Matrix representation of complex numbers

Luca Martino

Operation with complex numbers

To **add** two complex numbers, add the real part to the real part and the imaginary part to the imaginary part.

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\, i$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

as in a vector...

Operation with complex numbers

To **multiply** two complex numbers, use the FOIL method and combine like terms .

$$
\begin{aligned}
(a+bi)(c+di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\
&= ac + (ad+bc)\,i - bd \quad \left(\text{Remember } i^2 = -1\right) \\
&= (ac-bd) + (ad+bc)\,i
\end{aligned}
$$

Example 3:

$$
\begin{aligned}
(3+2i)(5+6i) &= 15 + 18i + 10i + 12i^2 \\
&= 15 + 28i - 12 \\
&= 3 + 28i
\end{aligned}
$$

$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$$

DIFFERENT FROM A VECTOR!!!

Operation with complex numbers

To **divide** two complex numbers, multiply the numerator and denominator by the complex conjugate , expand and simplify. Then, write the final answer in standard form.

$$\frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Example 4:

$$\begin{aligned}\frac{3+2i}{4-5i} &= \frac{3+2i}{4-5i} \cdot \frac{4+5i}{4+5i} \\ &= \frac{12+15i+8i+10i^2}{16+25} \\ &= \frac{2+23i}{41} \\ &= \frac{2}{41} + \frac{23}{41}i\end{aligned}$$

....division not defined for vector, but for matrices....

Complex number as a matrix !!!!!

Un número complejo general$z = x + iy$ se representa entonces como

$$z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}.$$

La compleja operación conjugada, donde$i \to -i$, se ve como solo la transposición matricial.

Complex number as a matrix !!!!!

Podemos definir la unidad real como

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y la imaginaria como

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

al ser un número complejo la suma de un número real más otro número real por la unidad imaginaria, podemos hacerlo matricialmene

$$z = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Con esta representación la aritmetica compleja es isomorfa a las operaciones con matrices.

Complex number as a matrix !!!!!

Ejemplo1.6.1

Demostrar eso$i^2 = -1$ en la representación matricial.

Solución

Tenemos

$$i^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1.$$

Ejemplo1.6.2

Demostrar eso$z\bar{z} = x^2 + y^2$ en la representación matricial.

Solución

Tenemos

$$z\bar{z} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 & 0 \\ 0 & x^2 + y^2 \end{pmatrix} = (x^2 + y^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (x^2 + y^2).$$

Ahora podemos ver que existe una correspondencia uno a uno entre el conjunto de números complejos y el conjunto de todas las matrices de dos por dos con elementos diagonales iguales y elementos opuestos firmados fuera de la diagonal. Si no te gusta la idea de$\sqrt{-1}$, ¡entonces imagínate la aritmética de estas matrices de dos por dos!