Práctica 2

1. Considere el sistema autorregresivo de orden p (AR(p))

$$x[n] = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k x[n-k] + z[n] \tag{1}$$

donde $z[n]$ es ruido blanco Gaussiano de media nula y varianza σ^2. Genere 2000 muestras de la señal $x[n]$ para diferentes valores de p (por ejemplo, $p = 2, 3, 4, 5$), considerando $\sigma^2 = 1$. Los coeficientes α_k, $k = 1, ..., p$ pueden ser elegidos arbitrariamente (controlando la estabilidad del sistema[1]).

2. Después de haber generado una señal $x[n]$ calcule la estimación de mínimo error cuadrático medio de los coeficientes α_k, siguiendo los siguientes pasos:

   a) Construya la matriz

$$X = \begin{bmatrix} x[0] & x[-1] & ... & x[1-p] \\ x[1] & x[0] & ... & x[2-p] \\ ... & ... & ... & \\ x[N-1] & x[N-2] & ... & x[N-p] \end{bmatrix}_{N\times p} \tag{2}$$

   donde $x[-1], x[-2], ..., x[-p]$ son los valores iniciales (pueden asumirse nulos) y $N = 2000$. Dado el vector $q = [x[1], x[2], ..., x[N]]^T$, el vector de estimaciones estará dado por

$$\hat{\alpha} = (X^T X)^{-1} X^T q. \tag{3}$$

   Compruebe el error cometido en la estimación de los coeficientes. ¿Qué relación hay con la varianza del ruido σ^2?

3. Repita el apartado anterior (estimando también la varianza del ruido) utilizando el algoritmo recursivo *Levison-Durbin*:

   - $E(0) = r_{xx}(0)$.
   - Para $i = 1, ..., p$ repetir:
   - $\Delta(i-1) = r_{xx}(i) - \sum_{k=1}^{i-1} \hat{\alpha}_k^{(i-1)} r_{xx}(i-k)$,
   - $\Omega(i) = -\frac{\Delta(i-1)}{E(i-1)}$,
   - $\hat{\alpha}_i^{(i)} = \Omega(i)$,
   - $\hat{\alpha}_j^{(i)} = \hat{\alpha}_j^{(i-1)} - \Omega(i)\hat{\alpha}_{i-j}^{(i-1)}$, for $j = 1, ..., i-1$,
   - $E(i) = (1 - \Omega(i)^2)E(i-1)$.

   ($E(p)$ será una estimación de la varianza del ruido)

[1] Todos los polos tienen que tener módulo menor o igual a 1.