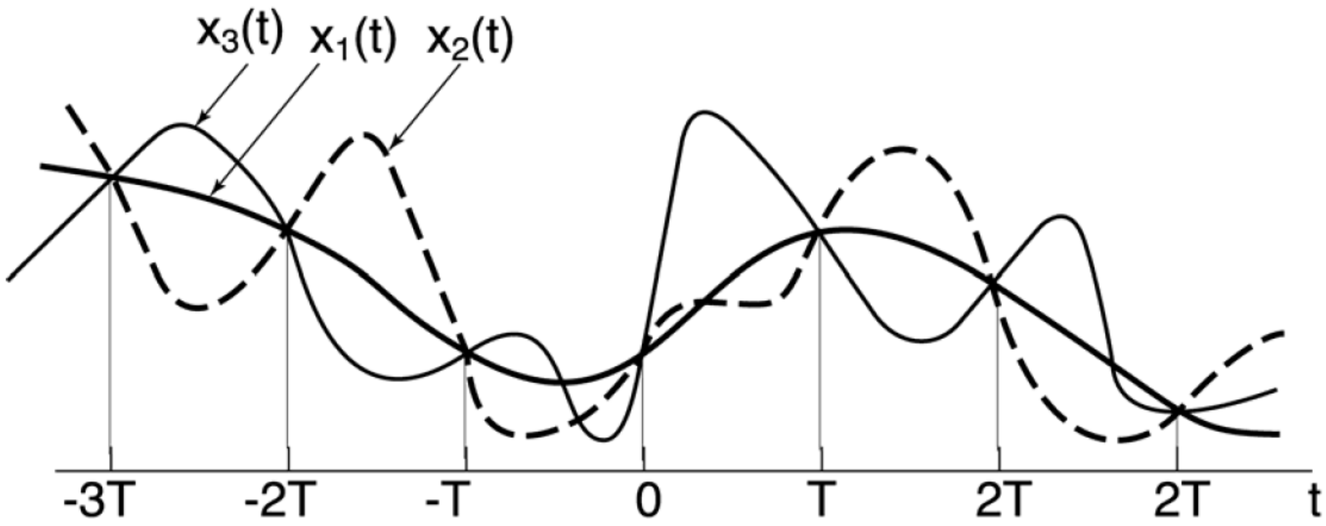
7. Muestreo ideal

- Dada una señal $x(t)$, ¿existe una señal $x[n]$ compuesta por una secuencia de números tal que a partir de ella podamos recuperar $x(t)$?
- ¿Es suficiente la información de una serie de muestras para recomponer la señal $x(t)$?
- ¿Cuál es el nº mínimo de muestras necesarias para reconstruir la señal?
- ¿De qué dependerá el número mínimo de muestras necesarias?

- En general, no podemos esperar que una secuencia de números identifique a una señal concreta sin añadir ninguna condición adicional
- Hay un número infinito de señales que se pueden generar a partir de una secuencia

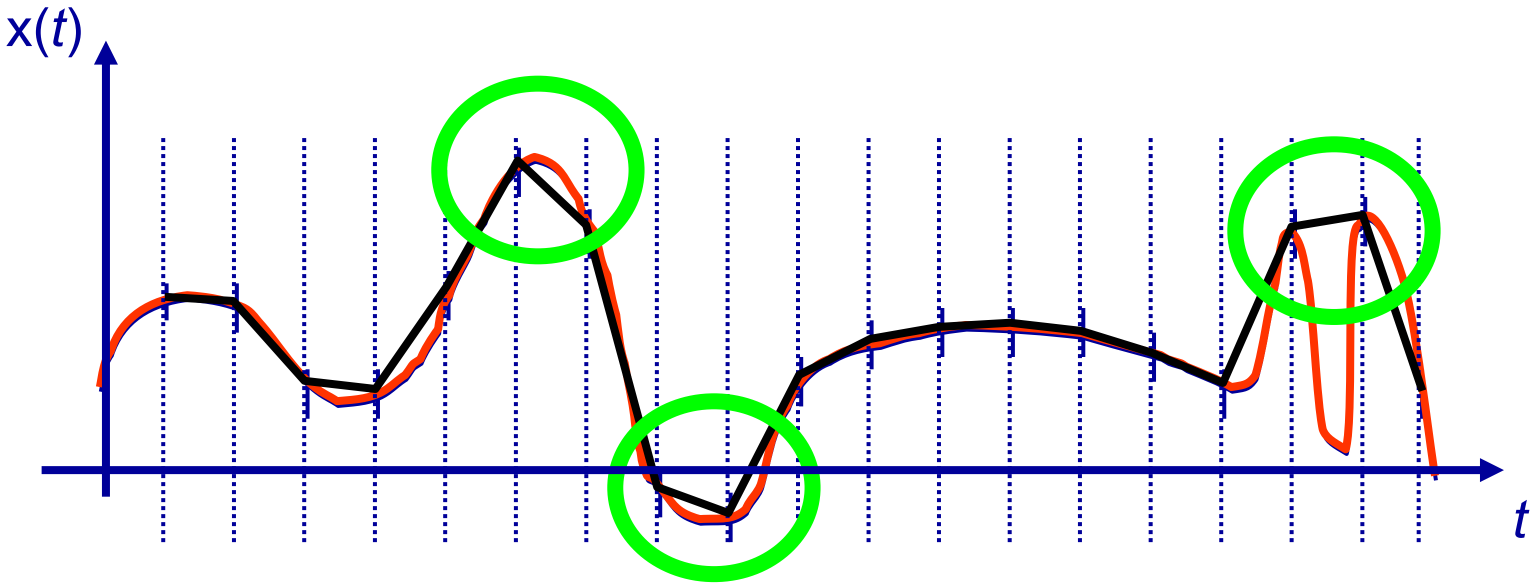
Condiciones de muestreo

- Muchas señales tienen las mismas muestras



- Las técnicas de muestreo pierden la información existente entre las muestras si no se cumplen unas condiciones:
  - **Señal de banda** limitada
  - Muestras tomadas **"suficientemente cercanas"** en relación a la máxima frecuencia de la señal

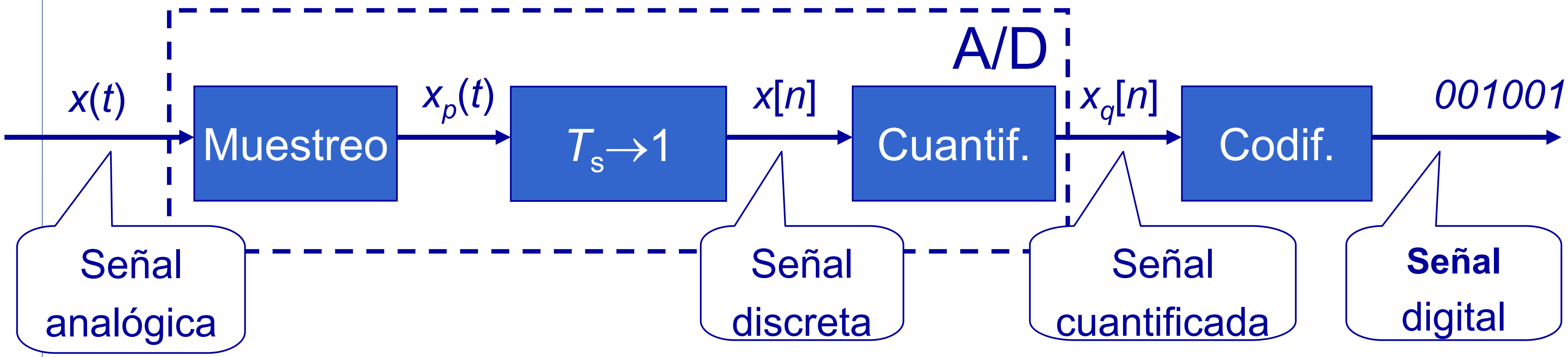
Ejemplo sencillo de muestreo



- ¿Que notamos?
  - No es suave
  - !Se pierde información!
- ¿Que podemos hacer?
  - Reconstrucción de mayor orden
  - Usar más muestras
  - *¿Cuántas muestras más?*

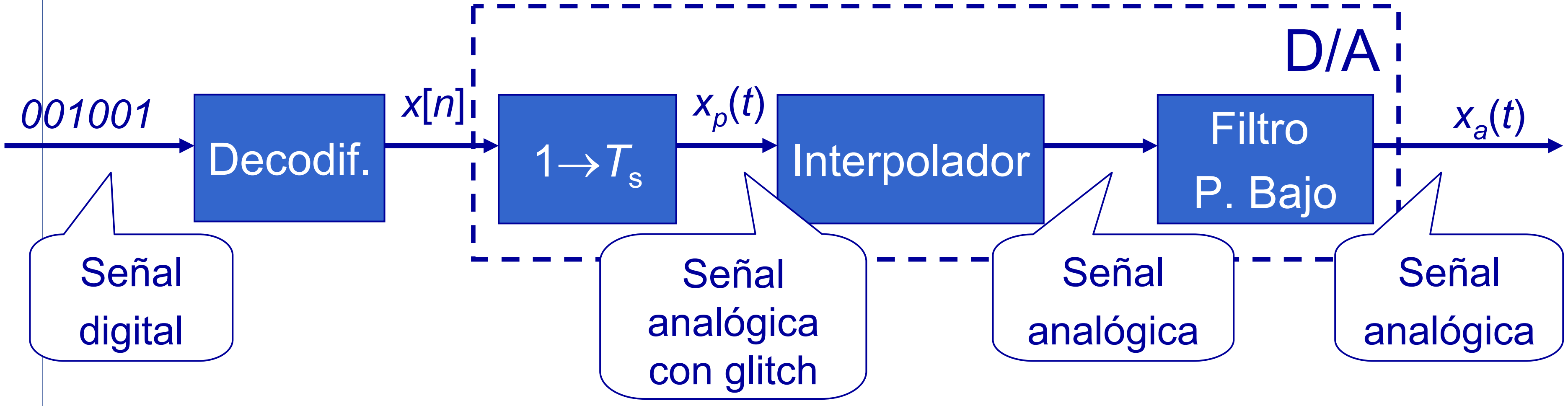
Conversión A/D (I)

- MUESTREO → Discretización en el tiempo.
  - Toma de muestras de la señal analógica en instantes determinados de tiempo.
- CUANTIFICACIÓN → Discretización de amplitud.
  - Asignación de los valores de las muestras de la señal analógica a valores discretos, predefinidos, de un conjunto finito de valores.
- CODIFICACIÓN → Representación de los valores cuantificados.
  - Asignación de un código de N bits a cada uno de los valores de la señal discreta



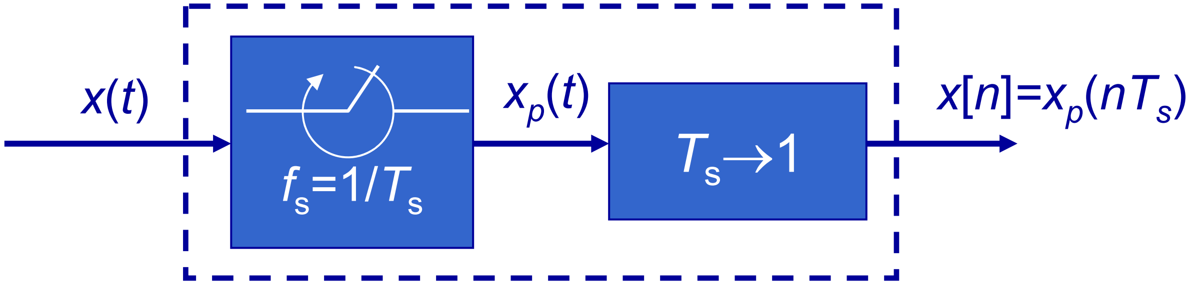
Conversión D/A (I)

- DECODIFICACIÓN → Conversión de códigos digitales a una secuencia discreta.
  - Asignación de un valor numérico a cada una de las palabras digitales de N bits
- INTERPOLADOR → Conversión de una secuencia de impulsos equiespaciados T_s a una señal definida $\forall\ t$
  - Se convoluciona cada impulso con una función base
- FILTRO PASO BAJO → Limita el espectro para igualarlo al de la señal original



Muestreo periódico

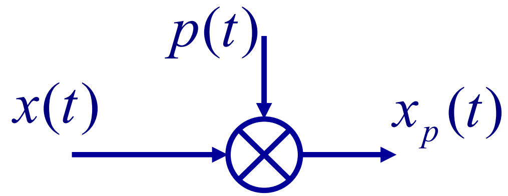
- Un método típico de obtener una señal discreta a partir de una continua es realizar un muestreo de la señal continua en el tiempo y asignar: $x[n]=x(nT_s)$

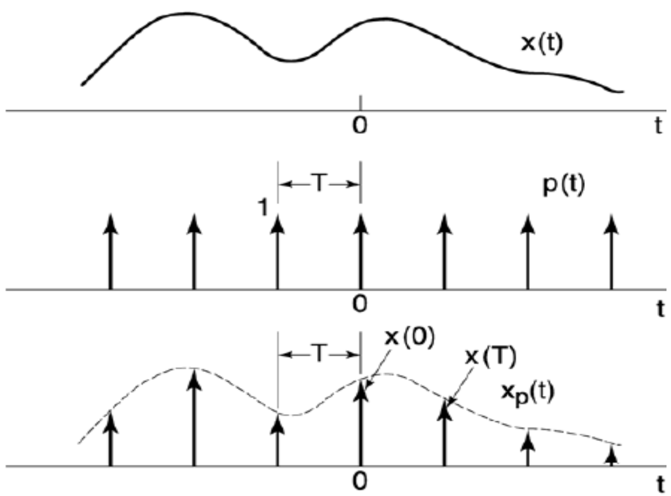


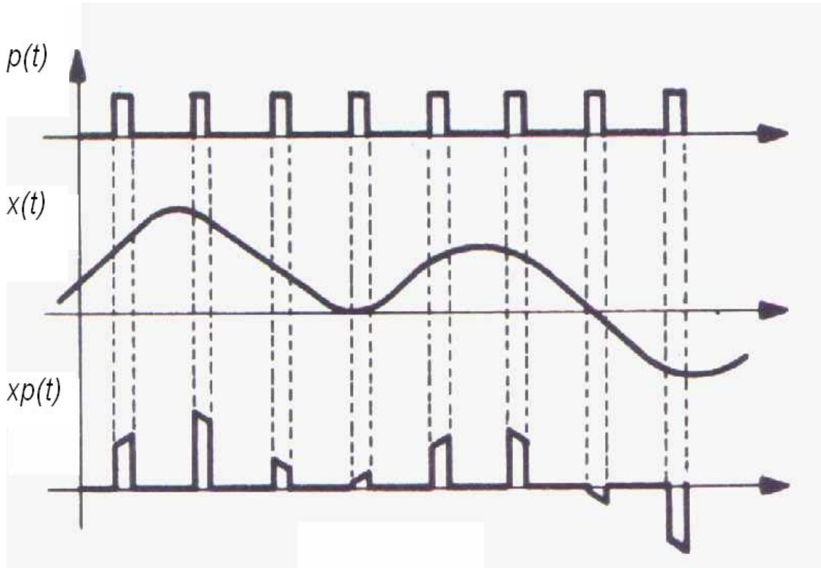
- Desde el punto de vista matemático, muestrear equivale a multiplicar la señal continua por una señal moduladora $p(t)$

¿Cómo muestreamos?

- ***x*(*t*)** señal a modular o muestrear
- ***p*(*t*)** señal moduladora o muestreadora
- ***x_p*(*t*)** señal modulada o muestreada



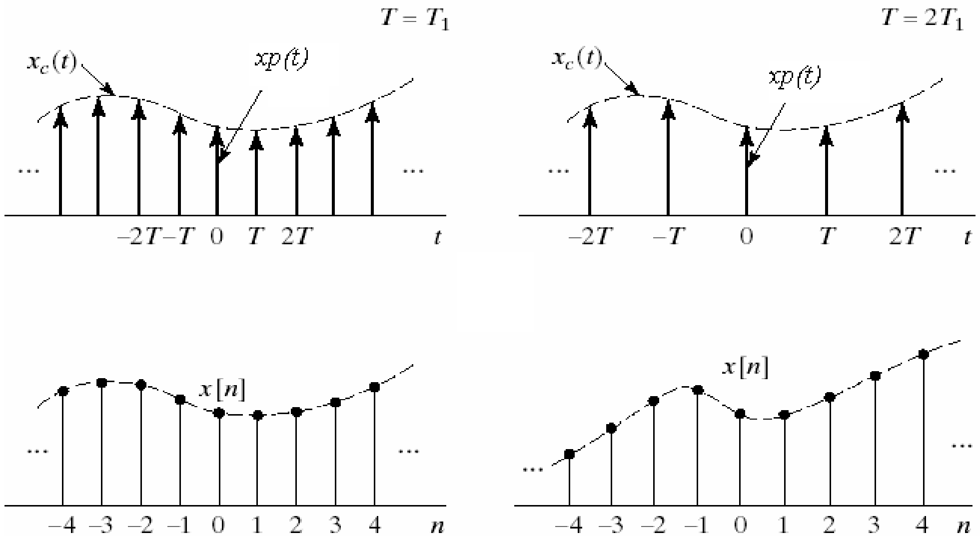




- *p*(*t*) "idealmente" será un tren de deltas. En la práctica un tren de pulsos

Relación entre señales continuas y discretas

Nota: no vamos a realizar una conversión analógica/ digital (A/D) completa en sentido estricto, ya que no se cuantificarán los valores de $x[n]$



- $x_p(t)$ es una señal en el tiempo continuo
- Se puede generar una secuencia de números $x[n]$ a partir de $x_p(t)$
- Para poder recuperar $x_p(t)$ a partir de $x[n]$ necesitamos conocer la **frecuencia de muestreo**

Dada una secuencia de números podemos recomponer $x_p(t)$ si conocemos la frecuencia de muestreo y la señal tiene determinadas características (teorema de Nyquist)

Teorema de muestreo (teorema de Nyquist)

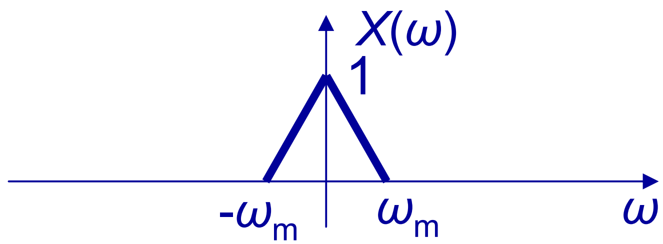
- **El teorema de muestreo** determina cuanta información se requiere cuando se muestrea una señal y se quiere que esté representada por sus muestras.
- *"Una señal de **banda limitada**, puede reconstruirse a partir de un conjunto de muestras equiespaciadas si la **frecuencia** (o pulsación) **de muestreo es igual o superior a dos veces la frecuencia** (o pulsación) **máxima de la señal**"*

$$\boxed{\omega_s \geq 2\cdot\omega_m}$$

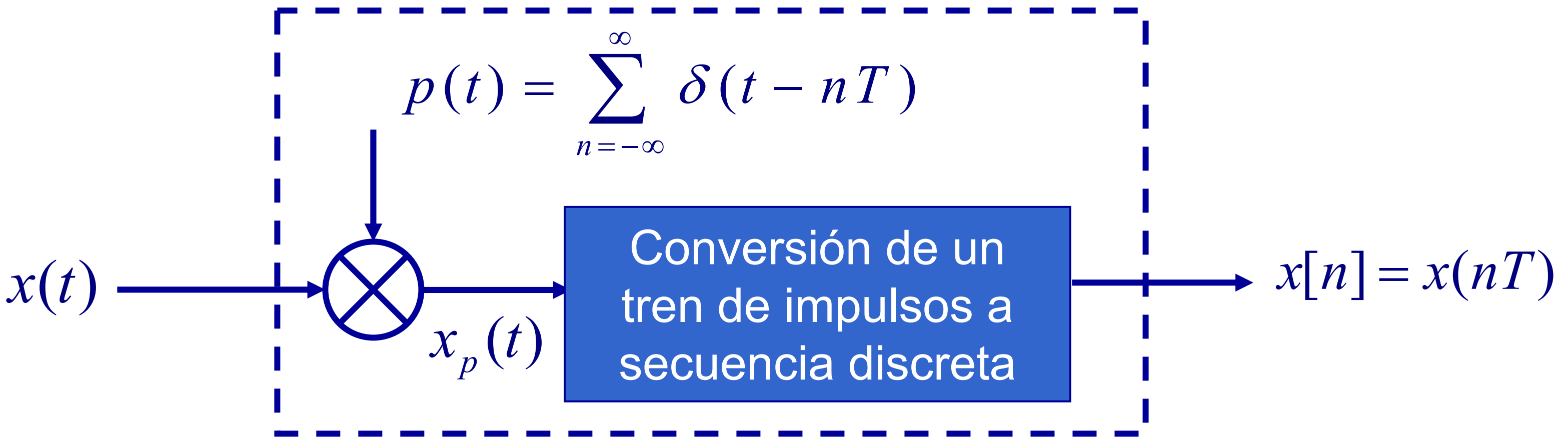
Siendo $\omega_s = 2\pi/T_s$

Teorema de muestreo. Comprobación (I)

- Suponiendo que $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ es una señal de banda limitada en el intervalo de frecuencia $[-\omega_m, \omega_m]$. $X(\omega)=0$, para $|\omega|>\omega_m$

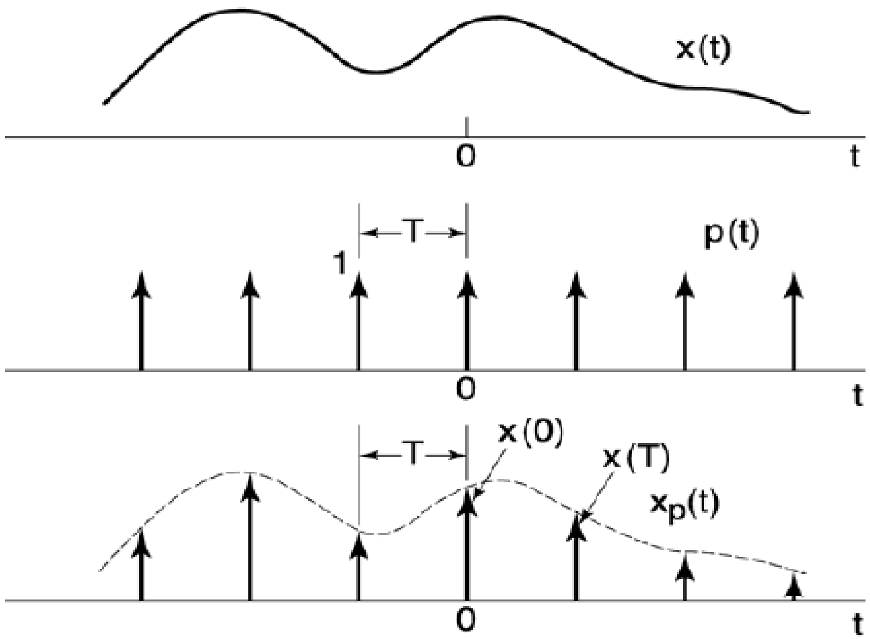


Entonces $x(t)$ se puede reconstruir de forma exacta a partir de un conjunto de muestras equidistantes si se cumple $\boldsymbol{\omega_s \geq 2 \cdot \omega_m}$ (rd/seg), o lo que es lo mismo $\boldsymbol{T_s \leq 2\pi/\omega_m}$ (seg)



Teorema de muestreo. Comprobación (II)

- La operación de muestreo equivale a una modulación con un tren de pulsos



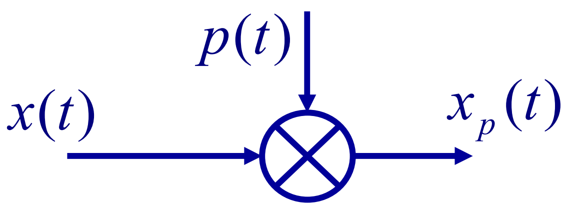
$$x_p(t) = x(t)\,p(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$$

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,\delta(t-nT)$$

$$P(\omega) = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_s)\quad,\quad \omega_s = 2\pi/T$$ = *pulsación de muestreo*

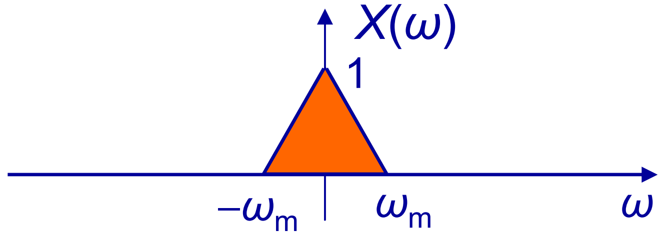
$$X_p(\omega) = \frac{1}{2\pi}X(\omega) * P(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(\omega-k\omega_s)$$

$$X_p(\omega) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X\left(\omega-k\frac{2\pi}{T}\right)$$

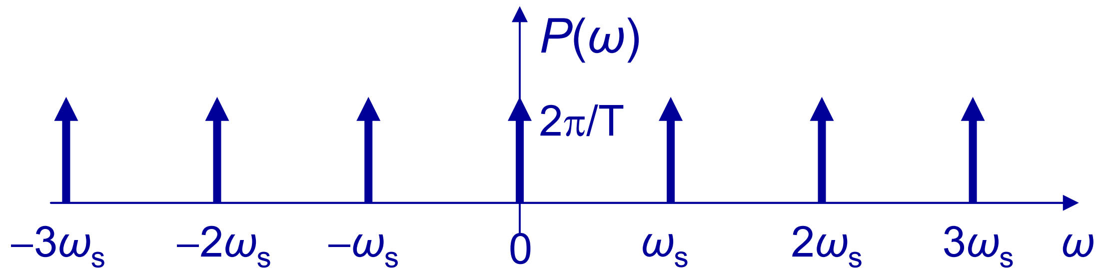


Teorema de muestreo. Comprobación (III)

Espectro de *x*(*t*)

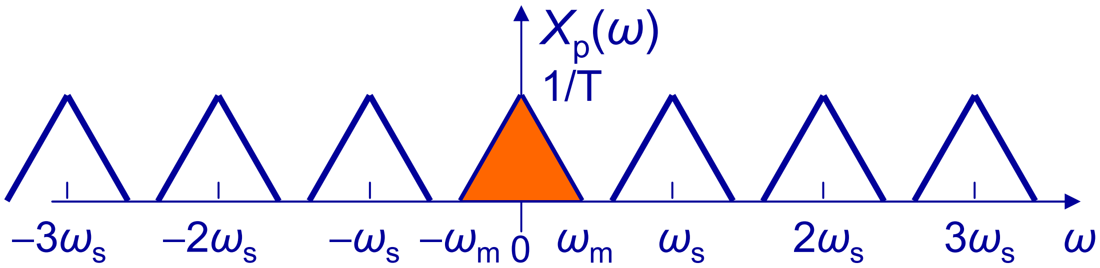


Tren de impulsos en el dominio de la frecuencia



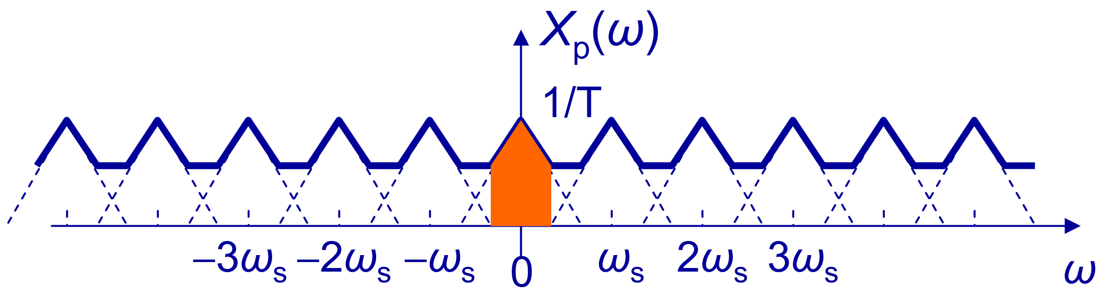
Espectro de la señal muestreada cuando:

$$\omega_s = 2\pi / T > 2\omega_m$$



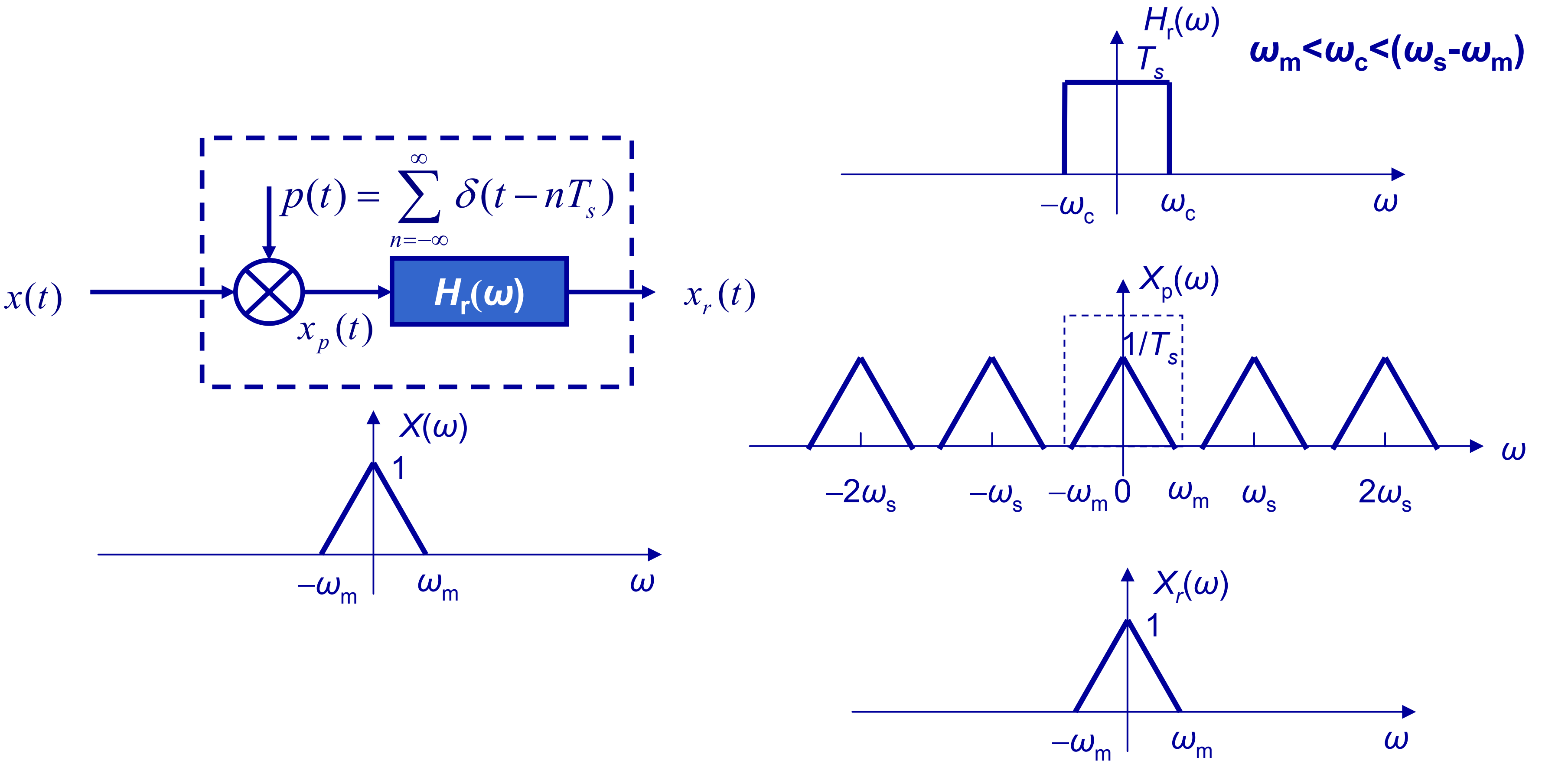
Espectro de la señal muestreada cuando:

$$\omega_s = 2\pi / T < 2\omega_m$$



Reconstrucción muestreo ideal

- Podemos reconstruir la señal original utilizando un **filtro paso bajo**



Reconstrucción muestreo ideal (II)

$$x_p(t) = x(t)\cdot p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT_s]\delta(t - nT_s)$$

$$x(t) = x_p(t) * h_r(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT_s]\delta(t - nT_s)\right] * h_r(t)$$

$$H_r(\omega) = \begin{cases} T_s & , \ |\omega| < \omega_c \\ 0 & , \ |\omega| > \omega_c \end{cases} \longrightarrow h_r(t) = T_s \frac{sen(\omega_c t)}{\pi\cdot t}$$

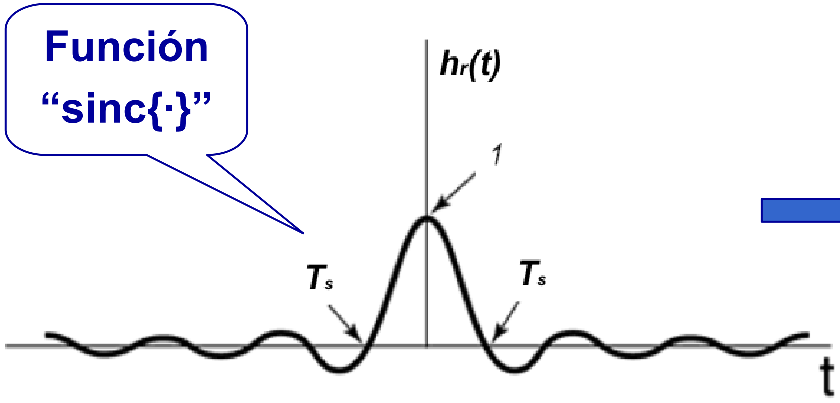
$$x(t) = x_p(t) * h_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT_s] h_r(t - nT_s)$$

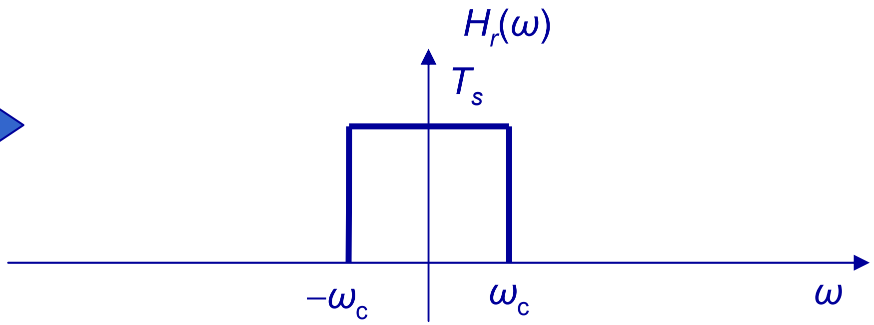
$$x(t) = x_p(t) * h_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT_s] \boxed{T_s \cdot \frac{sen(\omega_c (t - nT_s))}{\pi\cdot (t - nT_s)}}$$

Núcleo de interpolación

Reconstrucción de una señal con muestreo ideal (III)

$$H_r(\omega) = \begin{cases} T_s & , \quad |\omega| < \omega_c \\ 0 & , \quad |\omega| > \omega_c \end{cases} \longrightarrow h_r(t) = T_s \frac{sen(\omega_c t)}{\pi \cdot t}$$





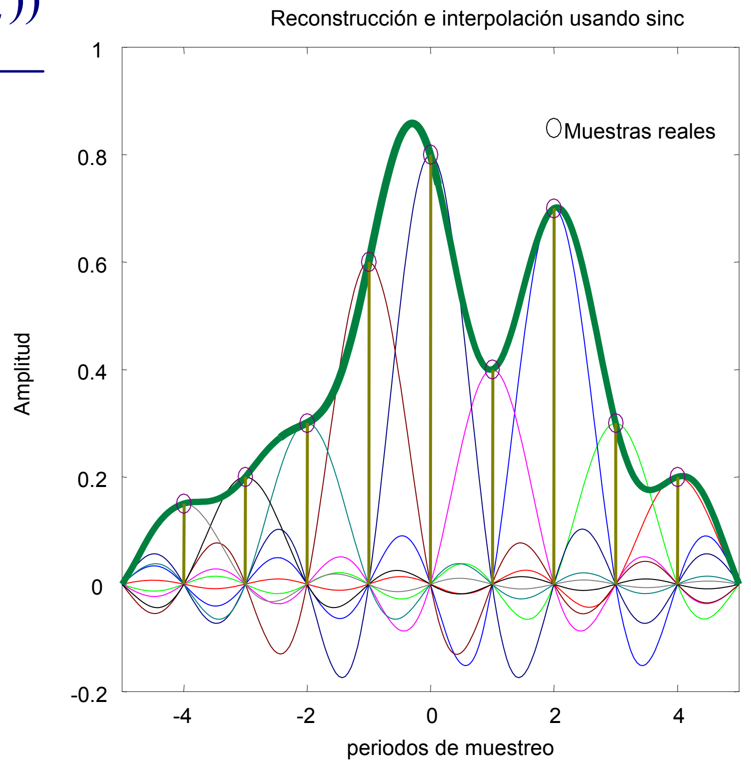
- El núcleo de **interpolación** es una función de tipo “sinc{·}” desplazada al instante de muestreo
- Es la respuesta al impulso de un filtro paso bajo ideal con frecuencia de corte igual a la mitad de la frecuencia de muestreo

Reconstrucción de una señal con muestreo ideal (IV)

- Si se satisface la condición $\omega_s > 2\cdot\omega_m$, y $\omega_c = \omega_s/2$ entonces la fórmula de reconstrucción viene dada por:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT_s] \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{T_s}(t - nT_s)\right)}{\frac{\pi}{T_s}\cdot(t - nT_s)}$$

- Reconstrucción de una señal $x(t)$ a partir de sus muestras



El submuestreo

- Si se produce submuestreo o “aliasing”:

  - Las frecuencias se solapan sumándose. Este proceso cambia la forma del espectro. No hay proceso que permita discriminar las frecuencias distorsionadas, por lo que el proceso es **irreversible**

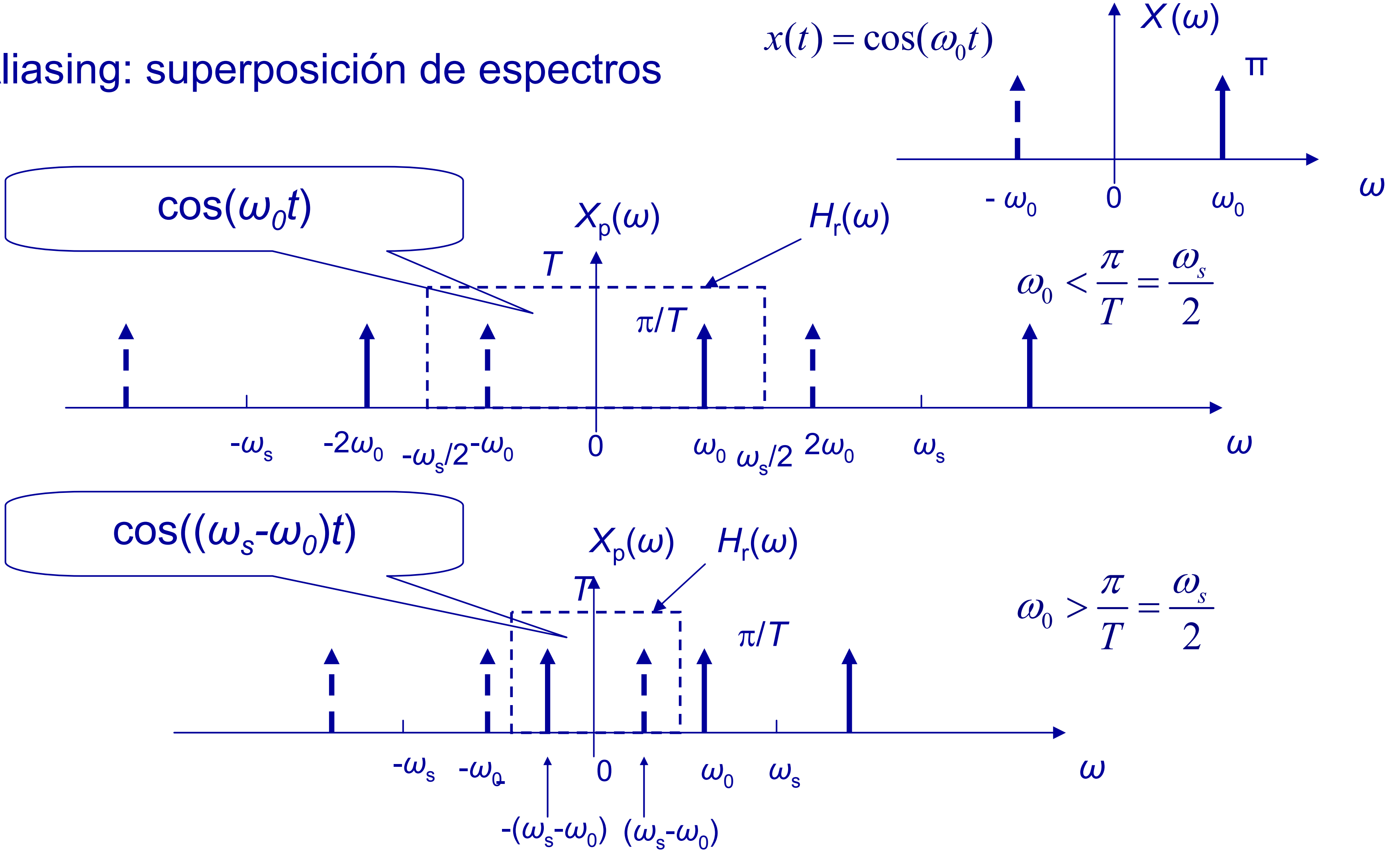
  - La señal original no puede reconstruirse de forma exacta. **Se pierde información** y aparece una serie de información falsa (alias)

  - Si la señal no está limitada en banda de forma estricta, el muestreo puede hacerse al doble de la banda efectiva.

Aliasing sobre una función coseno

Aliasing: superposición de espectros

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)$$

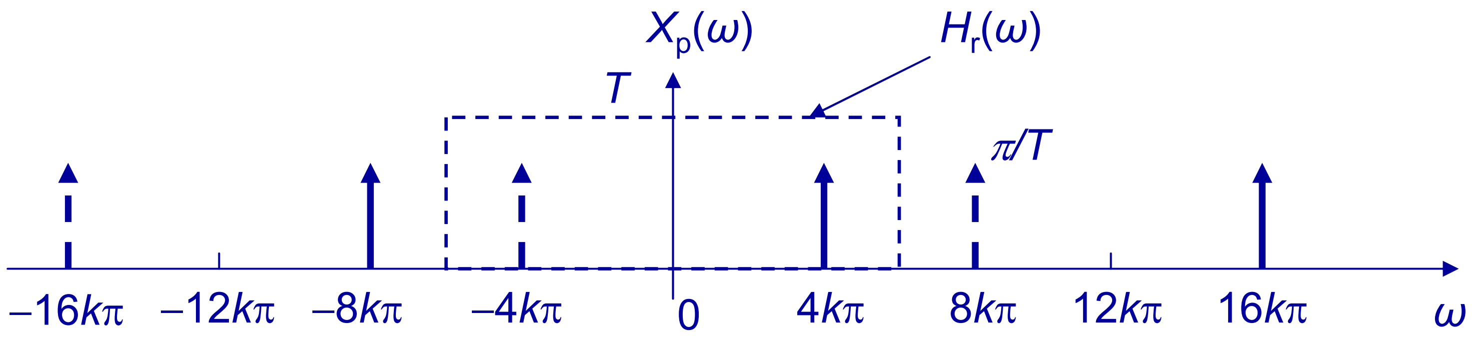


$$\omega_0 < \frac{\pi}{T} = \frac{\omega_s}{2}$$

$$\omega_0 > \frac{\pi}{T} = \frac{\omega_s}{2}$$

Ejemplo

Muestreo de una señal continua $x(t)=\cos(4000\pi t)$
con periodo de muestreo T = 1/6000
y tasa de muestreo $\omega=2\pi/T$



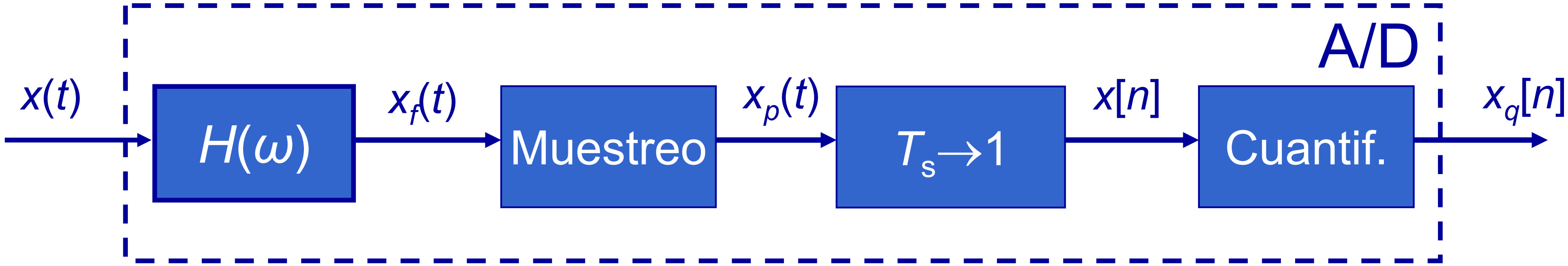
Anti-aliasing. Ideas

- Sólo hay dos posibilidades para evitar el aliasing
  - Muestrear más rápido – a veces no es posible (¿Por qué?).
  - Usar un filtro anti-aliasing

- Un filtro **anti-aliasing** es un filtro **paso-bajo** analógico (LPF) que se aplica a la señal antes del muestreo.
  - La idea es sencilla: quitar las altas frecuencias
  - La respuesta en frecuencia ideal del filtro anti-aliasing es la de un filtro paso-bajo ideal, donde ω_c es la frecuencia de corte
  - Incluso cuando el filtro paso bajo destruye información, es preferible al efecto del aliasing.

Filtrado anti-aliasing

- Diagrama de un sistema de conversión analógico/digital



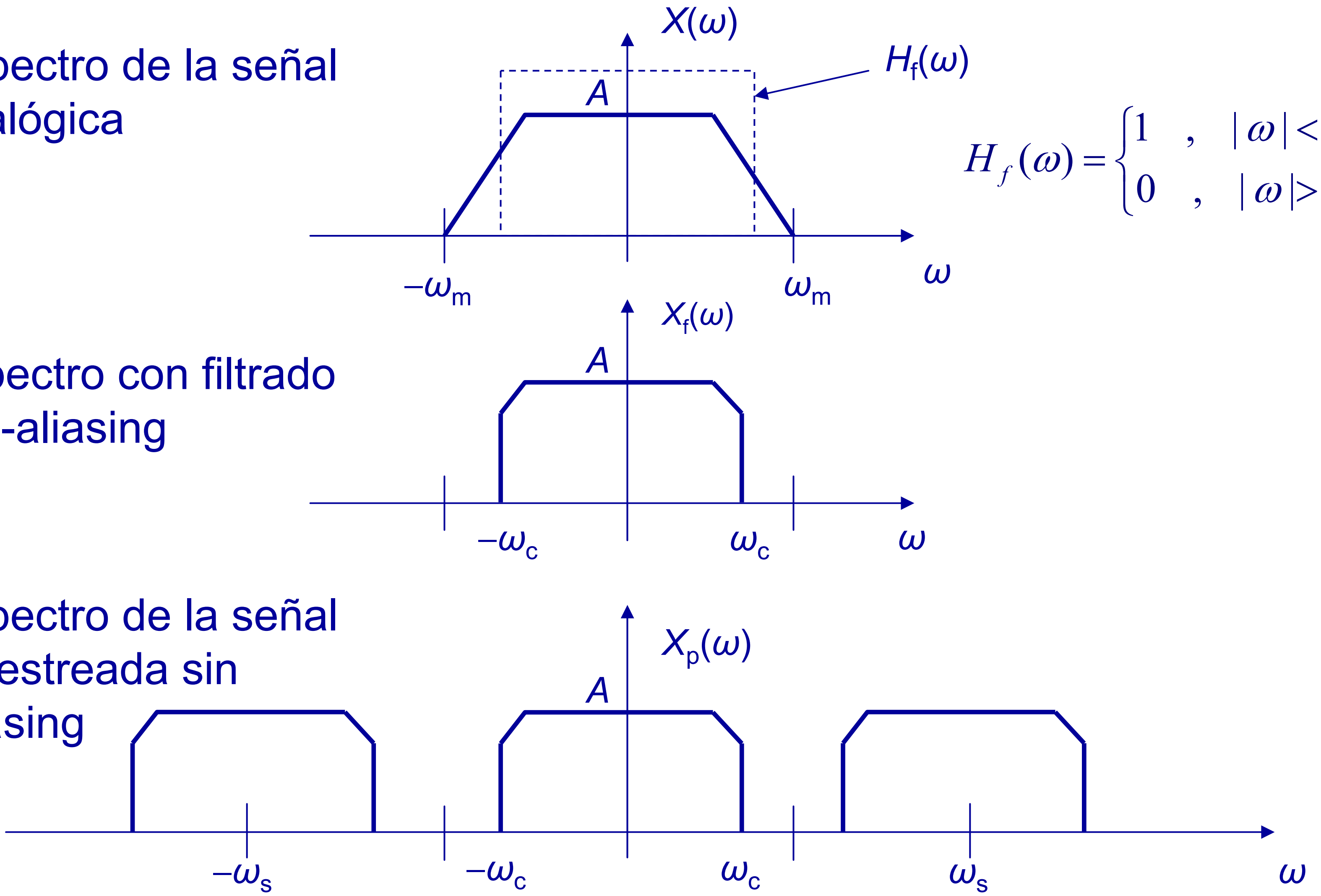
- $H(\omega)$ Ξ **Filtro anti-aliasing** (paso bajo)
- FILTRADO ANTI-ALIASING → Filtro paso bajo
  - Limita en banda la señal de entrada
- MUESTREO → Discretización en el tiempo.
  - Toma de muestras de la señal analógica en instantes determinados de tiempo.
- CUANTIFICACIÓN → Discretización de amplitud.
  - Asignación de los valores de las muestras de la señal analógica a valores discretos, predefinidos, de un conjunto finito de valores.

Filtrado anti-aliasing

Espectro de la señal analógica

Espectro con filtrado anti-aliasing

Espectro de la señal muestreada sin aliasing



$$H_f(\omega) = \begin{cases} 1 \quad , & |\omega| < \omega_c \\ 0 \quad , & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

Anti-aliasing. Ejemplo

Imagen original

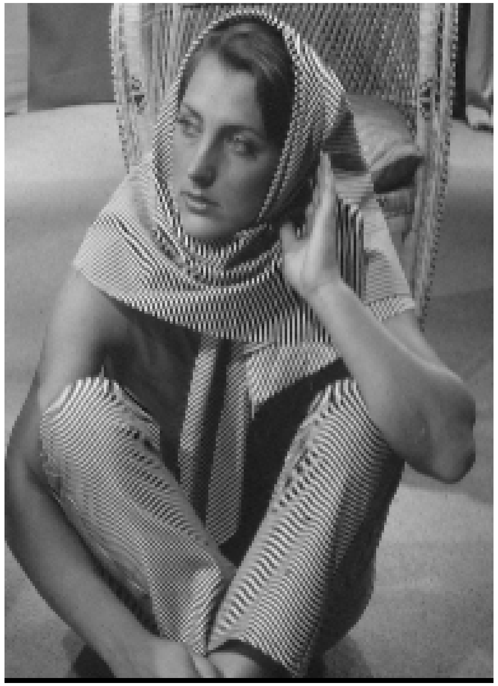
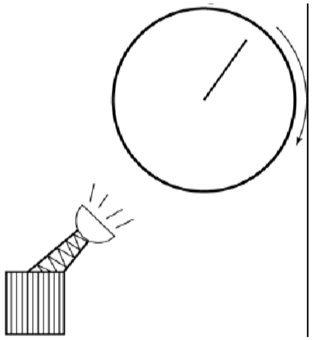
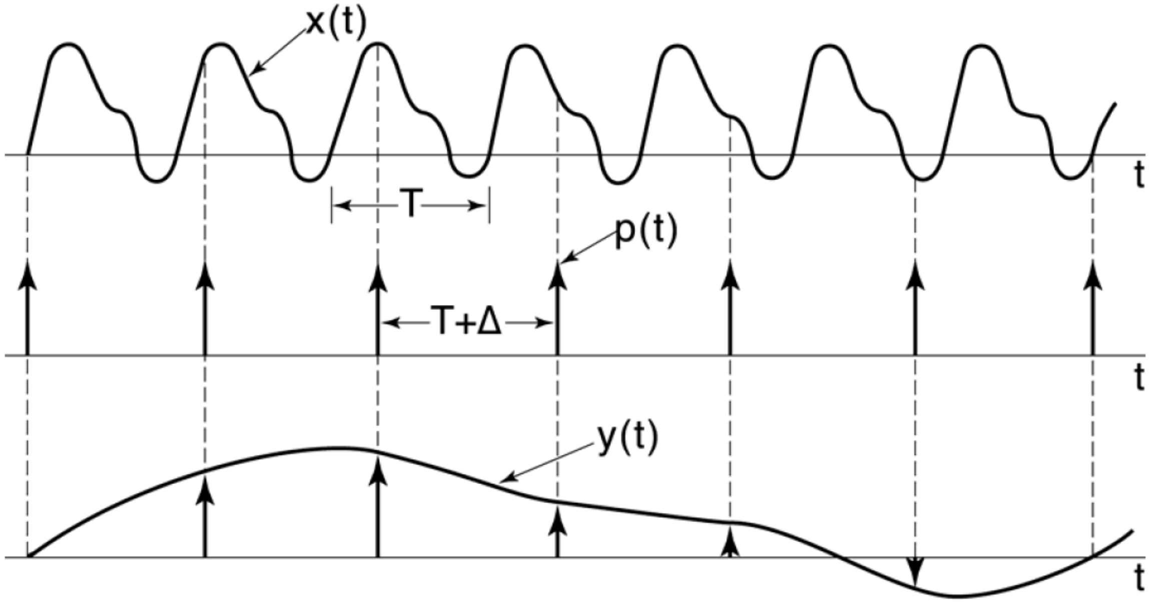


Imagen submuestreada

Imagen con filtrado Anti-aliasing

Ejemplo de submuestreo: el estroboscopio





- $\Delta > 0$, la imagen estroboscópica se desplaza hacia delante, pero a un ritmo inferior.
- $\Delta = 0$, imagen estroboscópica fija.
- $\Delta < 0$, la imagen estroboscópica se desplaza *hacia atrás*.