)$$

$$e^{at}u(t) \xleftrightarrow{L_u} \frac{1}{s-a} \quad ; \quad e^{at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s-a} \quad ROC \quad \mathrm{Re}(s)>a$$

PROPIEDADES $\quad x(t) \xleftrightarrow{L_u} X(s) \quad ; \quad y(t) \xleftrightarrow{L_u} Y(s)$

Linealidad $\quad ax(t)+by(t) \xleftrightarrow{L_u} aX(s)+bY(s)$

Escalamiento $\quad x(at) \xleftrightarrow{L_u} \frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right)$

Corrimiento en el tiempo $\quad x(t-\tau) \xleftrightarrow{L_u} e^{-s\tau}X(s)$

$$\forall\, \tau \mid x(t-\tau)u(t) = x(t-\tau)u(t-\tau)$$

Propiedades (Unilatera)

PROPIEDADES (cont.)

6.3 a

Corrimiento en el dominio s $e^{s_0 t}x(t) \xleftrightarrow{L_u} X(s-s_0)$

Convolución $x(t) * y(t) \xleftrightarrow{L_u} X(s)Y(s)$

Diferenciación en el dominio de s $-tx(t) \xleftrightarrow{L_u} \frac{d}{ds}X(s)$

Diferenciación en el dominio del tiempo $\frac{d}{dt}x(t) \xleftrightarrow{L_u} sX(s)-x(0^+)$

$$\frac{d^n}{dt^n}x(t) \xleftrightarrow{L_u} s^n X(s)-\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}x(t)\big|_{t=0^+}-\ldots-s^{n-2}\frac{d}{dt}x(t)\big|_{t=0^+}-s^{n-1}x(0^+)$$

Integración $\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{L_u} \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^+} x(\tau)d\tau+\frac{X(s)}{s}$

Teorema valor inicial $\lim_{s\to\infty} sX(s)=x(0^+)$

Teorema valor final $\lim_{s\to 0} sX(s)=x(\infty)$ solo si Re(polos)<0

Valen tambien para la Bilatera

Ejemplo Transformadas

$$te^{-at}u(t) \Longrightarrow \frac{1}{(s-a)^2}$$

Cual es la ROC?

$$\boxed{\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{-at}u(t) \Longrightarrow \frac{1}{(s-a)^k}}$$

Se pueden demostrar usando una de las propiedades anteriores

$$\boxed{u(t) \Longrightarrow \frac{1}{s}}$$

ROC: semi-plano positivo $\sigma > 0$

Ejemplo Transformadas

$\boxed{\delta(t) \Longrightarrow 1}$

ROC: todo el plano !!!

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-st}dt = e^{-s0} = 1$$

$\boxed{1 \Longrightarrow \text{No existe!}}$

Pensad a Fourier: por esto se necesitaba de una T. De Fourier “Generalizada” que “fuerza” la matematica….

Lo que existe es la transformada del escalón:

$\boxed{u(t) \Longrightarrow \frac{1}{s}}$

ROC: semi-plano positivo $\sigma > 0$

Ejemplo Transformadas

$$cos(\beta t) \Longrightarrow \text{No existe!}$$

$$sin(\beta t) \Longrightarrow \text{No existe!}$$

Pensad a Fourier: por esto se necesitaba de una T. De Fourier “Generalizada” que “fuerza” la matematica….

$$\boxed{cos(\beta t)u(t) \Longrightarrow \frac{s}{s^2+\beta^2}}$$

$$\boxed{sin(\beta t)u(t) \Longrightarrow \frac{\beta}{s^2+\beta^2}}$$

Incluso estas dos con la definición de T. de Fourier no existen… por esto se necesitaba de una T. De Fourier “Generalizada” que “fuerza” la matematica….

Polos imaginarios puros…. Que pasa con la ROC?

Transformadas de Laplace básicas (1)

Señal	Transformada	ROC
$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(s)e^{st}ds$	$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-st}dt$	
u(t)	$\frac{1}{s}$	Re{s}>0
t u(t)	$\frac{1}{s^2}$	Re{s}>0
$\delta(t-\tau), \tau \geq 0$	e^{-st}	$\forall\ s$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	Re{s}>-a
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	Re{s}>-a

Transformadas de Laplace básicas (2)

Señal	Transformada	ROC
$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}X(s)e^{st}ds$	$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-st}dt$	
$[\cos(\omega_1 t)]u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_1^2}$	Re{s}>0
$[sen(\omega_1 t)]u(t)$	$\frac{\omega_1}{s^2+\omega_1^2}$	Re{s}>0
$[e^{-at}\cos(\omega_1 t)]u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_1^2}$	Re{s}>-a
$[e^{-at}sen(\omega_1 t)]u(t)$	$\frac{\omega_1}{(s+a)^2+\omega_1^2}$	Re{s}>-a
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	Re{s}>0

Ecuaciones diferenciales - Sistemas LTI

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{m=0}^{M} b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m}$$

Hay que tener en cuenta las condiciones iniciales

T. LAPLACE (BILATERA):

(Si las condiciones iniciales son nulas, es lo mismo bilatera o unilatera)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y(s) = \sum_{m=0}^{M} b_m s^m X(s)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{N} a_k s^k\right) Y(s) = \left(\sum_{m=0}^{M} b_m s^m\right) X(s)$$

Ecuaciones diferenciales - Sistemas LTI

T. LAPLACE (BILATERA):

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y(s) = \sum_{m=0}^{M} b_m s^m X(s)$$

$$\left(\sum_{k=0}^{N} a_k s^k\right) Y(s) = \left(\sum_{m=0}^{M} b_m s^m\right) X(s)$$

$$\boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m s^m}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}}$$

Estabilidad de la salida de un sistema LTI

- La salida y(t) de un sistema LTI es estable (en sentido causal, es decir “mirando hacia +Inf”) si la salida y(t) no “explota”, no diverge a +Inf o –Inf, cuando t tiende a +Inf.

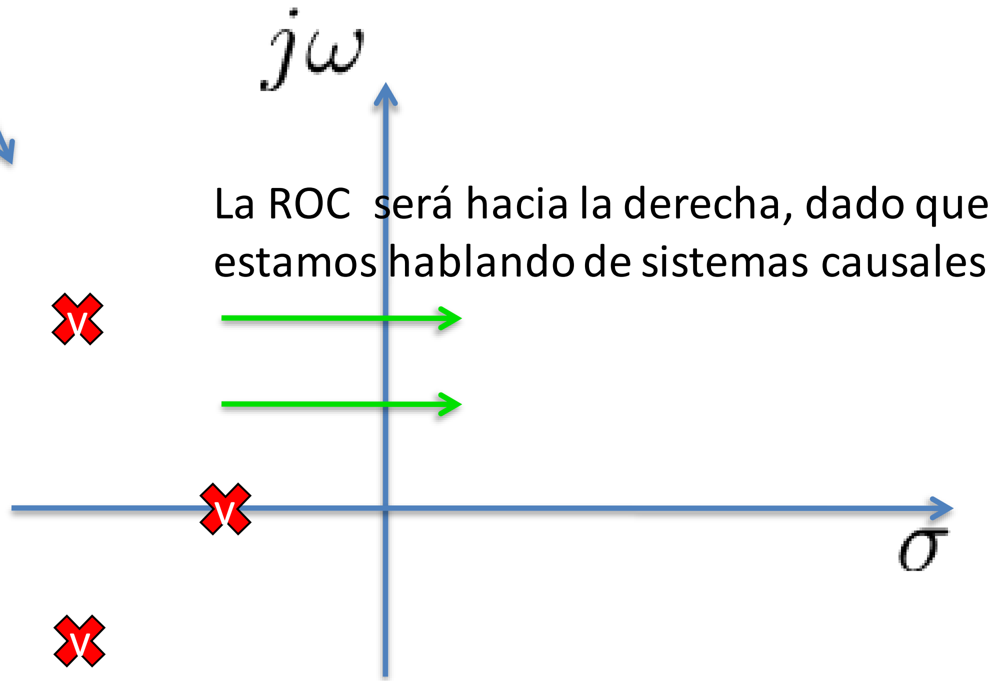
- Un sistema LTI es estable (mirando hacia +Inf”) si cuando la entrada x(t) es acotada, la salida y(t) tambien será acotada para todo los t entre [t_inicial, +Inf), donde t_inicial valor finito.

Estabilidad "mirando hacia +Inf"

$h(t) = 0$ para $t < 0$ (condición de causalidad)

Int $|h(t)|$ dt < Inf (condición de estabilidad)

- <u>los polos de H(s) tiene que tener sigma<=0</u>



- <u>H(s): Laplace de h(t)</u>

Estabilidad de la salida de un sistema LTI

<u>h(t) =0 para t <0 (condición de causalidad)</u>

<u>Int |h(t)| dt < Inf (condición de estabilidad)</u>

Respecto a h(t):

Si el sistema es causal $\longrightarrow$ h(t)=0 para t<0,

Si el sistema es estable la respuesta al impulso es absolutamente integrable, existe la transformada de Fourier, la ROC incluye el eje jω en el plano s

Un sistema estable y causal deben tener todos los polos en el semiplano izquierdo del plano s

de H(s)

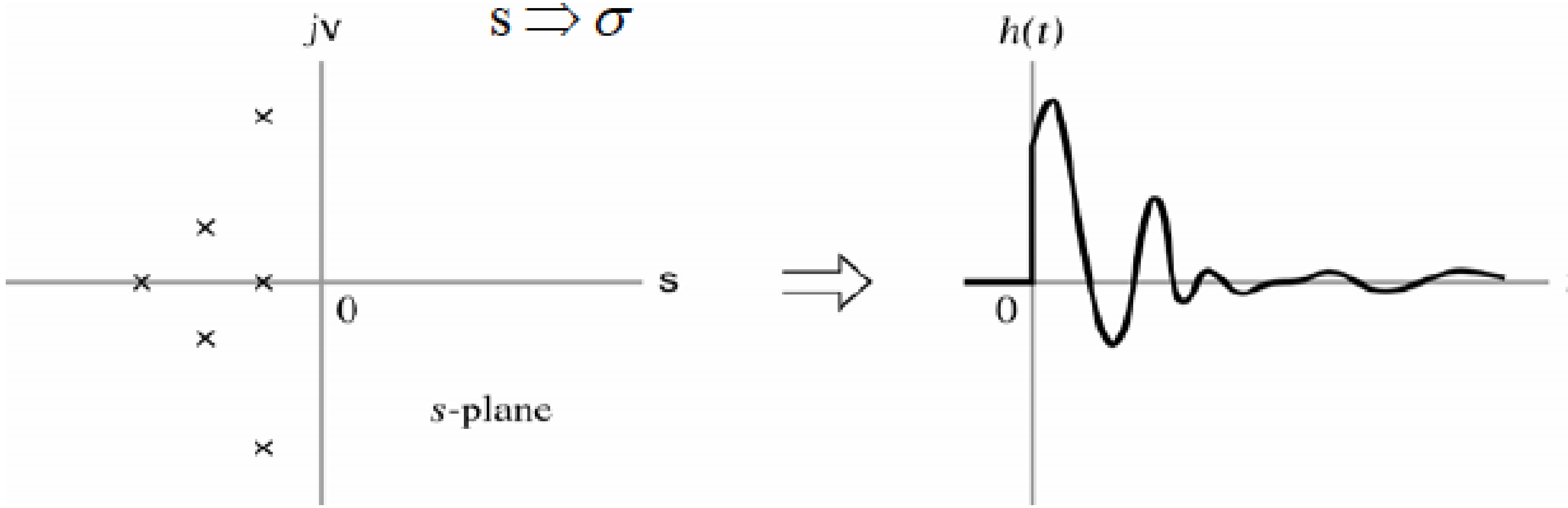
Esto vale para sistemas causales y anti-causales

Estabilidad de la salida de un sistema LTI

Para un sistema causal …

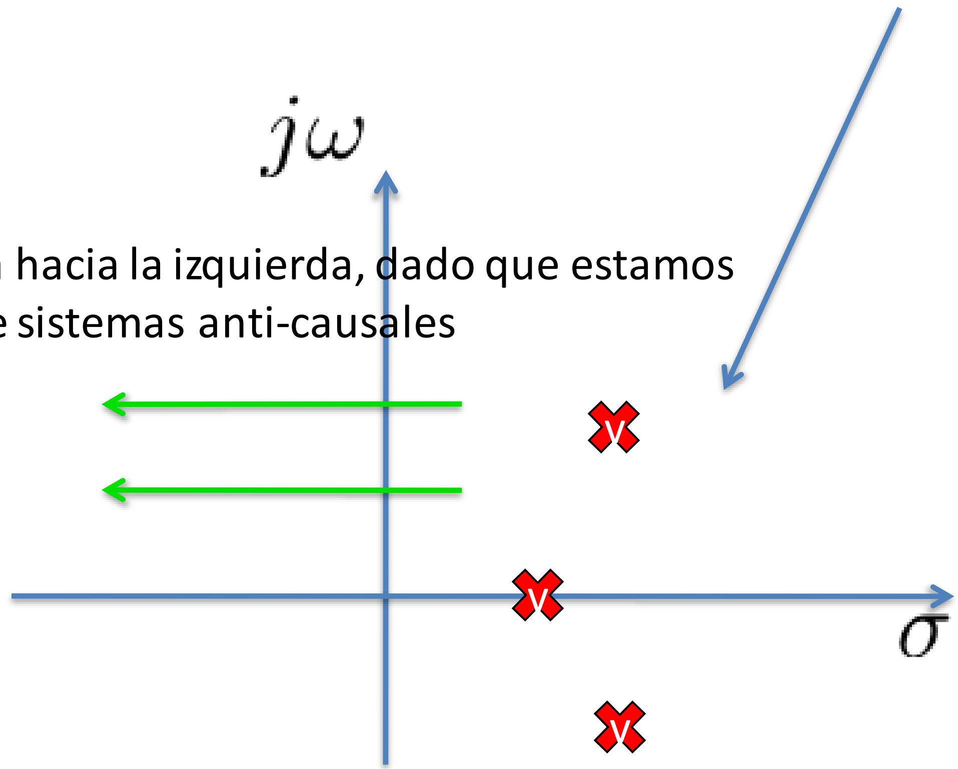
$$\mathrm{V} \Rightarrow \omega$$

$$\mathrm{S} \Rightarrow \sigma$$



Estabilidad en el caso de anti-causalidad

- <u>los polos de H(s) tiene que tener sigma>=0</u>



- <u>Salida y(t) acotada “mirando hacia –Inf”</u>

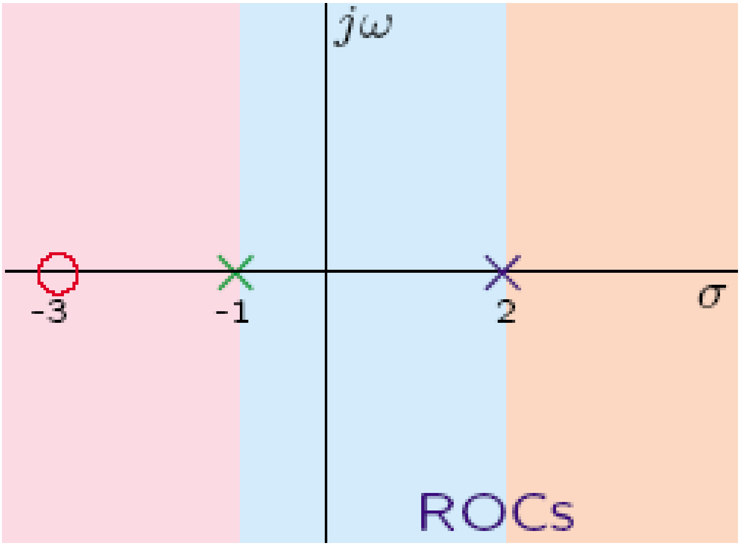
Ejemplo: Anti-transformar sin conocer la ROC

$$X(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s-2)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2}$$

(en este caso estariamos considerando la bilatera….)

$$A = -\frac{2}{3} \text{ and } B = \frac{5}{3}$$

Pole-zero diagram



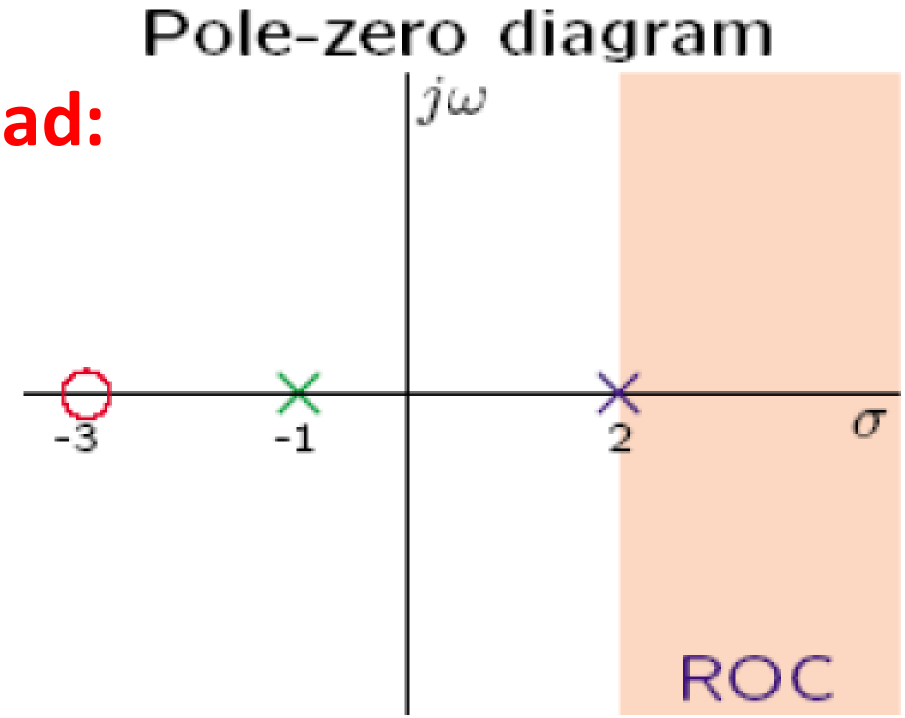
There are three possible ROCs:

1. $\Re\{s\} > 2$
2. $-1 < \Re\{s\} < 2$
3. $\Re\{s\} < -1$

TENEMOS 3 POSIBLES señales x(t) !!

Ejemplo: Anti-transformar sin conocer la ROC

Primera posibilidad:



Considerando la Laplace Unilatera esta seria la unica solución….

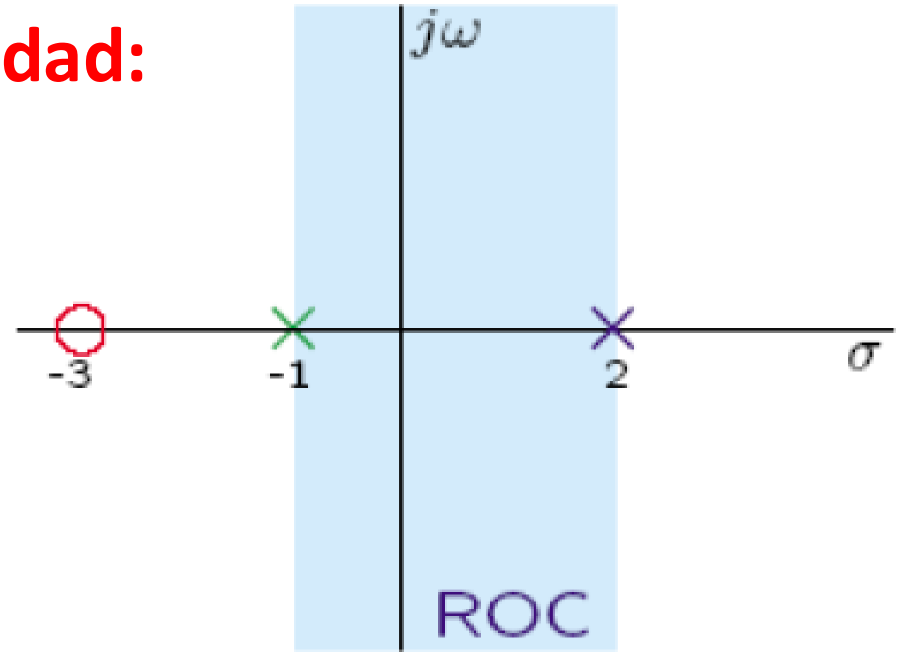
$$X(s) = \frac{-2}{3}\left(\frac{1}{s+1}\right) + \frac{5}{3}\left(\frac{1}{s-2}\right) \quad \text{for } \Re\{s\} > 2$$

Esta señal NO tiene transformada de Fourier!!!

$$x(t) = \left(\frac{-2}{3}e^{-t} + \frac{5}{3}e^{2t}\right) u(t)$$

Ejemplo: Anti-transformar sin conocer la ROC

Segunda posibilidad:



$$X(s) = \frac{-2}{3}\left(\frac{1}{s+1}\right) + \frac{5}{3}\left(\frac{1}{s-2}\right) \text{ for } -1 < \Re\{s\} < 2$$

Esta señal tiene transformada de Fourier!!!

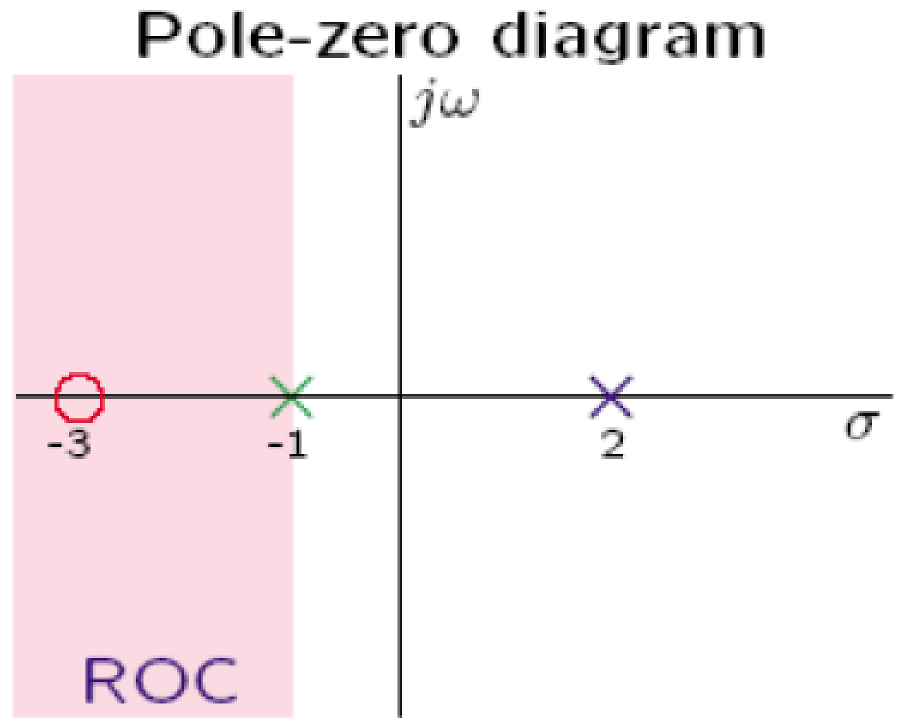
$$x(t) = \frac{-2}{3}e^{-t}u(t) - \frac{5}{3}e^{2t}u(-t)$$

Nota que esta señal no diverge…

El integral de la Transformada Fourier tiene solución, converge, la TF existe….

Ejemplo: Anti-transformar sin conocer la ROC

Tercera posibilidad:



$$X(s) = \frac{-2}{3}\left(\frac{1}{s+1}\right) + \frac{5}{3}\left(\frac{1}{s-2}\right) \quad \text{for } \Re\{s\} < -1$$

Esta señal NO tiene transformada de Fourier!!!

$$x(t) = \left(\frac{2}{3}e^{-t} - \frac{5}{3}e^{2t}\right) u(-t)$$

Ejemplo: Anti-transformar pero considerando la definición de Laplace Unilatera

Problema 6.8

Encontrar la transformada inversa de Laplace de $\boxed{X(s)=\frac{3s+2}{s^2+4s+5}}$

$$X(s)=\frac{3s+2}{s^2+4s+5}=\frac{3s+2}{(s+2)^2+1^2}=\frac{B_1s+B_2}{(s-\alpha)^2+{\omega_0}^2}; \quad B_1=3\,; B_2=2$$

$$X(s)=\frac{C_1(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+{\omega_0}^2}+\frac{C_2{\omega_0}^2}{(s-\alpha)^2+{\omega_0}^2}; C_1=B_1=3\,; C_2=\frac{B_1\alpha+B_2}{{\omega_0}^2}=-4$$

$$X(s)=\frac{3(s+2)}{(s+2)^2+1^2}+\frac{-4\;1^2}{(s+2)^2+1^2}$$

Seria “4 por….”

$$C_1e^{\alpha t}\cos(\omega_0 t)u(t)\xleftrightarrow{L_u}\frac{C_1(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+{\omega_0}^2}$$

$$C_2e^{\alpha t}sen(\omega_0 t)u(t)\xleftrightarrow{L_u}\frac{C_2{\omega_0}^2}{(s-\alpha)^2+{\omega_0}^2}$$

$$\boxed{x(t)=3e^{-2t}\cos(t)u(t)-4e^{-2t}sen(t)u(t)}$$

Otro Ejemplo

6.26. A signal $x(t)$ has Laplace transform $X(s)$ as given below. Plot the poles and zeros in the s-plane and determine the Fourier transform of $x(t)$ without inverting $X(s)$.

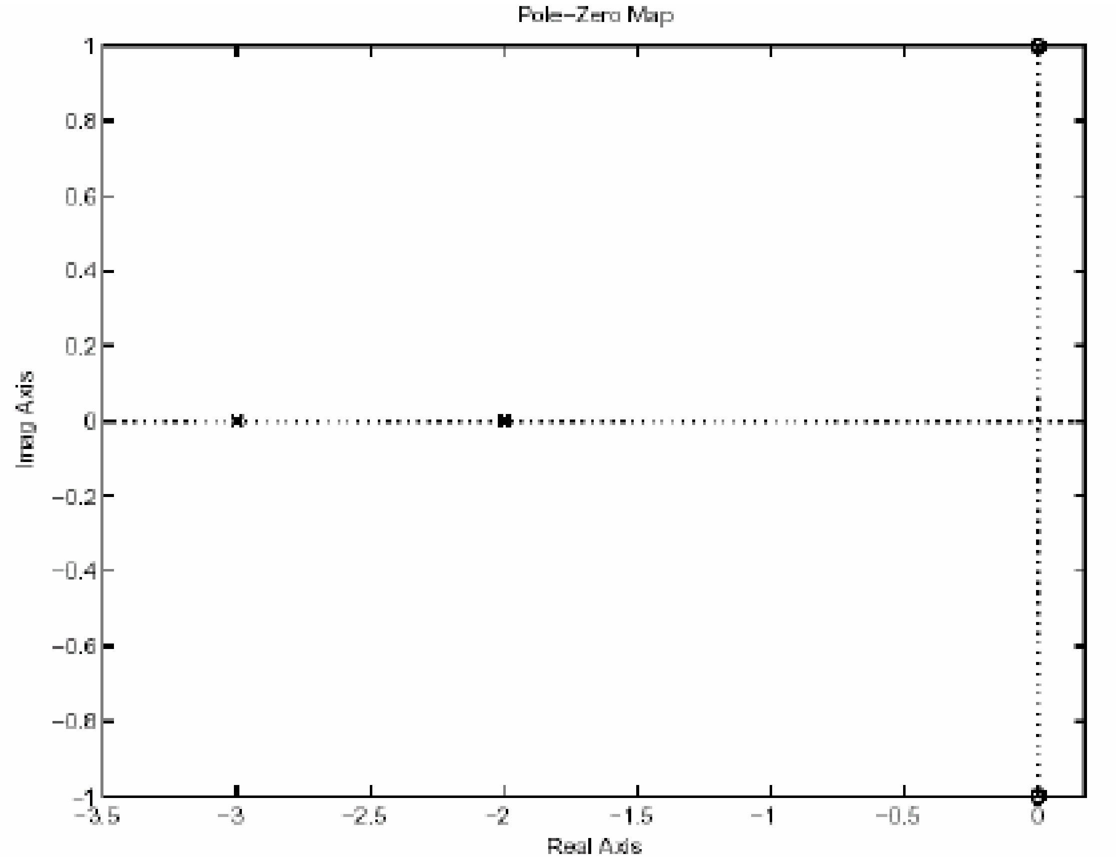
$$\text{(a) } X(s) = \frac{s^2+1}{s^2+5s+6}$$

$$X(s) = \frac{(s+j)(s-j)}{(s+3)(s+2)}$$

zeros at: $\pm j$

poles at: $-3, -2$

$$X(j\omega) = X(s)|_{s=j\omega} = \frac{-\omega^2+1}{-\omega^2+5j\omega+6}$$



Otro Ejemplo

6.27. Determine the bilateral Laplace transform and ROC for the following signals:

(a) $x(t) = e^{-t}u(t+2)$

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}u(t+2)e^{-st}\,dt \\
&= \int_{-2}^{\infty} e^{-t(1+s)}\,dt \\
&= \frac{e^{2(1+s)}}{1+s}
\end{aligned}
$$

ROC: Re(s) > -1

Otro Ejemplo

6.28. Determine the unilateral Laplace transform of the following signals using the defining equation:

(e) $x(t) = \sin(\omega_o t)$

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \int_{0-}^{\infty} \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega_o t} - e^{-j\omega_o t}\right) e^{-st}\, dt \\
&= \frac{1}{2j}\left[\int_{0-}^{\infty} e^{t(j\omega_o - s)}\, dt - \int_{0-}^{\infty} e^{-t(j\omega_o + s)}\, dt\right] \\
&= \frac{1}{2j}\left[\frac{-1}{j\omega_o - s} - \frac{1}{j\omega_o + s}\right] \\
&= \frac{\omega_o}{s^2 + \omega_o^2}
\end{aligned}
$$

Otro Ejemplo

6.30. Use the basic Laplace transforms and the Laplace transform properties given in Tables D.1 and D.2 to determine the time signals corresponding to the following unilateral Laplace transforms:

(b) $X(s) = e^{-2s} \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right)$

$$A(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \quad \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} \quad a(t) = te^{-t}u(t)$$

$$B(s) = \frac{d}{ds}A(s) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} \quad b(t) = -ta(t) = -t^2e^{-t}u(t)$$

$$X(s) = e^{-2s}B(s) \quad \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} \quad x(t) = b(t-2) = -(t-2)^2e^{-(t-2)}u(t-2)$$

Otro Ejemplo

6.32. Given the transform pair $x(t) \overset{\mathcal{L}_u}{\longleftrightarrow} \frac{2s}{s^2+2}$, where $x(t) = 0$ for $t < 0$, determine the Laplace transform of the following time signals:

(a) $x(3t)$

$$
\begin{aligned}
x(3t) &\overset{\mathcal{L}_u}{\longleftrightarrow} \frac{1}{3}X\left(\frac{s}{3}\right) \\
X(s) &= \frac{2\frac{s}{3}}{(\frac{s}{3})^2 + 2} \\
&= \frac{6s}{s^2 + 18}
\end{aligned}
$$

(d) $e^{-t}x(t)$

$$e^{-t}x(t) \overset{\mathcal{L}_u}{\longleftrightarrow} X(s+1) = \frac{2(s+1)}{(s+1)^2 + 2}$$

Otro Ejemplo

6.33. Use the s-domain shift property and the transform pair $e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} \frac{1}{s+a}$ to derive the unilateral Laplace transform of $x(t) = e^{-at}\cos(\omega_1 t)u(t)$.

$$
\begin{aligned}
e^{-at}u(t) &\xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} \frac{1}{s+a} \\
x(t) &= e^{-at}\cos(\omega_1 t)u(t) \\
&= \frac{1}{2}e^{-at}\left(e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}\right)u(t) \\
&\quad \text{Using the s-domain shift property:} \\
X(s) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(s-j\omega_1)+a} + \frac{1}{(s+j\omega_1)+a}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{2(s+a)}{(s+a)^2+\omega_1^2} \\
&= \frac{(s+a)}{(s+a)^2+\omega_1^2}
\end{aligned}
$$

Otros Ejemplos

6.35. Determine the initial value $x(0^+)$ given the following Laplace transforms $X(s)$:

(c) $X(s) = e^{-2s}\frac{6s^2+s}{s^2+2s-2}$

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s) = e^{-2s}\frac{6s^3+s^2}{s^2+2s-2} = 0$$

6.36. Determine the final value $x(\infty)$ given the following Laplace transforms $X(s)$:

(b) $X(s) = \frac{s+2}{s^3+2s^2+s}$

$$x(\infty) = \lim_{s\to 0} sX(s) = \frac{s+2}{s^2+2s+1} = 2$$

Otro Ejemplo

6.37. Use the method of partial fractions to find the time signals corresponding to the following unilateral Laplace transforms:

(b) $X(s) = \frac{2s^2+10s+11}{s^2+5s+6}$

$$\begin{aligned}
X(s) &= \frac{2s^2+10s+11}{s^2+5s+6} = 2 - \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\
\frac{1}{(s+2)(s+3)} &= \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} \\
0 &= A + B \\
1 &= 3A + 2B \\
X(s) &= 2 - \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+3} \\
x(t) &= 2\delta(t) + \left[e^{-3t} - e^{-2t}\right] u(t)
\end{aligned}$$

Ejemplo: encontrar respuesta al impulso

- Ejemplo:

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 2\dot{x}(t) + x(t)$$

(con cond. Iniciales nulas)

Polinomio característico

$$s^2 + 3s + 2 = 0$$

Las raíces son -1, -2, entonces:

$$y_o(t) = Ae^{-t} + Be^{-2t}$$

Ejemplo: respuesta al impulso

- Queremos resolver:

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 2\dot{\delta}(t) + \delta(t)$$

con cond. Iniciales nulas

Con Laplace

<u>Unilatera o bilatera no importa</u>, porque las condiciones iniciales son nulas:

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = 2s + 1$$

$$(s^2 + 3s + 2)H(s) = 2s + 1$$

$$\boxed{H(s) = \frac{2s + 1}{s^2 + 3s + 2}}$$

Con Laplace

Tenemos que anti-trasformar

$$H(s) = \frac{2s+1}{s^2+3s+2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

$$H(s) = \frac{A(s+2)+B(s+1)}{(s+1)(s+2)}$$

$$H(s) = \frac{(A+B)s+2A+B}{(s+1)(s+2)}$$

$$\begin{aligned} A+B&=2 \\ 2A+B&=1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A&=-1 \\ B&=3 \end{aligned}$$

Con Laplace

Tenemos que anti-trasformar

$$H(s) = \frac{-1}{(s+1)} + \frac{3}{(s+2)}$$

Considerando solo señales causales, obtenemos:

$$h(t) = -e^{-t}u(t) + 3e^{-2t}u(t)$$

$$h(t) = -e^{-t} + 3e^{-2t} \qquad t \geq 0$$

Otro Ejemplo

6.38. Determine the forced and natural responses for the LTI systems described by the following differential equations with the specified input and initial conditions:

(b) $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = -4x(t) - 3\frac{d}{dt}x(t), \quad y(0^-) = -1, \; \frac{d}{dt}y(t)\Big|_{t=0^-} = 5, \quad x(t) = e^{-t}u(t)$

$$Y(s)(s^2+5s+6) - 5 + s + 5 \quad = \quad (-4-3s)\frac{1}{s+1}$$

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{-1}{(s+1)(s+2)(s+3)} + \frac{s}{(s+2)(s+3)} \\
&= Y^f(s) + Y^n(s) \\
Y^f(s) &= \frac{-0.5}{s+1} + \frac{-2}{s+2} + \frac{2.5}{s+3} \\
y^f(t) &= \left(-0.5e^{-t} - 2e^{-2t} + 2.5e^{-3t}\right)u(t) \\
Y^n(s) &= \frac{-2}{s+2} + \frac{3}{s+3} \\
y^n(t) &= \left(-2e^{-2t} + 3e^{-3t}\right)u(t)
\end{aligned}$$

Otro Ejemplo

6.41. Determine the bilateral Laplace transform and the corresponding ROC for the following signals:

(b) $x(t) = e^{t}\cos(2t)u(-t) + e^{-t}u(t) + e^{t/2}u(t)$

$$X(s) = -\frac{s-1}{(s-1)^2+4} + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-\frac{1}{2}}$$

ROC: $0.5 < \mathrm{Re(s)} < 1$

(c) $x(t) = e^{3t+6}u(t+3)$

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-3}e^{3(t+3)}u(t+3) \\ a(t) = e^{3t}u(t) &\overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} A(s) = \frac{1}{s-3} \\ b(t) = a(t+3) &\overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} B(s) = e^{3s}A(s) = e^{3s}\frac{1}{s-3} \\ X(s) &= \frac{e^{3(s-1)}}{s-3} \end{aligned}$$

ROC: $\mathrm{Re(s)} > 3$

Otro Ejemplo

6.43. Use the method of partial fractions to determine the time signals corresponding to the following bilateral Laplace transforms:

(b) $X(s) = \frac{4s^2+8s+10}{(s+2)(s^2+2s+5)}$

$$X(s) = \frac{2}{s+2} + \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+2^2} + \frac{-2}{(s+1)^2+2^2}$$

(i) with ROC $\mathrm{Re}(s) < -2$ (left-sided)

$$x(t) = \left(-2e^{-2t} - 2e^{-t}\cos(2t) + e^{-t}\sin(2t)\right)u(-t)$$

(ii) with ROC $\mathrm{Re}(s) > -1$ (right-sided)

$$x(t) = \left(2e^{-2t} + 2e^{-t}\cos(2t) - e^{-t}\sin(2t)\right)u(t)$$

(iii) with ROC $-2 < \mathrm{Re}(s) < -1$ (two sided)

$$x(t) = 2e^{-2t}u(t) + \left(-2e^{-t}\cos(2t) + e^{-t}\sin(2t)\right)u(-t)$$

Otro Ejemplo

6.45. A system has transfer function $H(s)$ as given below. Determine the impulse response assuming (i) that the system is causal, and (ii) that the system is stable.

(a) $H(s) = \frac{2s^2+2s-2}{s^2-1}$

$$H(s) = 2 + \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s-1}$$

(i) system is causal

$$h(t) = 2\delta(t) + \left(e^{-t} + e^{t}\right) u(t)$$

(ii) system is stable

$$h(t) = 2\delta(t) + e^{-t}u(t) + -e^{t}u(-t)$$

Otro Ejemplo

6.47. The relationship between the input $x(t)$ and output $y(t)$ of a causal system is described by the differential equation given below. Use Laplace transforms to determine the transfer function and impulse response of the system.

(b) $\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\frac{d}{dt}y(t) + 6y(t) = x(t) + \frac{d}{dt}x(t)$

$$
\begin{aligned}
Y(s)(s^2 + 5s + 6) &= X(s)(1 + s) \\
H(s) &= \frac{s+1}{(s+3)(s+2)} \\
&= \frac{-1}{s+2} + \frac{2}{s+3} \\
h(t) &= \left(2e^{-3t} - e^{-2t}\right) u(t)
\end{aligned}
$$

Otro Ejemplo

6.48. Determine a differential equation description for a system with the following transfer function.

(c) $H(s) = \frac{2(s-2)}{(s+1)^2(s+3)}$

$$\begin{aligned} Y(s)(s^3 + 5s^2 + 7s + 3) &= X(s)(3s^2 + 6s + 3) \\ \frac{d^3}{dt^3}y(t) + 5\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 7\frac{d}{dt}y(t) + 3y(t) &= 2\frac{d}{dt}x(t) - 4x(t) \end{aligned}$$