TEMA 4: LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

SEÑALES Y SISTEMAS

José Luis Rojo Álvarez
Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones - Universidad Rey Juan Carlos
joseluis.rojo@urjc.es

Grado en Ingeniería en Sistemas de Telecomunicación
Grado en Ingeniería en Telemática
Grado en Ingeniería en Tecnologías de la Telecomunicación

Esquema de la Presentación

1. **La Transformada de Laplace**
   - Introducción
   - Región de convergencia
   - Transformada inversa de Laplace
2. Propiedades de la TL
3. Análisis de SLIT con TL
4. TL Unilateral
5. Bibliografía

La Transformada de Laplace

Introducción

- La TF es una herramienta muy útil para el estudio de los SLIT. Partíamos de que las exponenciales e^{st} son autofunciones, y la TF se obtenía para $s = j\omega$.
- Ahora bien, hay casos en los que es posible hacer un estudio más general de ciertos sistemas partiendo de $s = \sigma + j\omega$. Una de las principales aplicaciones es el análisis de las condiciones de estabilidad de los SLIT.
- La Transformada de Laplace es una generalización de la Transformada de Fourier.
- Aplicaciones: estudio de estabilidad en sistemas realimentados, diseño de filtros, transformación de ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas.

Definición de la Transformada de Laplace

- La respuesta de un SLIT con respuesta al impulso $h(t)$ a $x(t) = e^{st}$ es $y(t) = H(s)e^{st}$, donde $H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt$.
- Para valores generales de s, $H(s)$ se conoce como Transformada de Laplace de la respuesta al impulso $h(t)$. La TL de una señal general $x(t)$ se define como:

$$X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt; \quad x(t) \xrightarrow{TL} X(s)$$

La Transformada de Laplace

Transformada de Laplace y Transformada de Fourier

- En general, $s = \sigma + j\omega$. Cuando $s = j\omega$, la TL nos da la TF,

$$X(s)_{|s=j\omega} = X(j\omega)$$

- Para el caso general, podemos relacionar la TL y la TF como sigue:

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x(t)e^{-\sigma t}\right) e^{-j\omega t}dt$$

es decir, la TL de $x(t)$ es la TF de $x(t)e^{-\sigma t}$.

Example

- Sea la señal $x(t) = e^{-at}u(t)$. Habíamos visto que su TF converge para $a > 0$, y es $X(j\omega) = \frac{1}{j\omega+a}$.

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(\sigma+a)t}e^{-j\omega t}dt =_{(\sigma+a>0)} \frac{1}{(\sigma+a)+j\omega}$$

$$x(t) = e^{at}u(t) \xrightarrow{TL} X(s) = \frac{1}{s+a}, \text{ con } Re(s) > -a$$

La Transformada de Laplace

Example

- Sea la señal $x(t) = -e^{-at}u(-t)$. Su TL se obtiene como sigue:

$$X(s) = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(-t)e^{-st}dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-(s+a)t}dt =_{(\sigma+a<0)} \frac{1}{s+a}$$

$$x(t) = -e^{-at}u(-t) \xrightarrow{TL} X(s) = \frac{1}{s+a}, \text{ con } Re(s) < -a$$

Región de convergencia

- Así como la TF no converge para todas las señales, la TL puede converger para algunos valores de $Re(s)$ pero no para otros. Para $\sigma = 0$, la TL nos da la TF, si es que existe.
- Definimos la ROC (region of convergence) como los valores de s para los cuales la TL converge.
- La expresión de la TL en ambos ejemplos es la misma, pero la ROC es diferente.

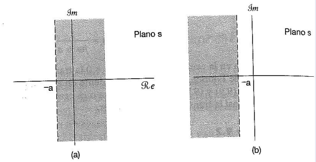


Figura 9.1 (a) ROC del ejemplo 9.1; (b) ROC del ejemplo 9.2.

La Transformada de Laplace

Example

- Sea la señal $x(t) = 3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)$.
- Su TL se obtiene utilizando los ejemplos anteriores:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(3e^{-2t} - 2e^{-t}\right) u(t)e^{-st}dt =$$

$$= 3\int_{-\infty}^{\infty} 3e^{-2t}u(t)e^{-st}dt - 2\int_{-\infty}^{\infty} 2e^{-t}u(t)e^{-st}dt = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1}$$

teniendo en cuenta que para que cada integral converja, es necesario que $Re(s) > -1$ y $Re(s) > -2$. Han de cumplirse ambas, por tanto:

$$x(t) = 3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t) \xrightarrow{TL} \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1}, \text{ con } Re(s) > -1$$

Ejercicio

- Demostrar que

$$x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}\cos(3t)u(t) \xrightarrow{TL} \frac{2s^2 + ts + 12}{(s^2 + 2s + 10)(s+2)}, \text{ con } Re(s) > -1$$

La Transformada de Laplace

Example

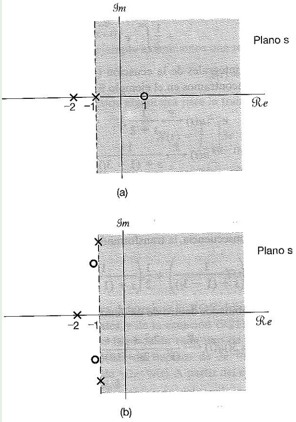


Figura 9.2 Representación en el plano s de las transformadas de Laplace para (a) el ejemplo 9.3 y (b) el ejemplo 9.4. Cada "$\times$" en estas figuras marca la ubicación de un polo de la transformada de Laplace correspondiente, es decir, la raíz del denominador. De manera similar, cada marca "o" indica un cero, una raíz del numerador. La región sombreada indica la ROC.

La Transformada de Laplace

TL racionales

- En los ejemplos anteriores, $X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ es una expresión racional, lo que sucederá cuando $x(t)$ sea combinación lineal de exponenciales reales y complejas. También los SLIT especificados mediante EDOs serán racionales.
- Salvo un factor de escala, marcar las raíces del numerador (ceros) y del denominador (polos) en la ROC determina la TL, siempre que incluyamos la ROC: *diagrama de polos y ceros*.
- Si el orden del numerador es diferente que el orden del denominador, el sistema tendrá polos o ceros en el infinito.

Ejercicio

- Demostrar que

$$x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t) \xrightarrow{TL} \frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)}, \text{ con } Re(s) > 2$$

Región de convergencia

Propiedades de la ROC (I)

- *Propiedad 1.* La ROC de $X(s)$ consiste en bandas paralelas al eje $j\omega$ del plano s.
  - Esto se debe a que la ROC de la TL son los valores de s para los que la TF de $x(t)e^{-\sigma t}$ es absolutamente integrable, esto es, $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma t}dt < \infty$.
- *Propiedad 2.* Para TL racionales, la ROC no contiene ningún polo.
- *Propiedad 3.* Si $x(t)$ es de duración finita y absolutamente integrable, entonces la ROC es el plano s completo.
- *Propiedad 4.* Si $x(t)$ es una señal a derechas ($x(t) = 0$ para $t < T_1$), y si la línea $Re(s) = \sigma_0$ está en la ROC, entonces todos los valores de s para los que $Re(s) > \sigma_0$ están en la ROC.
- *Propiedad 5.* Si $x(t)$ es una señal a izquierdas ($x(t) = 0$ para $t > T_1$), y si la línea $Re(s) = \sigma_0$ está en la ROC, entonces todos los valores de s para los que $Re(s) < \sigma_0$ están en la ROC.
- *Propiedad 5.* Si $x(t)$ es una señal bilateral, y si la línea $Re(s) = \sigma_0$ está en la ROC, entonces la ROC consistirá en una banda de s que incluye la línea $Re(s) = \sigma_0$.

Región de convergencia

Propiedades de la ROC (II)

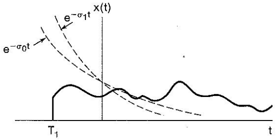


Figura 9.7 Si $x(t)$ es derecha y $x(t)e^{-\sigma_0 t}$ es absolutamente integrable, entonces $x(t)e^{-\sigma_1 t}$, $\sigma_1 > \sigma_0$ también será absolutamente integrable.

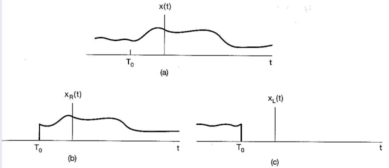


Figura 9.9 Señal bilateral dividida en la suma de una señal derecha y una izquierda: (a) señal bilateral $x(t)$; (b) la señal derecha igual a $x(t)$ para $t > T_0$ e igual a 0 para $t < T_0$; (c) la señal izquierda igual a $x(t)$ para $t < T_0$ e igual a 0 para $t > T_0$.

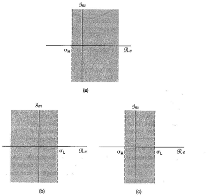


Figura 9.10 (a) ROC de $x_R(t)$ en la figura 9.9; (b) la ROC de $x_L(t)$ en la figura 9.9; (c) ROC de $x(t) = x_R(t) + x_L(t)$, suponiendo que las ROC en (a) y (b) se traslapan.

Región de convergencia

Propiedades de la ROC (III)

- *Demostración de la Propiedad 3.* Supongamos que $x(t)$ es absolutamente integrable, $\int_{T_1}^{T_2} |x(t)|dt = k_x < \infty$. Para que $s = \sigma + j\omega$ esté en la ROC, $x(t)e^{-\sigma t}$ ha de ser absutamente integrable, esto es,

$$I = \int_{T_1}^{T_2} |x(t)|e^{-\sigma t}dt < \infty$$

Para $\sigma = 0$ se cumple que $I < k_x$. Para $\sigma > 0$, hacemos $T = max(T_1, T2)$, y para $\sigma < 0$ hacemos $T = min(T_1, T2)$. En ambos casos:

$$I \leq \int_{T_1}^{T_2} |x(t)|e^{-\sigma T}dt = e^{-\sigma T}k_x < \infty$$

Por tanto, la ROC es todo el plano s.

- *Demostración de la Propiedad 4.* Sabemos que $\int_{T_1}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma_0 t}dt = k_0 < \infty$. Como $\sigma_1 > \sigma_0$, tenemos que:

$$\int_{T_1}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma_1 t}dt = \int_{T_1}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma_0 t}e^{-(\sigma_1-\sigma_0 t}dt \leq e^{-(\sigma_1-\sigma_0 T_1}k_0$$

Región de convergencia

Ejercicios

- Demostrar que la ROC de $x(t) = e^{-at}$ es el plano s.
- Encontrar el diagrama de polos y ceros de $x(t) = e^{-b|t|}$: (a) para $b > 0$; (b) para $b \leq 0$.

Example

- Sea $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$, con el patrón de polos y ceros mostrado en la figura.
- Las señales en los paneles (c) y (d) no tienen TF, ¿por qué?

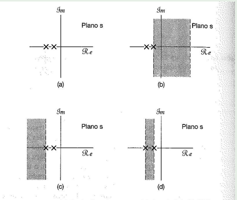


Figura 9.13 (a) Patrón de polos y ceros del ejemplo 9.8; (b) ROC correspondiente a una secuencia derecha; (c) ROC correspondiente a una secuencia izquierda; (d) ROC correspondiente a una secuencia bilateral.

Transformada inversa de Laplace

Transformada inversa de Laplace

- La TL de $x(t)$ es la TF de $x(t)e^{-\sigma t}$ para los valores de s en la ROC:

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x(t)e^{-\sigma t} \right) e^{-j\omega t} dt$$

- Podemos invertir esta relación utilizando la transformada inversa de Fourier:

$$x(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{j\omega t} d\omega \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\omega) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega$$

- Así, para recuperar $x(t)$ integramos su TL en una región con σ fija (cualquiera, siempre que esté en la ROC) y para todo ω.
- Haciendo el cambio de variable $s = \sigma + j\omega$ y teniendo en cuenta que σ es constante, $ds = jd\omega$, y obtenemos la transformada inversa de Laplace:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} X(s) e^{st} ds$$

- Así, $x(t)$ puede verse como una suma ponderada de exponenciales complejas.
- Para transformadas racionales (son las que vemos aquí), utilizamos expansión en fracciones parciales.

Transformada inversa de Laplace

Example

- Suponiendo todos los polos de orden 1 y que el orden del polinomio del denominador es mayor que el del numerador,

$$X(s) = \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{s + a_i}$$

- A partir de la ROC de $X(s)$ se puede inferir la ROC de cada término individual.
- Hay dos posibilidades:
  1. Si la ROC está a la derecha del polo en $s = -a_i$, la TIL del término es a derechas, $A_i e^{-a_i t} u(t)$.
  2. Si la ROC está a la izquierda del polo en $s = -a_i$, la TIL del término es a derechas, $-A_i e^{-a_i t} u(-t)$.

Ejercicios

- Obtener la TIL de $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$, para $Re(s) > -1$.
- Obtener la TIL de $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$, para $Re(s) < -2$.
- Obtener la TIL de $X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$, para $-2 < Re(s) < -1$.

Esquema de la Presentación

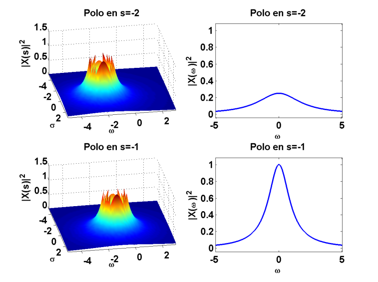
Propiedades de la TL

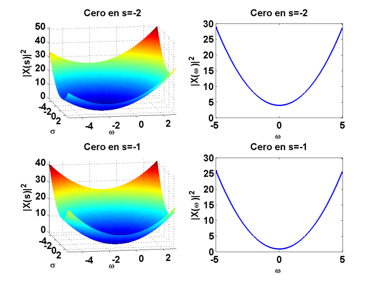
Evaluación aproximada de la TF según la TL

- El efecto que tienen los polos (ceros) de la TL es aumentar (disminuir) el módulo de la TF (más cuanto más cerca está el polo del eje $j\omega$.

Example

- Sistemas de orden 1, dados por un polo (cero) en $s = -2$ y en $s = -1$.





Propiedades de la TL

Tabla de propiedades de la TL

TABLA 9.1 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Sección	Propiedad	Señal	Transformada de Laplace	ROC
		$x(t)$ $x_1(t)$ $x_2(t)$	$X(s)$ $X_1(s)$ $X_2(s)$	R R_1 R_2
9.5.1	Linealidad	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(s) + bX_2(s)$	Al menos $R_1 \cap R_2$
9.5.2	Desplazamiento en tiempo	$x(t - t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$	R
9.5.3	Desplazamiento en el dominio de s	$e^{s_0 t}x(t)$	$X(s - s_0)$	Versión desplazada de R (es decir, s está en la ROC si $s - s_0$ está en R)
9.5.4	Escalamiento en tiempo	$x(at)$	$\frac{1}{\|a\|}X\left(\frac{s}{a}\right)$	ROC escalada (es decir, s está en la ROC si s/a está en R)
9.5.5	Conjugación	$x^*(t)$	$X^*(s^*)$	R
9.5.6	Convolución	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	Al menos $R_1 \cap R_2$
9.5.7	Diferenciación en el dominio del tiempo	$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)$	Al menos R
9.5.8	Diferenciación en el dominio de s	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$	R
9.5.9	Integración en el dominio del tiempo	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d(\tau)$	$\frac{1}{s}X(s)$	Al menos R $\cap$ $\{\mathcal{R}e\{s\} > 0\}$

Teoremas del valor inicial y final

9.5.10 Si $x(t) = 0$ para $t < 0$ y $x(t)$ no contiene impulsos o funciones singulares de orden superior en $t = 0$, entonces

$$x(0^+) = \lim_{x\to\infty} sX(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

Propiedades de la TL

Ejercicios

- *Linealidad.* Calcule la TF de $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$, donde $X_1(s) = \frac{1}{s+1}$ para $Re(s) > -1$ y $X_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$ para $Re(s) > -1$. Compare la ROC con las ROCs de las señales de partida.
- *Diferenciación en s.* Obtener la TL de $x(t) = te^{-at}u(t)$ partiendo de la TL de $r(t) = e^{-at}u(t)$ y de la propiedad de diferenciación.
- Obtener la TIL de

$$X(s) = \frac{2s^2 + 5s + 5}{(s+1)^2(s+2)}, \text{ con } Re(s) > -1$$

- *Teoremas de valor inicial y final.* Comprobar ambos teoremas para:

$$x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}\cos(3t)u(t) \xrightarrow{TL} \frac{2s^2 + ts + 12}{(s^2 + 2s + 10)(s+2)}, \text{ con } Re(s) > -1$$

Propiedades de la TL

Algunos pares de TL

TABLA 9.2 TRANSFORMADAS DE LAPLACE DE FUNCIONES ELEMENTAL

Par de transformadas	Señal	Transformada	ROC
1	$\delta(t)$	1	Toda s
2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re e\{s\} > 0$
3	$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re e\{s\} < 0$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re e\{s\} > 0$
5	$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}u(-t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re e\{s\} < 0$
6	$e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\Re e\{s\} > -\alpha$
7	$-e^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\Re e\{s\} < -\alpha$
8	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\Re e\{s\} > -\alpha$
9	$-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\alpha t}u(-t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$	$\Re e\{s\} < -\alpha$
10	$\delta(t-T)$	e^{-sT}	Toda s
11	$[\cos \omega_0 t]\,u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\Re e\{s\} > 0$
12	$[\operatorname{sen} \omega_0 t]\,u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\Re e\{s\} > 0$
13	$[e^{-\alpha t}\cos \omega_0 t]\,u(t)$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\Re e\{s\} > -\alpha$
14	$[e^{-\alpha t}\operatorname{sen} \omega_0 t]\,u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2+\omega_0^2}$	$\Re e\{s\} > -\alpha$
15	$u_n(t) = \frac{d^n\delta(t)}{dt^n}$	s^n	Toda s
16	$u_{-n}(t) = \underbrace{u(t) * \cdots * u(t)}_{n \text{ veces}}$	$\frac{1}{s^n}$	$\Re e\{s\} > 0$

Esquema de la Presentación

Análisis de SLIT con TL

Propiedades de SLIT mediante TL

- A partir de la propiedad de convolución, tenemos que $Y(s) = H(s)X(s)$.
- *Causalidad.* La ROC de la función del sistema para un sistema causal es el semiplano derecho.
  1. Nótese que el recíproco no es cierto: un semiplano derecho en la ROC no garantiza causalidad, solo que la respuesta al impulso es a derechas.
  2. Para un sistema con función del sistema racional, causalidad equivale a que la ROC sea el semiplano derecho más allá del polo más a la derecha.
- *Estabilidad.* Un SLIT es estable si y solo si la ROC de su función del sistema contiene el eje $j\omega$.
- Un sistema causal con $H(s)$ racional es estable si y solo si todos sus polos tienen parte real negativa.

Ejercicios

- Sea el sistema dado por $h(t) = e^{-t}u(t)$. Estudiar su causalidad a partir de $H(s)$.
- Sea el sistema dado por $h(t) = e^{-|t|}$. Estudiar su causalidad a partir de $H(s)$.
- Estudiar la causalidad del sistema dado por $H(s) = \frac{e^s}{s+1}$, con $Re(s) > -1$.
- Sea el SLIT dado por $H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)}$. Encontrar la ROC y la respuesta al impulso cuando el sistema es: (a) causal; (b) estable; (c) anticausal y no estable.

Análisis de SLIT con TL

SLIT caracterizados por EDOs

- Los SLIT caracterizados por EDOs tienen la forma general:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{l=0}^{M} b_l \frac{d^l y(t)}{dt^l}$$

- Aplicando la TL en ambos miembros y usando linealidad y diferenciación:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y(s) = \sum_{l=0}^{M} b_l s^l X(s) \Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{l=0}^{M} b_l s^l}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$$

- Por tanto, los ceros (polos) son las raíces del numerador (denominador).
- Para inferir la ROC necesitamos conocer la causalidad o la estabilidad.

Ejercicios

- Encuentre la TL y la respuesta al impulso del SLIT caracterizado por:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$$

Análisis de SLIT con TL

Ejercicios

- Un circuito en reposo inicial está definido por la ecuación:

$$RC\frac{dy(t)}{dt} + LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + y(t) = x(t)$$

Encontrar su función de transferencia, analizar su estabilidad en función de R, L y C, y encontrar su respuesta al impulso.

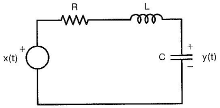


Figura 9.27 Circuito serie *RLC*.

- Sabiendo que un SLIT responde a $x(t) = e^{-3t}u(t)$ con $y(t) = \left(e^{-t} - e^{-2t}\right)u(t)$, encontrar su función del sistema y analizar sus propiedades. Encontrar la EDO que caracteriza al sistema.
- Encontrar $H(s)$ para un SLIT sabiendo que:
  1. El sistema es causal.
  2. $H(s)$ es racional y tiene solo dos polos ($s = -2$ y $s = 4$).
  3. Si $x(t) = 1$, entonces $y(t) = 0$.
  4. $h(0^+) = 4$.

Análisis de SLIT con TL

Ejercicio

- Sea un SLIT estable y causal, con $h(t)$ y $H(s)$. Sabemos que $H(s)$ es racional, tiene un polo en $s = -2$ y no tiene un cero en el origen. Determinar si los siguientes enunciados son ciertos, falsos, o no tenemos suficiente información:
  1. La TF de $h(t)e^{3t}$ converge.
  2. $\int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt = 0$.
  3. $th(t)$ es la respuesta al impulso de un sistema causal y estable.
  4. $dh(t)/dt$ contiene al menos un polo en su TL.
  5. $h(t)$ tiene duración finita.
  6. $H(s) = H(-s)$.
  7. $lim_{s\to\infty} H(s) = 2$.

Análisis de SLIT con TL

Análisis de asociación de SLIT

- Si dos SLIT se interconectan en paralelo:

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) \Rightarrow H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$

- Si dos SLIT se interconectan en serie:

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) \Rightarrow H(s) = H_1(s)H_2(s)$$

- Si dos SLIT se interconectan de forma realimentada:

$$Y(s) = H_1(s)E(s); \quad E(s) = X(s) - Z(s); \quad Z(s) = H_2(s)Y(s)$$

$$Y(s) = H_1(s)\left(X(s) - H_2(s)Y(s)\right) \Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$

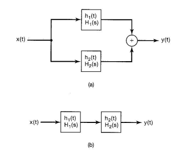


Figura 9.30 (a) Conexión en paralelo de dos sistemas LTI; (b) conexión en serie de dos sistemas LTI.

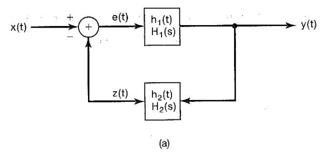


Figura 9.31 Interconexión retroalimentada de dos sistemas LTI

Análisis de SLIT con TL

Ejercicios

- Sea el SLIT caracterizado por:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$$

  Dar un diagrama de bloques que utilice realimentación y obtener su TL.

- Sea un SLIT causal caracterizado por:

$$H(s) = \frac{s+2}{s+3} = \left(\frac{1}{s+3}\right)(s+2)$$

  Dar una representación en diagrama de bloques mediante la conexión en serie de dos subsistemas. Dar una representación alternativa en la que no se derive explícitamente la señal.

Esquema de la Presentación

TL unilateral

La TL unilateral

- La TL unilateral es especialmente útil en el análisis de sistemas causales, y también en los sistemas especificados por EDOs que no están en reposo inicial.
- La TLU de $x(t)$ se define como:

$$X_u(s) \triangleq \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

- Incluimos cualquier impulso o singularidad en el origen de tiempos. No depende del pasado, pero sí del estado inicial.
- Dos señales diferentes para $t < 0$ e idénticas para $t \geq 0$ tendrán diferentes TL pero idénticas TLU.
- Toda señal nula para $t < 0$ tiene idénticas TL y TLU.
- La ROC para una TLU debe ser siempre un semiplano derecho.

Cuestiones

- Calcule la TLU de $x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)$.
- Calcule la TL y la TLU de $x(t) = e^{-a(t+1)u(t+1)}$.

TL unilateral

Propiedades de la TLU

TABLA 9.3 PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA UNILATERAL DE LAPLACE

Propiedad	Señal	Transformada unilateral de Laplace
	$x(t)$ $x_1(t)$ $x_2(t)$	$\mathcal{X}(s)$ $\mathcal{X}_1(s)$ $\mathcal{X}_2(s)$
Linealidad	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$a\mathcal{X}_1(s) + b\mathcal{X}_2(s)$
Desplazamiento en el dominio de s	$e^{s_0 t}x(t)$	$\mathcal{X}(s - s_0)$
Escalamiento en tiempo	$x(at), \quad a > 0$	$\frac{1}{a}\mathcal{X}\left(\frac{s}{a}\right)$
Conjugación	$x * (t)$	$x * (s)$
Convolución (suponiendo que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son cero para $t < 0$)	$x_1(t) * x_2(t)$	$\mathcal{X}_1(s)\,\mathcal{X}_2(s)$
Diferenciación en el dominio del tiempo	$\frac{d}{dt}x(t)$	$s\mathcal{X}(s) - x(0^-)$
Diferenciación en el dominio de s	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}\mathcal{X}(s)$
Integración en el dominio del tiempo	$\int_{0^-}^{t} x(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}\mathcal{X}(s)$

Teoremas del valor inicial y final

Si $x(t)$ no contiene impulsos o funciones singulares de orden superior en $t = 0$, entonces

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} s\mathcal{X}(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} s\mathcal{X}(s)$$

- La ROC es siempre el semiplano derecho.
- Cuando tenemos SLIT causales, son válidos los resultados de la TL.

TL unilateral

Propiedades de la TLU

- Nótese que la propiedad de convolución se aplica sólo si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son nulas para $t < 0$.
- Una diferencia importante es la propiedad de diferenciación. Sean $x(t)$ y $X_u(s)$. Integrando por partes, puede verse que la TLU de $z(t) = x'(t)$ es:

$$Z_u(s) = \int_{0^-} \infty \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} = x(t)e^{-st}|_0^\infty + s \int_{0^-} \infty x(t)e^{-st} dt = sX_u(s) - x(0^-)$$

- Aplicando de nuevo los mismos pasos, la TLU de $s(t) = x''(t)$ es:

$$S_u(s) = s^2 X_u(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$$

Ejercicio

- Sea un sistema caracterizado por $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x(t)$, con condiciones iniciales $y(0^-) = \beta, y'(0^-) = \gamma$. Sea la entrada dada por $x(t) = au(t)$. Encontrar la TLU de $y(t)$ y calcular la salida para $\alpha = 2, \beta = 3, \gamma = -5$.

Esquema de la Presentación

Bibliografía

Para seguir aprendiendo

- Capítulo 9. *Señales y sistemas*. A. V. Oppenheim, A.S. Willsky. Pearson Educación. 1997, 2^{a} edición.
- Salvo el apartado 9.4.

Para hacer más problemas

- Los siguientes problemas pueden hacerse adicionalmente a los del boletín:
  - Básicos con respuestas: 9.1, 9.2, 9.3, 9.4, 9.5, 9.6, 9.7, 9.8, 9.9, 9.12, 9.13, 9.14, 9.15, 9.16, 9.17, 9.19, 9.20.

Créditos

- Varias de las figuras de este material han sido tomadas del libro de Oppenheim. Se ha mantenido en casi todas la numeración original para facilitar su localización en el texto y la identificación de los núcleos temáticos correspondientes.