Ulteriores observaciones - Comunicaciones Digitales

Luca Martino

Francisco J. Rodríguez Ruiz

Apuntes-Laboratorio

no revisados (cuidado!!!)

Parte 1

Consejos para la resolución de problemas

- En muchos problemas, hay que calcular

$$\boxed{p(t) = g(t) * h(t) * f(t)} \longrightarrow \boxed{p(t) = g(t) * f(t) * h(t)}$$

Para los casos de interés, es posible invertir el orden de integración

- Consejo: es mejor calcular antes

$$\boxed{c(t) = g(t) * f(t)}$$

- Hay dos razones para calcular antes esta convolución (que describimos a continuación).

Consejos para la resolución de problemas

- La razones son dos:

➢ el canal h(t) suele expresarse como un tren de deltas (es fácil hacer luego la convolución)

$$\boxed{h(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i \delta(t - \tau_i)}$$

➢ si f(t)=g(-t) la función c(t) es la función de ambigüedad (función de autocorrelación temporal para señales de energía finita) y tiene ciertas propiedades que permiten controlar los cálculos.

$$\boxed{c(t) = r_g(t) = g(t) * g(-t)}$$

Propiedad de la función de ambigüedad

- La función de ambigüedad (función de autocorrelación temporal para señales de energía finita) tiene las siguientes propiedades:

1) $\boxed{r_g(t) = r_g(-t)}$ SIMETRÍA

$$r_g(t) = x(t) * x(-t) = \int g(\tau)g(\tau - t)d\tau = \int g(\tau' + t)g(\tau')d\tau' = r_g(-t)$$

Cambio de variable $\tau' = \tau - t$

$d\tau' = d\tau$

2) $\boxed{r_g(0) = \int g^2(\tau)d\tau = energía \geq 0}$ SIEMPRE POSITIVO EN $\tau = 0$

3) $\boxed{|r_g(0)| \geq |r_g(\tau)|}$ MÁXIMO VALOR EN $\tau = 0$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\left(\int g(\tau)g(\tau - t)d\tau\right)^2 \leq \int g^2(\tau)d\tau \int g^2(\tau - t)d\tau = \int g^2(\tau)d\tau \int g^2(\tau')d\tau' = \left(\int g^2(\tau)d\tau\right)^2$$

$$\left(\int g(\tau)g(\tau - t)d\tau\right)^2 \leq \left(\int g^2(\tau)d\tau\right)^2 \rightarrow \left|\int g(\tau)g(\tau - t)d\tau\right| \leq \left|\int g^2(\tau)d\tau\right|$$

Propiedad de la función de ambigüedad

- Además es interesante notar que

$$\boxed{-1 \leq \frac{r_g(t)}{r_g(0)} \leq 1}$$

Ejemplo

- Consideremos el canal

$$h(t) = \delta(t) + \beta\delta(t - \tau_1)$$

- la respuesta en frecuencia es

$$H(\omega) = 1 + \beta \exp\left\{-j\omega\tau_1\right\}$$

Ejemplo

- Si utilizamos un filtro adaptado, vamos a tener

$$p(t) = g(t) * g(-t) * h(t) = r_g(t) * h(t)$$

$$p(t) = r_g(t) + \beta r_g(t - \tau_1)$$

- y el canal discreto equivalente será

$$\boxed{p[n] = p(t)\big|_{nT} = r_g(nT) + \beta r_g(nT - \tau_1)}$$

Ejemplo

- Ahora, tenemos dos posibilidades:

① Si $\tau_1 = kT$, es decir es un múltiplo del periodo de símbolo

$$\boxed{p[n] = r_g(nT) + \beta r_g(nT - kT) = \delta[n] + \beta\delta[n-k]}$$

Donde estamos suponiendo que rg(t) cumple Nyquist.

② Si τ_1 no es un múltiplo de T, entonces no es tan fácil el cálculo. Hay que calcular

$$\boxed{\beta r_g(nT - \tau_1)}$$

Lo mejor es dibujar esta versión trasladada (puede ayudar).

Parte 2

P(w) "ideal" (teóricamente) para la ausencia de ISI

- Seria un rectángulo en frecuencia con ancho de banda

$$\boxed{W_{\min} = \frac{\pi}{T} = \pi R_s}$$

← Radianes/segundos (banda base)

- Que es el ancho de banda mínimo que nos tenemos que gastar dada una velocidad de transmisión $\boxed{R_s}$ (baudios, símbolo/segundo).
- en el tiempo, significa que utilizamos una Sinc, es decir

$$\boxed{p(t) = \frac{\sin(\pi t / T)}{\pi t / T}}$$

¿Por qué no una Sinc en los casos prácticos?

① No podemos generar en la realidad filtro ideales (rectángulos en frecuencia).

② Lóbulos secundarios muy altos (valor muy alto): aunque consideremos sólo los lóbulos más importantes (es decir cortando en el tiempo la Sinc) necesitamos mucha memoria porque hay bastantes instantes de símbolo donde hay que sumar lóbulos no despreciables (con amplitud lo bastante grande para no ser despreciados).

③ Lóbulos secundarios muy altos (valor muy alto): otro efecto que produce esto, es que hay mucha variabilidad en la forma de onda y esto genera (<u>como se puede notar en el diagrama de ojo</u>) más probabilidad de error si me equivoco en el instante de muestreo etc….

Coseno alzado

- Si gastamos más ancho de banda (**pero a la misma velocidad Rs=1/T**) tenemos más libertad para escoger el pulso p(t).
- Por ejemplo, en el caso de pulsos de coseno alzado

$$\boxed{p(t) = \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}\left(\frac{\cos(\alpha\pi t/T)}{1-(\alpha\pi t/T)^2}\right)} \qquad \boxed{0 \le \alpha \le 1}$$

- ocupamos

$$\boxed{W = (1+\alpha)\frac{\pi}{T} = \frac{\pi}{T} + \alpha\frac{\pi}{T} = W_{\min} + \alpha\frac{\pi}{T}}$$

- más ancho de banda.

Coseno alzado

- Ventaja del coseno alzado: lóbulos secundarios menos amplios (esto significa menos intervalos de símbolo “afectados” realmente, dado que gastamos más ancho de banda), menos variabilidad en la forma de onda (diagrama de ojo más abierto, mayor robustez antes posibles errores en el instante de muestreo etc…).
- <u>Recordamos que idealmente gastando un ancho de banda infinito (y si en canal no está limitado en banda, y no añade distorsión) no tendríamos ISI (por ejemplo utilizando rectángulos de duración T en el tiempo)</u>.