Fourier - Cálculo en Matlab

Periodicidad – Fourier - señales a tiempo discreto

$$X_k = a_k \Longrightarrow \text{período } N$$

$$X(\Omega) \Longrightarrow \text{período } 2\pi$$

$$a_k = a_{k+N}$$

$$X(\Omega) = X(\Omega + 2\pi)$$

Esto es siempre cierto (cuando transformamos una señal x[n] en tiempo discreto).

Periodicidad - Fourier - señales a tiempo discreto

Si $x[n]$ es real, hemos visto que:

$$\boxed{a_k = a^*_{-k}}$$

Como consecuencia:

$$\boxed{P_k = |a_k| \rightarrow P_k = P_{-k}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{a_k = a_{k+N}} \\ \boxed{a_k = a^*_{-k}} \end{array}\right\}$$

genera una simetria par
para P_k cada N/2 ....

Periodicidad - Fourier - señales a tiempo discreto

Si $x[n]$ es real, hemos visto que:

$$\boxed{X(\Omega) = X^*(-\Omega)}$$

Como consecuencia:

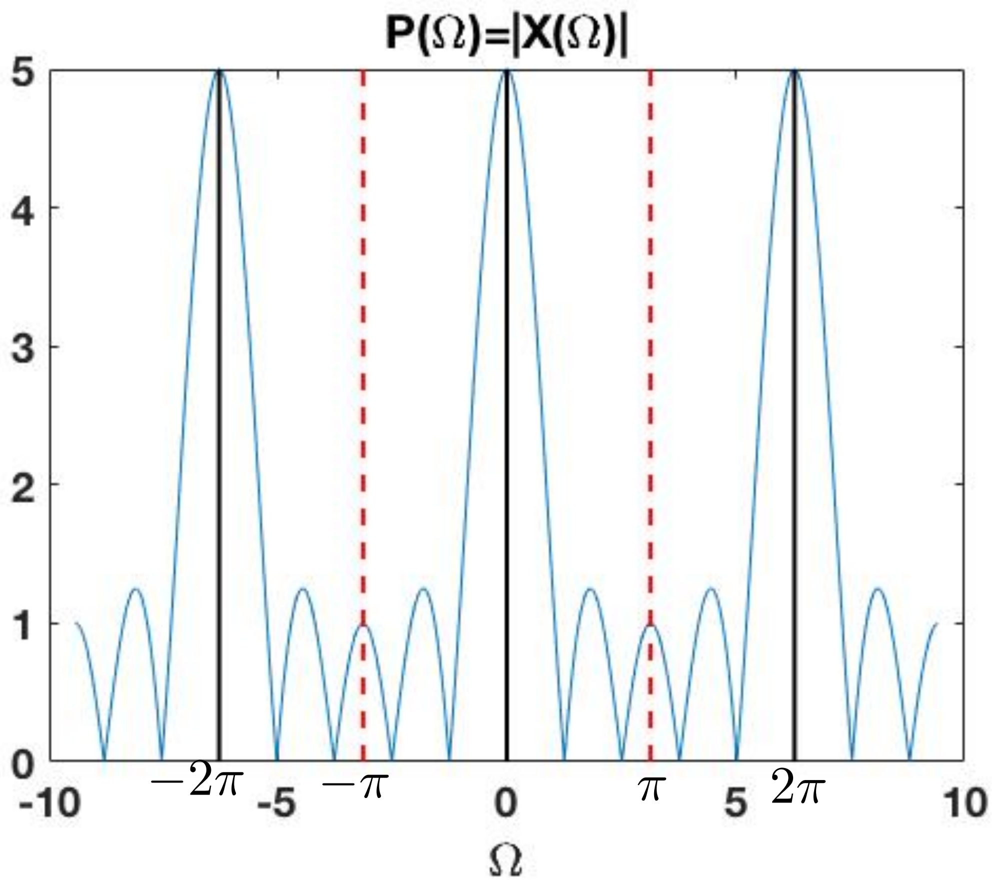
$$\boxed{P(\Omega) = |X(\Omega)| \rightarrow P(\Omega) = P(-\Omega)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{X(\Omega) = X(\Omega + 2\pi)} \\ \boxed{X(\Omega) = X^*(-\Omega)}\end{array}\right\}$$

genera una simetria par para $P(\Omega)$ cada π ....

$$x[n] = \begin{cases} 1 & n = 0, ..., 4 \\ 0 & n \leq -1 \text{ o } n \geq 5 \end{cases}$$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j\Omega n} = \sum_{\boxed{n=0}}^{\boxed{4}} e^{-j\Omega n} = \frac{1 - e^{-j5\Omega}}{1 - e^{-j\Omega}} = \frac{\sin(5\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} e^{-j2\Omega}$$



Tenemos también una simetría cada pi...

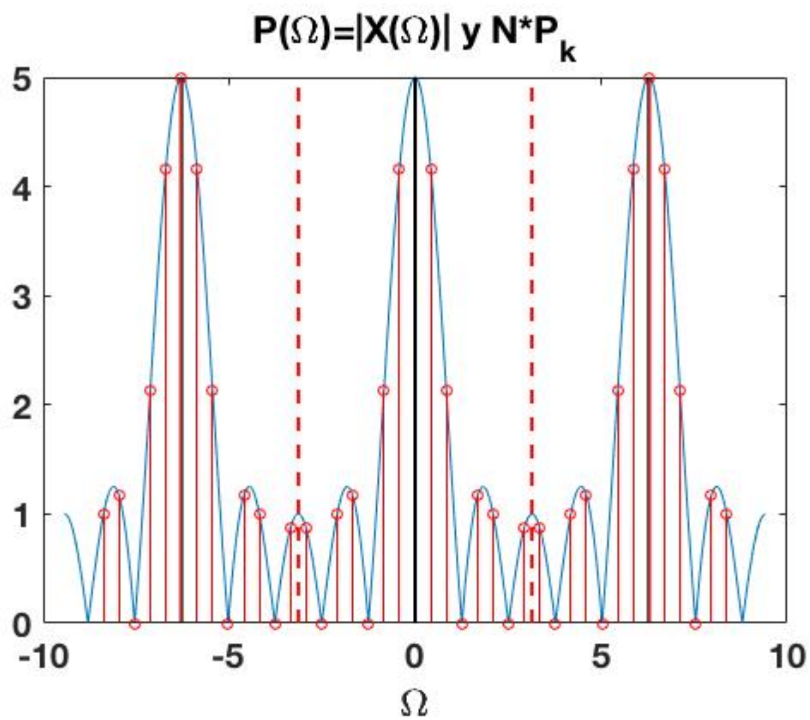
$$x[n] = \begin{cases} 1 & n = 0, ..., 4 \\ 0 & n \leq -1 \;\text{ o }\; n \geq 5 \end{cases}$$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j\Omega n} = \sum_{\boxed{n=0}}^{\boxed{4}} e^{-j\Omega n} = \frac{1-e^{-j5\Omega}}{1-e^{-j\Omega}} = \frac{\sin(5\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} e^{-j2\Omega}$$

$$\boxed{X_k = a_k = \frac{1}{N} X(k\Omega_0) = \frac{1}{N} X\left(k\frac{2\pi}{N}\right)}$$

Decidimos por ejemplo N=15

Recordar que hay un factor N....es muy importante!!!



Tenemos también una simetría cada N/2...

En Matlab

- Nos llega un vector (claramente, una secuencia de números finita). **Digamos de longitud L.**

- Si recordáis las formulas de la Serie de Fourier de una señal discreta y periódica (dos sumas; análisis y síntesis), se puede entender que <u>lo mas fácil (computacionalmente) es interpretar que es un periodo de una señal periódica de periodo N>=L.</u>

- Decimos N>=L porque podemos siempre rellenar con ceros.

- **Esta operación se suele llamar "Discrete Fourier Transform" (DFT),** pero coincide **CASI** exactamente la serie de Fourier de una señal discreta y periódica.

En Matlab – DFT

- **Esta operación se suele llamar “Discrete Fourier Transform” (DFT),** pero coincide **CASI** exactamente la serie de Fourier de una señal discreta y periódica.

- EN LA DFT, EL FACTOR 1/N PASA A ESTAR EN LA ECUACIÓN DE SÍNTESIS (Y SE QUITA DE LA ECUACIÓN DE ANÁLISIS)

Ecuaciones de las SF en TD

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega_0 n} \rightarrow \text{ Ec. síntesis}$$

Este factor pasa arriba en la DFT

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \rightarrow \text{ Ec. análisis}$$

- Son muy parecidas: por esto valen exactamente los mismos resultados que ya hemos obtenidos.

En Matlab – DFT

- EN LA DFT, EL FACTOR 1/N PASA A ESTAR EN LA ECUACIÓN DE SÍNTESIS (Y SE QUITA DE LA ECUACIÓN DE ANÁLISIS)

Ecuaciones de las SF en TD

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega_0 n} \rightarrow$$ Ec. síntesis

Este factor pasa arriba en la DFT

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \rightarrow$$ Ec. análisis

- Hay una razón para hacer esto.... (pensad a la formula que relaciona la SF con TF....)

PRIMERA PARTE

- Definición DFT
- Fast Fourier Transform (FFT= approx DFT)
- Relación DFT con SF de una señal discreta
- Relación DFT con TF de una señal discreta

➢ En esta primera parte, se interpretan las muestras como como una señal discreta (como muestras de una señal discreta).

➢ En la segunda parte, se interpretarán las muestras como obtenidas a través de un muestreo en el tiempo de una señal continua.

Ubicándonos

- Tema 1: Señales y sistemas discretos en el dominio del tiempo
- Tema 2: Señales y sistemas discretos en el dominio de la frecuencia
- Tema 3: Muestreo
- **Tema 4: Fundamentos de la Transformada Discreta de Fourier**
  - 4.1 Definición: la DFT como el muestreo de la Transformada de
  - 4.2 Propiedades
  - 4.3 Convolución circular: definición y relación con la DFT
  - 4.4 La DFT en Matlab
- Tema 5: Transformada Z
- Tema 6: Introducción al diseño de filtros discretos

Muy parecida a la SERIE de Fourier (DFT es otro nombre... tiene una razón de ser; es como si fuera "otra cosa"....luego lo explicamos)

- Comentarios:
  - Tema muy importante (el más difícil de entender)
  - Resumen: los ordenadores sólo pueden calcular DFTs, la DFT puede interpretarse como el muestreo de la TF (no siempre la TF de la señal original, sino la de una versión enventanada de la señal original)
  - Trabajo previo: relación entre la TF de una SD y la TF de un segmento de esa SD

Definición de la DFT

- ¿Se utiliza sobre SC o sobre SD? ¿periódicas o aperiódicas?
- ¿Ecuaciones de análisis y síntesis?

son los a_k multiplicado por N !!!

vamos es la serie de Fourier.... PERO CAMBIANDO LA POSICIÓN 1/N ES DIFERENTE !

La DFT es una transformación discreto a discreto, toma señales discretas de longitud finita y devuelve una señal discreta de longitud finita

$$X_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \qquad k = 0, ..., N-1$$

Ec. de análisis de la DFT

estas ecuaciones empiezan siempre en 0 y terminan en N-1

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_N[k] \cdot e^{+j\frac{2\pi}{N}nk}, \qquad n = 0, ..., N-1$$

Ec. de síntesis de la DFT

- $x[n]$ tiene longitud N (ya veremos qué pasa si no es así), $X_N[k]$ tiene longitud N
- La definición no es única, depende de N ➔ Deberemos decir "DFT de longitud N"
- En ocasiones se utiliza la notación: $W_N := e^{-j\frac{2\pi}{N}} \Rightarrow W_N^{kn} := e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

Puede ser L y luego podriamos añadir ceros... llegando a un N>L

Cálculo de la DFT

COMO LA SERIE DE FOURIER.......... a menos de un factor 1/N;

- Son parecidas a las ecuaciones de la TF, pero más fáciles de calcular
  - ¿Cuánto vale la DFT en 0? $$X_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \qquad k = 0, ..., N-1$$

$$X_N[0] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}0n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j0} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]$$

Suma de valores de x[n]!!

COMO LA SERIE DE FOURIER...... a menos de un factor 1/N; estos serian los ak multiplicados por N

  - Supongamos que N=4 ¿cuánto vale la DFT en 0, 1, 2, 3?

$$X_4[0] = \sum_{n=0}^{3} x[n] = x[0] + x[1] + x[2] + x[3]$$

$$\begin{aligned} X_4[1] &= \sum_{n=0}^{3} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}1n} = \sum_{n=0}^{3} x[n] \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}n} = \sum_{n=0}^{3} x[n] \cdot (e^{-j\frac{\pi}{2}})^n \sum_{n=0}^{3} x[n] \cdot (-j)^n \\ &= x[0](-j)^0 + x[1](-j)^1 + x[2](-j)^2 + x[3](-j)^3 = x[0] - x[1]j - x[2] + x[3]j \end{aligned}$$

COMO LA SERIE DE FOURIER...... a menos de un factor 1/N; estos serian los ak multiplicados por N

Cálculo de la DFT

- Supongamos que $N=4$ ¿cuánto vale la DFT de cualquier señal en 0, 1, 2, 3?

$$X_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \qquad k = 0, ..., N-1$$

$$X_4[0] = \sum_{n=0}^{3} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}0n} = \sum_{n=0}^{3} x[n] \cdot 1 = x[0] + x[1] + x[2] + x[3]$$

$$\begin{aligned} X_4[1] &= \sum_{n=0}^{3} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}1n} = \sum_{n=0}^{3} x[n] \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}n} = \sum_{n=0}^{3} x[n] \cdot (e^{-j\frac{\pi}{2}})^n \sum_{n=0}^{3} x[n] \cdot (j)^n \\ &= x[0](-j)^0 + x[1](-j)^1 + x[2](-j)^2 + x[3](-j)^3 = x[0] - x[1]j - x[2] + x[3]j \end{aligned}$$

COMO LA SERIE DE FOURIER.... ..... a menos de un factor 1/N; estos serian los ak multiplicados por N

$$X_4[2] = \sum_{n=0}^{3} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}2n} = \sum_{n=0}^{3} x[n] \cdot (e^{-j\pi})^n = x[0] + x[1](-1) + x[2](-1)^2 + x[3](-1)^3$$

$$X_4[3] = \sum_{n=0}^{3} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}3n} = \sum_{n=0}^{3} x[n] \cdot (e^{-j\frac{3\pi}{2}})^n = x[0] + x[1]j + x[2]j^2 + x[3]j^3$$

Cada punto de la DFT se obtiene realizando N sumas y N multiplicaciones

➔ En total necesitamos N^2 sumas y N^2 multiplicaciones

COMO LA SERIE DE FOURIER.... ..... a menos de un factor 1/N; estos serian los ak multiplicados por N

Cálculo de la DFT: Ejemplos

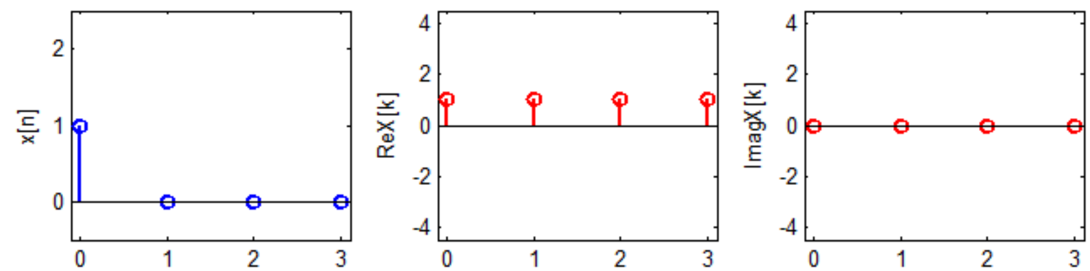
- DFT de longitud 4 de las siguientes señales:

$$X_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \qquad k = 0, \dots, N-1$$

$$\begin{aligned} X_4[0] &= x[0] + x[1] + x[2] + x[3] \\ X_4[1] &= x[0] + x[1](-j) + x[2](-j)^2 + x[3](-j)^3 \\ X_4[2] &= x[0] + x[1](-1) + x[2](-1)^2 + x[3](-1)^3 \\ X_4[3] &= x[0] + x[1]j + x[2]j^2 + x[3]j^3 \end{aligned}$$

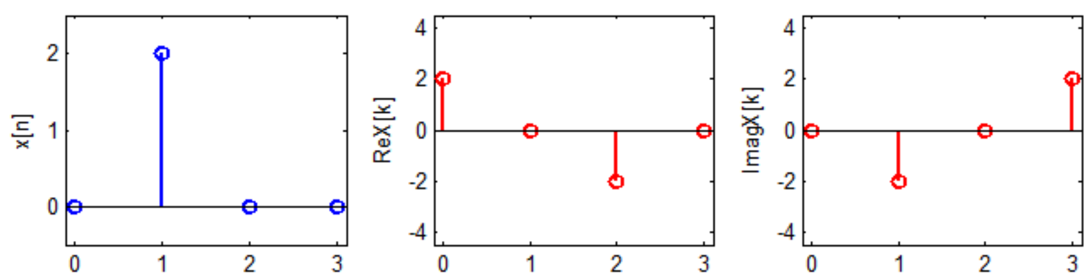
- a) $x[n] = \delta[n]$

$$\begin{aligned} X_4[0] &= 1 \\ X_4[1] &= 1 \\ X_4[2] &= 1 \\ X_4[3] &= 1 \end{aligned}$$



- b) $x[n] = 2\delta[n-1]$

$$\begin{aligned} X_4[0] &= 2 \\ X_4[1] &= -2j \\ X_4[2] &= -2 \\ X_4[3] &= 2j \end{aligned}$$



Cálculo de la DFT: Ejemplos

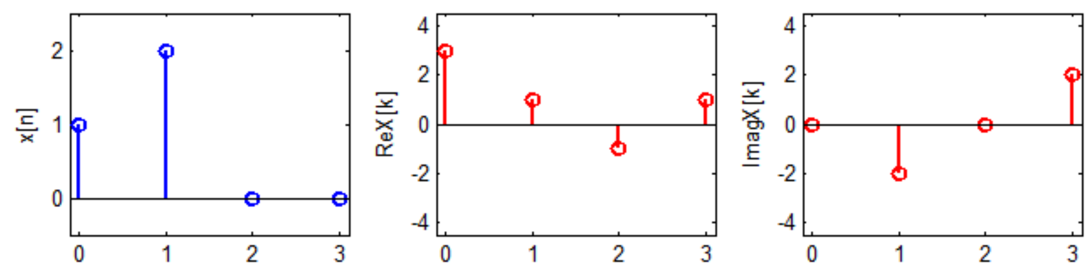
- DFT de longitud 4 de las siguientes señales:

$$X_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \qquad k = 0, ..., N-1$$

$$\begin{aligned} X_4[0] &= x[0] + x[1] + x[2] + x[3] \\ X_4[1] &= x[0] + x[1](-j) + x[2](-j)^2 + x[3](-j)^3 \\ X_4[2] &= x[0] + x[1](-1) + x[2](-1)^2 + x[3](-1)^3 \\ X_4[3] &= x[0] + x[1]j + x[2]j^2 + x[3]j^3 \end{aligned}$$

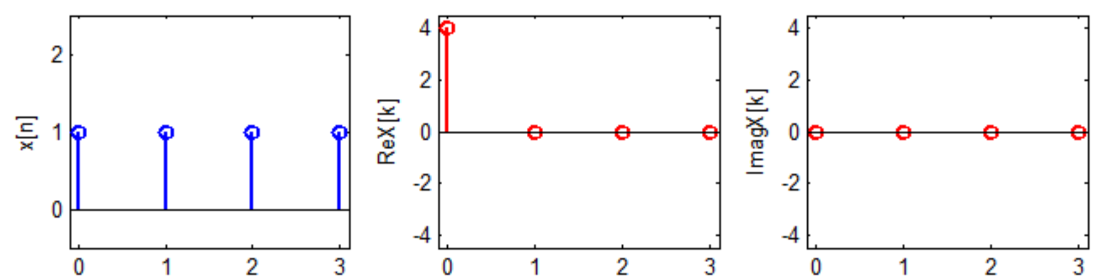
- c) $x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1]$

$$\begin{aligned} X_4[0] &= 1 + 2 = 3 \\ X_4[1] &= 1 - 2j \\ X_4[2] &= 1 - 2 = -1 \\ X_4[3] &= 1 + 2j \end{aligned}$$



- d) $x[n] = 1, \quad n = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} X_4[0] &= 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \\ X_4[1] &= 1 - j - 1 + j = 0 \\ X_4[2] &= 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \\ X_4[3] &= 1 + j - 1 - j = 0 \end{aligned}$$



Cálculo de la DFT

- Cada valor de la DFT N sumas y N multiplicaciones ➔ Se puede calcular a través de una matriz ➔ Matriz de DFT (¡es una matriz de Vandermonde!)

Para el caso de N=4

$$\begin{bmatrix} X_4[0] \\ X_4[1] \\ X_4[2] \\ X_4[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

Matriz de Vandermonde: una matriz que presenta una progresión geométrica en cada fila

Para el caso de N genérico

$$\mathbf{F} := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}2} & e^{-j\frac{2\pi}{N}4} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)} & e^{-j\frac{2\pi}{N}2(N-1)} & \cdots & e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}_{N\times N}$$

¡¡La DFT es muy fácil de calcular en un ordenador!!

Cálculo de la DFT

- ¿Se puede calcular también con "papel y lápiz" (simbólicamente)? ➔ Para casos fáciles sí

$$X_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \qquad k = 0, ..., N-1$$

- a) $x[n] = 3\delta[n-2]$

$$X_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} 3\delta[n-2] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = 3\sum_{n=0}^{N-1} \delta[n-2] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k2} = 3e^{-j\frac{4\pi}{N}k}$$

- b) $x[n] = (-1)^n, \qquad n = 0, ..., N-1$

$$X_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} (e^{-j\pi})^n \cdot (e^{-j\frac{2\pi}{N}k})^n = \sum_{n=0}^{N-1} (e^{-j(\frac{2\pi}{N}k+\pi)})^n$$

$$= \frac{1-(e^{-j(\frac{2\pi}{N}k+\pi)})^N}{1-(e^{-j(\frac{2\pi}{N}k+\pi)})} = \frac{1-e^{-jN\pi}}{1+e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

¿Qué pasa con el numerador si N es impar? ¿Y si es par?

Cálculo de la DFT

- Papel y lápiz… $X_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \qquad k = 0, ..., N-1$

- c) $x[n] = 3\delta[n-2]$

$$X_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} 3\delta[n-2] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = 3\sum_{n=0}^{N-1} \delta[n-2] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k2} = 3e^{-j\frac{4\pi}{N}k}$$

- d)

$$\boxed{x[n] = \begin{cases} 1 & n = 0, ..., L \\ 0 & resto \end{cases}}$$

N>L+1

NOTA BIEN:
LA LONGITUD
DE LA SEÑAL
ES L+1 !!!

ESTE EJEMPLO
ES MUY
IMPORTANTE
PARA
ENTENDER
LUEGO !!!

$$X_N[k] = \sum_{n=0}^{L} 1 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} + \sum_{n=L+1}^{N-1} 0 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{L} (e^{-j\frac{2\pi}{N}k})^n = \frac{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}k(L+1)}}{1 - e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

$$= \frac{e^{-j\frac{\pi}{N}k(L+1)}\left(e^{+j\frac{\pi}{N}k(L+1)} - e^{-j\frac{\pi}{N}k(L+1)}\right)}{e^{-j\frac{\pi}{N}k}\left(e^{+j\frac{\pi}{N}k} - e^{-j\frac{\pi}{N}k}\right)} = e^{-j\frac{\pi}{N}kL}\frac{2j\sin\left(\frac{\pi}{N}k(L+1)\right)}{2j\sin\left(\frac{\pi}{N}k\right)}$$

$$\boxed{= \frac{\sin\left(\frac{(L+1)\pi}{N}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{N}k\right)} e^{-j\frac{L\pi}{N}k}}$$

Más ejemplos: hojas de transformadas y propiedades

Ubicándonos

- **Tema 4: Fundamentos de la Transformada Discreta de Fourier**
  - **4.1 Definición: la DFT como el muestreo de la TF**
    - 4.1.0 Introducción
    - 4.1.1 Definición y ejemplos
    - **4.1.2 La DFT como el muestreo de la TF**
    - 4.1.3 Problemas y aspectos prácticos
  - 4.2 Propiedades
  - 4.3 Convolución circular: definición y relación con la DFT
  - 4.4 La DFT en Matlab

Relacionando la DFT con la TF

- La DFT se parece a la TF de secuencias, comparemos Ecs. Análisis

$$X_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \qquad k = 0, ..., N-1$$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j\Omega n}, \qquad -\infty < \Omega < \infty$$

Periodica de periodo 2*pi.... siempre

- Diferencias:
  - La TF es continua y la DFT es discreta; la TF es de longitud infinita y la DFT es de longitud finita; la TF es periódica y la DFT es aperiódica
  - ¿Qué pasa si tomamos N muestreas equiespaciadas de la TF en el intervalo $[0,2\pi)$?

AQUI NO APARECE el FACTOR 1/N !!! que aparecia con la serie de Fourier!!!

$$\boxed{\tilde{X}_N[k] := X(e^{j\Omega})\big|_{\Omega=\frac{2\pi}{N}k}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad k = 0, ..., N-1$$

La DFT es algo parecido a la TF muestreada ➔ *estudiaremos esto con mayor detalle*

Si $N = 20$: $\Omega = 0,\ 0.1\pi,\ 0.2\pi,\ 0.3\pi,\ \ldots,\ 1.9\pi$

Nota bien: el paso de muestreo en frecuencia es 2*pi/N

Relacionando la DFT con la TF

- Vamos a estudiar la relación entre DFT y TF para tres casos:
  - a) Secuencias de longitud finita definidas entre 0 y N-1

    $$x[n] = 0 \quad n \notin [N_i, N_f] \quad \text{con } N_i \geq 0 \text{ y } N_f \leq (N-1)$$

  - b) Secuencias de longitud infinita

    error; typo

    $$x[n] \neq 0 \quad \text{en un número infinito de instantes}$$

  - c) Secuencias de longitud finita pero definidas fuera del intervalo $[0, \mathrm{N}-1]$

    $$x[n] = 0 \quad n \notin [N_i, N_f] \quad \text{con } N_i < 0 \text{ o } N_f > (N-1)$$

- Vamos a ver que:
  - Si tenemos "cuidado", en los casos a) y c) la DFT puede utilizarse para obtener muestras de la TF

    por la relaciones vistas antes
  - En el caso b) sólo podremos obtener los valores de forma aproximada (estaremos muestreando una TF que no es exactamente la de la señal, pero que sí está relacionada con la TF original)

Aumentando N podemos tener mas muestras de la TF de la señal discreta (considerada de longitud finita)

CON DFT, aumentando N, queremos approximar la TF de una señal discreta de longitud finita....

Relacionando la DFT con la TF

- a) Secuencias de longitud finita definidas entre 0 y N-1

$$x[n] = 0 \quad n \notin [N_i, N_f] \quad \cancel{\text{con } N_i \geq 0 \text{ y } N_f \leq (N-1)}$$

$$X_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, \qquad k = 0, ..., N-1$$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j\Omega n}, \qquad \infty < \Omega < \infty$$

- Si utilizamos el hecho de que la secuencia es finita

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j\Omega n} = \sum_{n=N_i}^{N_f} x[n] \cdot e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\Omega n}$$

- Muestreando en los valores: $\Omega_k = \frac{2\pi}{N}k \quad \Rightarrow \quad \Omega = 0, \frac{2\pi}{N}, \frac{4\pi}{N}, ..., \frac{2(N-1)\pi}{N}$

AQUI NO APARECE el FACTOR 1/N !!! que aparecia con la serie de Fourier!!!

$$\hat{X}_N[k] := X(e^{j\Omega})\Big|_{\Omega=\frac{2\pi}{N}k} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn},$$

¡¡La DFT es la TF muestreada!!

DFT como TF muestrada: Ejemplo

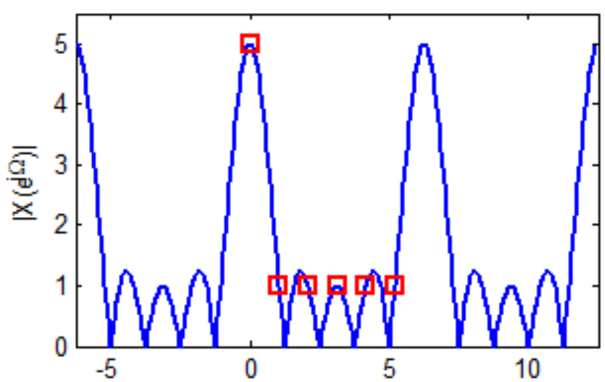
- Ej. 1: $\boxed{N=6}$ y $\boxed{x[n] = \begin{cases} 1 & n = 0, ..., 4 \\ 0 & n \le -1 \text{ o } n \ge 5 \end{cases}}$

de longitud L=5 (muestras no nulas), pero N=6 es decir consideramos tambien una muestra nula....

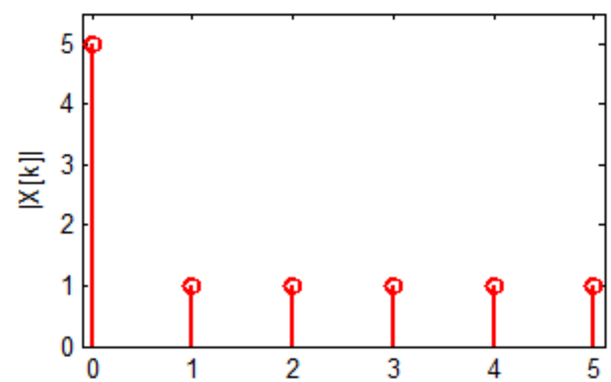
$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j\Omega n} = \sum_{\boxed{n=0}}^{\boxed{4}} e^{-j\Omega n} = \frac{1-e^{-j5\Omega}}{1-e^{-j\Omega}} = \frac{\sin(5\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} e^{-j2\Omega}$$

$$X_{\boxed{6}}[k] = \sum_{\boxed{n=0}}^{\boxed{5}} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{6}kn} = \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{6}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}k\right)} e^{-j\frac{4\pi}{6}k}, \qquad k = 0, ..., 5$$

La hemos calculado antes



Omega (herradura)



k

Recuerda: el paso de muestreo en frecuencia es 2*pi/N =pi/3 (en el dominio de Omega)

Calculo de la a_k con DFT

- Si pensamos que nuestra señal es realmente periódica y queremos los a_k que tenemos que hacer?

DIVIDIR LO QUE NOS DA LA DFT POR N !

$$\boxed{a_k = \frac{1}{N} X_N[k]}$$

DFT como TF muestrada: Ejemplo

- Ej. 2: $\boxed{N = 10}$ y $\boxed{x[n] = \begin{cases} 1 & n = 0, ..., 4 \\ 0 & n \leq -1 \text{ o } n \geq 5 \end{cases}}$

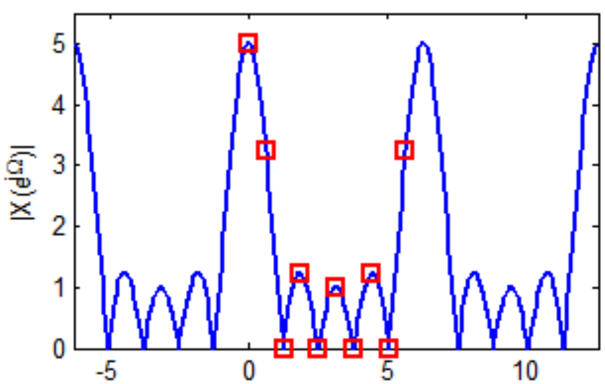
siempre de longitud L=5 (muestras no nulas), pero N=10 es decir consideramos tambien 5 muestras nulas....

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j\Omega n} = \sum_{\boxed{n=0}}^{\boxed{4}} e^{-j\Omega n} = \frac{1 - e^{-j5\Omega n}}{1 - e^{-j\Omega n}} = \frac{\sin(5\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} e^{-j2\Omega}$$

La hemos calculado antes

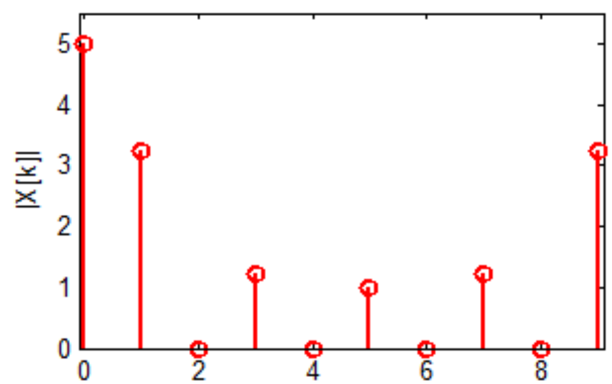
$$X_{10}[k] = \sum_{\boxed{n=0}}^{\boxed{9}} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{10}kn} = \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{10}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{10}k\right)} e^{-j\frac{4\pi}{10}k}, \qquad k = 0, ..., 9$$

La hemos calculado antes



Omega (herradura)

Recuerda: el paso de muestreo en frecuencia es 2*pi/N=pi/5 (en el dominio de Omega)



k

Ser consciente de la variable del eje horizontal correspondiente a cada gráfica es fundamental

DFT como TF muestrada: Ejemplo

siempre de longitud L=5>N=3
(no puede ser!!!!!)

siempre de longitud L=5>N=3
(no puede ser!!!!!)

- Ej. 3: $\boxed{N=3}$ y $x[n] = \begin{cases} 1 & n = 0, ..., 4 \\ 0 & n \leq -1 \text{ o } n \geq 5 \end{cases}$

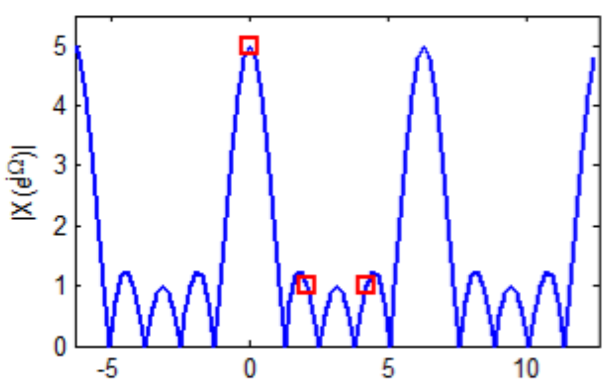
¡Ojo, la condición no se cumple!

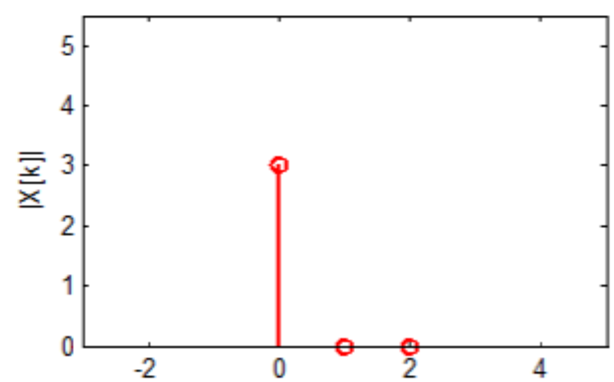
$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{4} e^{-j\Omega n} = \frac{1-e^{-j5\Omega n}}{1-e^{-j\Omega n}} = \frac{\sin(5\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} e^{-j2\Omega}$$

La hemos calculado antes

$$X_3[k] = \sum_{n=0}^{2} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{3}kn} = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{3}k\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}k\right)} e^{-j\frac{2\pi}{3}k}, \qquad k = 0, ..., 2$$

La hemos calculado antes





La condición no se cumple ➔ la DFT no se corresponde con el muestreo de la TF

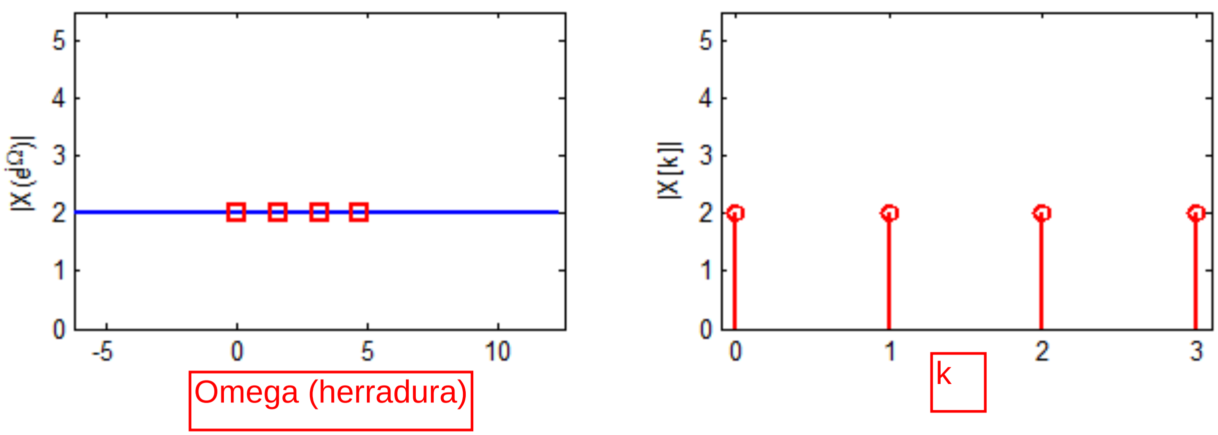
DFT como TF muestrada: Ejemplo

- Ej. 4: $\boxed{N = 4 \text{ y } \quad x[n] = 2\delta[n]}$ $\boxed{\text{otra señal; con N=4...}}$

$$X(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\delta[n] = 2$$

$$X_4[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}kn} = 2, \qquad k = 0, \ldots, 3$$

La hemos calculado antes



Problemas: complejidad computacional

Serie de Fourier

- Hemos visto que la ~~DFT_N~~ puede calcularse a como el producto de un vector de longitud N por una matriz de tamaño $N x N$
  - Coste computacional: N^2 sumas y N^2 multiplicaciones complejas
  - Si N es muy grande (e.g. 10.000) es demasiado costoso

$$\begin{bmatrix} X_4[0] \\ X_4[1] \\ X_4[2] \\ X_4[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix}$$

- Solución: FFT (Fast Fourier Transform)
  - Es un algoritmo que permite calcular la DFT de forma más eficiente
  - ¿Cómo? Aprovechando la estructura de la matriz de DFT
  - N tiene que ser una potencia de 2
  - Coste computacional: $\log_2(N) \cdot N$ sumas y $\log_2(N/2) \cdot N$ multiplicaciones complejas

- Comparación: N=8192 ➔ 134 millones (DFT) vs. 0.2 millones (FFT)

- En la práctica N de hasta 2^{16}=65536, las DFT siempre suelen hacerse de potencias de 2 (telefonía celular 4G, telescopios, etc.)

Ubicándonos

- **Tema 4: Fundamentos de la Transformada Discreta de Fourier**
  - 4.1 Definición: la DFT como el muestreo de la TF
  - 4.2 Propiedades
  - 4.3 Convolución circular: definición y relación con la DFT
  - **4.4 La DFT en Matlab**

- Comentarios:
  - Bibliografía básica y complementaria: [BB2: Opp&Sch] Cap. 8, Secs. 8.0-8.5; [BB3: McC&Sch&Yod] Cap. 13, Secs. 13.0-13.5

Función en Matlab que calcula la DFT

- No existe ni la función `dft` (`idft`), sino la función `fft` (`ifft`)

```
  FFT(x,N) is the N-point FFT, padded with zeros if x has less
than N points and truncated if it has more.

For length N input vector x, the DFT is a length N vector X,
with elements
                 N
   X(k) =       sum  x(n)*exp(-j*2*pi*(k-1)*(n-1)/N), 1 <= k <= N.
                n=1
The inverse DFT (computed by IFFT) is given by
                 N
   x(n) = (1/N) sum  X(k)*exp( j*2*pi*(k-1)*(n-1)/N), 1 <= n <= N.
                k=1
```

- Le damos el valor de las amplitudes y nos devuelve valor de las amplitudes
  - ¿En qué intervalo de tiempo supone Matlab que está definida la señal x?
  - ¿Cuáles son los ejes de las amplitudes que nos devuelve fft?

Función en Matlab que calcula la DFT

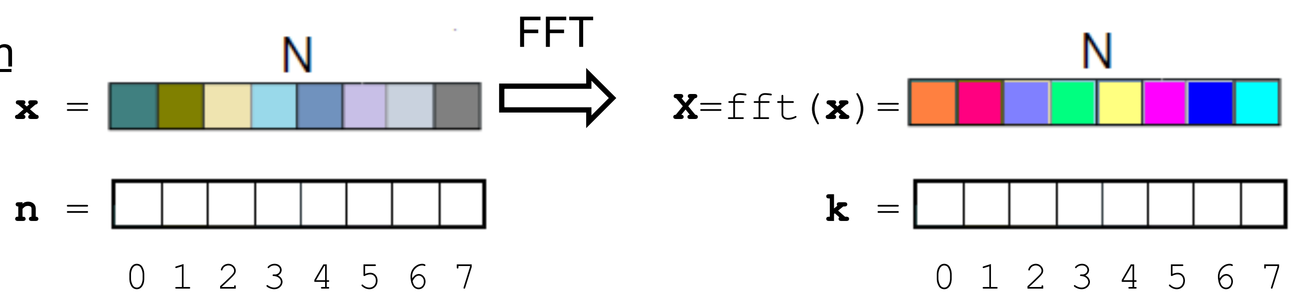
- ¿Cuáles son los ejes?
  - Matlab

```
                   N
X(k) =           sum  x(n)*exp(-j*2*pi*(k-1)*(n-1)/N), 1 <= k <= N.
                  n=1
```

  - Form. teórica

```
                  N-1
X[k] =           sum  x[n]*exp(-j*2*pi*k*n/N), 0 <= k <= N-1.
                  n=0
```

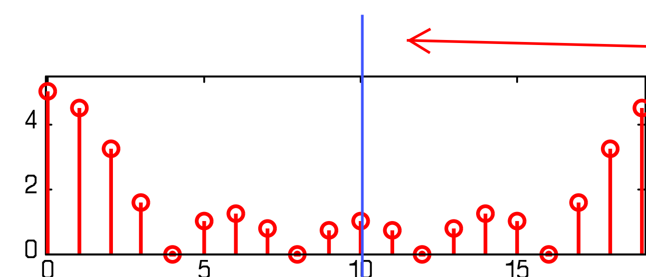
  - Conclusión



- `x=[1 1 1 1 1 zeros(1,15)];`
- `X=fft(x,N);`
- `k=0:(N-1);`
- `figure; stem(k,abs(X));`

a paso 2*pi/(N*T)

0 w=Omega/T 2*pi/T



Esta simetria aqui es porque x es real...pensad un poco

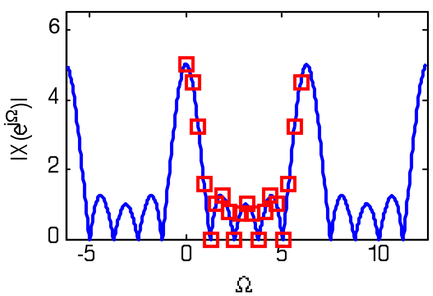
0 k N-1

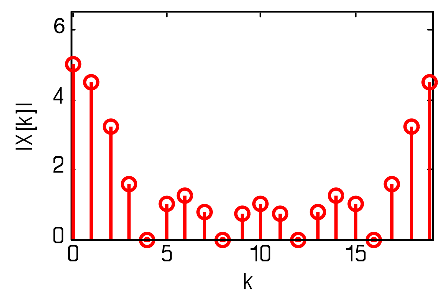
0 Omega (herradura) 2*pi

a paso 2*pi/N

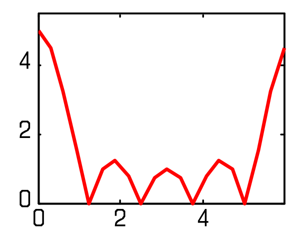
Estimando la TF de una señal discreta

- Asumimos que la señal está definida en $[0,N-1]$ ~~(If not ➔ enventanado)~~
  - La DFT equivale a tomar N muestras equiespaciadas en el intervalo $[0,2\pi)$

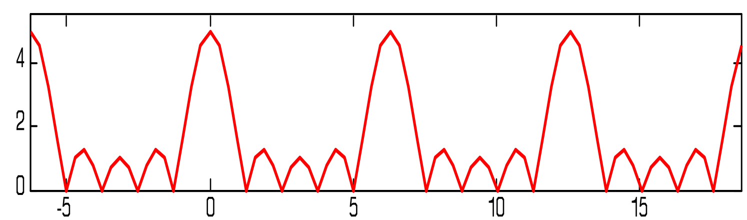




- Por tanto:
  - `X=fft(x,N);`
  - `Omega=(0:(N-1))*(2*pi/N);`
  - `figure; plot(Omega,abs(X));`

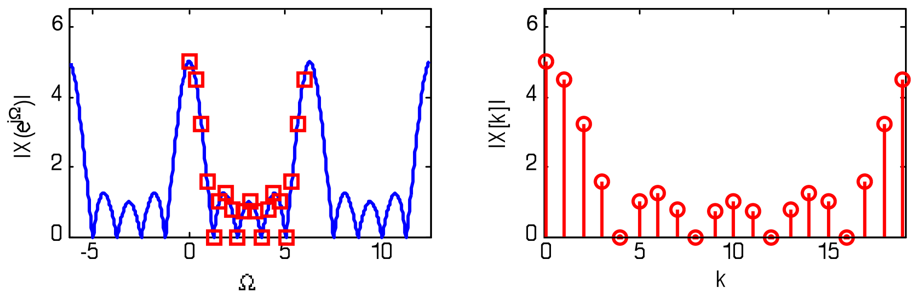


- ¿Qué pasa si queremos dibujar varios periodos?
  - `X=fft(x,N); X_per=[X, X, X, X]`
  - `Omega=(-N:(3*N-1))*(2*pi/N);`
  - `figure; plot(Omega,abs(X_per));`

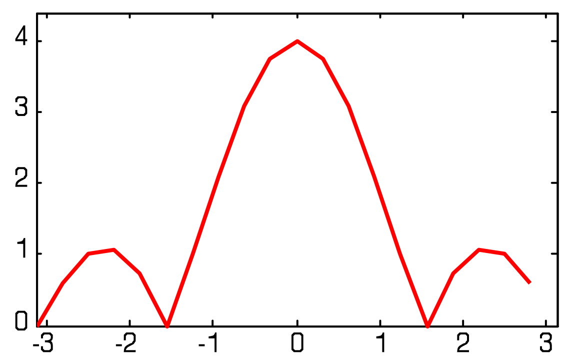


%Utilizamos plot (continua) y no stem

Estimando la TF de una señal discreta



- ¿Qué pasa si queremos dibujarla en el intervalo [-π,π)?
  - `X=fft(x,N); X_cent=fftshift(X);`
  - `Omega = ((-N/2):(N/2-1))*(2*pi/N);`
  - `figure; plot(Omega,abs(X_cent));`



hasta aqui hemos interpretado las muestras como una señal discreta.

....y que paso si interpretamos las muestras como obtenidas desde un muestreo en el tiempo de una señal continua?

SEGUNDA PARTE

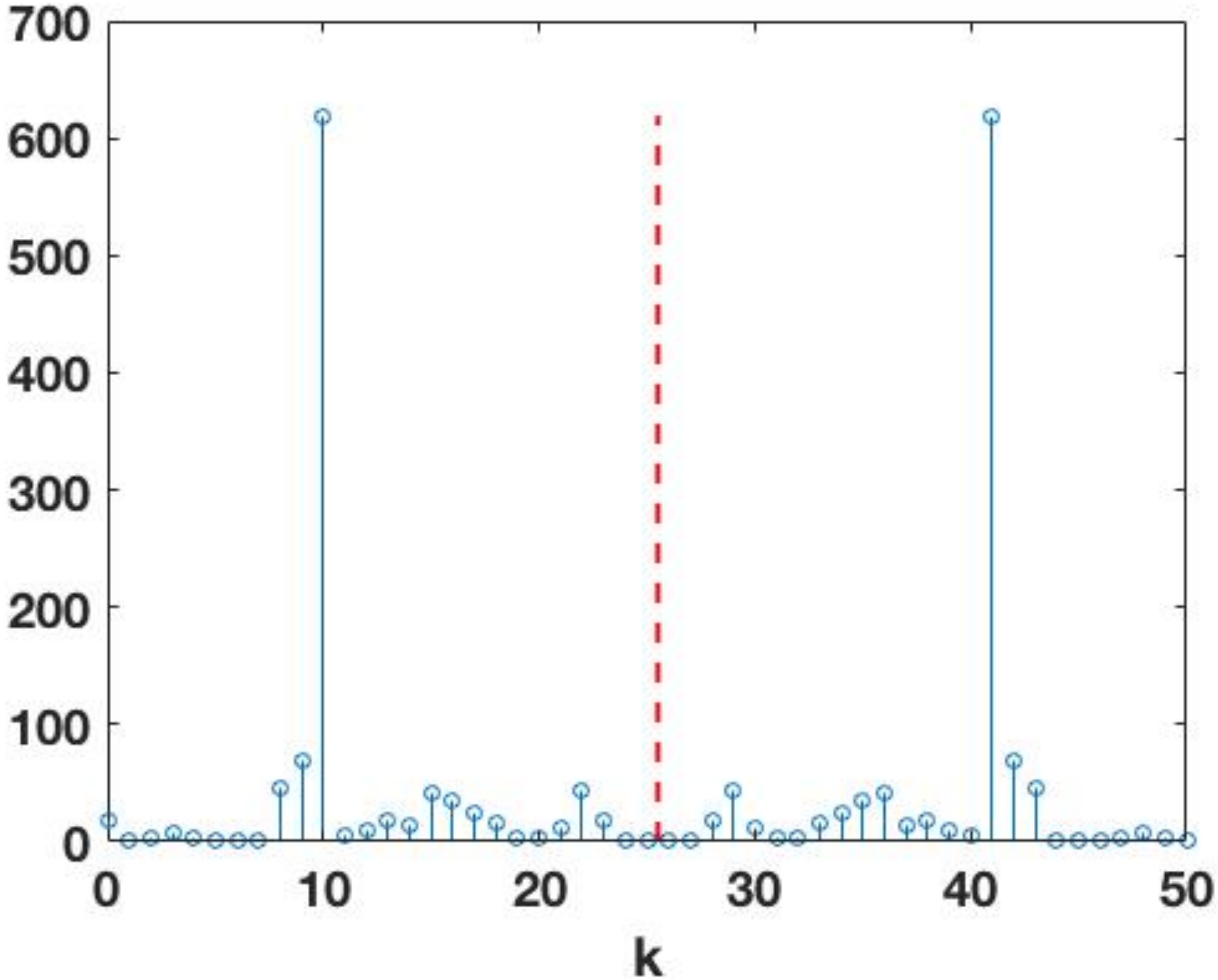
- En esta segunda parte, se interpretarán las muestras como obtenidas a través de un muestreo en el tiempo de una señal continua.

Estimando la TF de una señal continua

- ¿Y qué ocurre con la TF de señales continuas?
  - Paso 1: Utilizamos tema muestreo para relacionar TF de señal continua con TF de señal discreta ➔ 3 efectos: 1) amplitud modificada por $1/Ts$, 2) expansión por Ts del eje de frecuencias, 3) réplicas cada 2π
  - Paso 2: Utilizamos las transparencia anteriores para relacionar TF de señal discreta con DFT de señal discreta (misma amplitud, eje frec. muestreado)

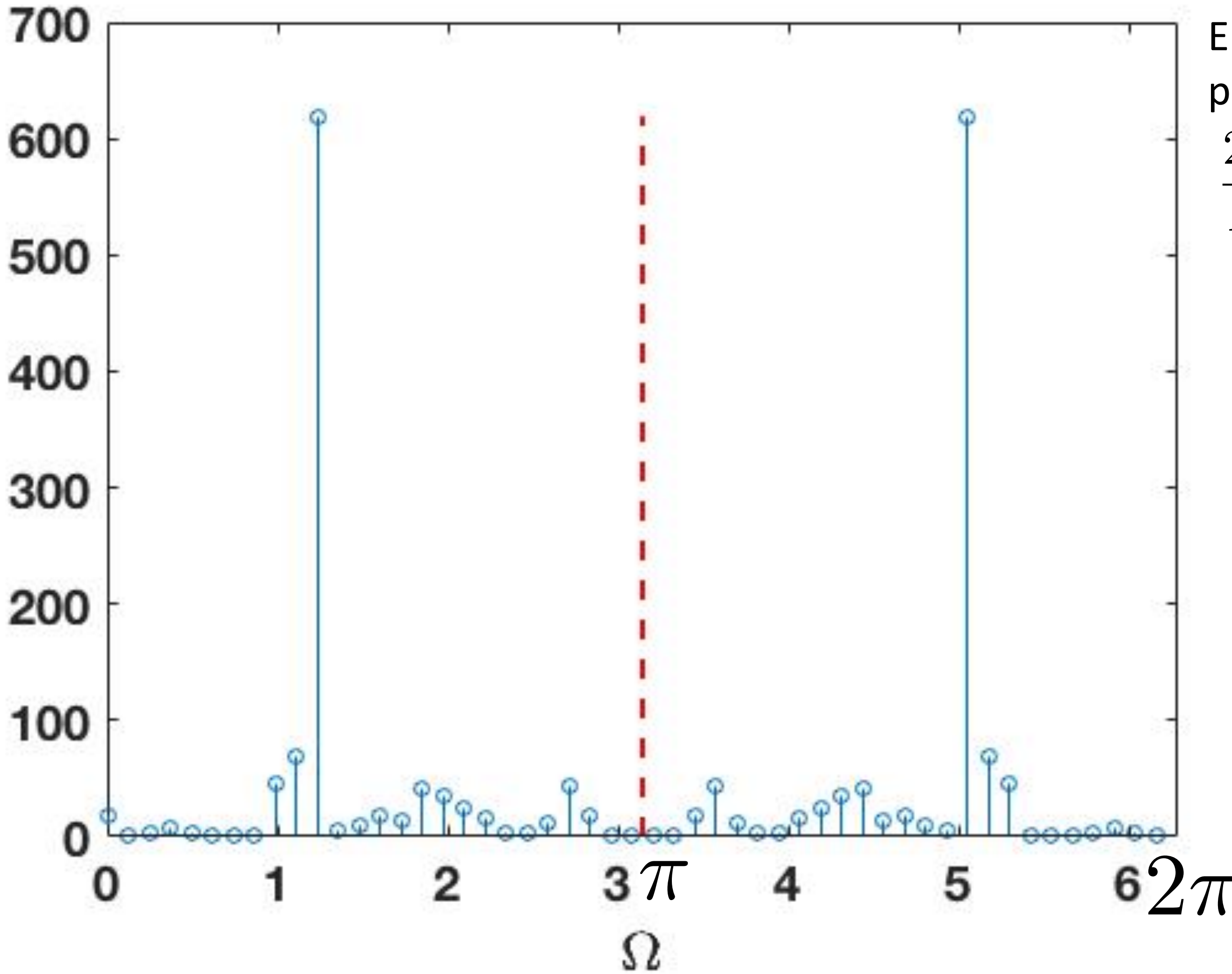
- Por tanto:
  - A) Eje vertical (amplitud): Paso 1 multiplica por $1/Ts$, Paso 2 no hace nada ➔ Hay que multiplicar la amplitud de la DFT por Ts
  - B) Eje horizontal (frecuencia):
    - Paso 1: al muestrear las frecuencias entre 0 y $\omega s/2$ pasan a estar entre 0 y π
    - Paso 2: Al hacer la DFT las frecuencias entre 0 y π constituyen los primeros $N/2$ puntos de la DFT
    - Paso 1 + 2: las $N/2$ primeros puntos de la DFT corresponden a tomar $N/2$ muestras de la TF de la señal continua entre 0 y $\omega s/2$

FFT en Matlab (T, sampling period)



$N = 51$

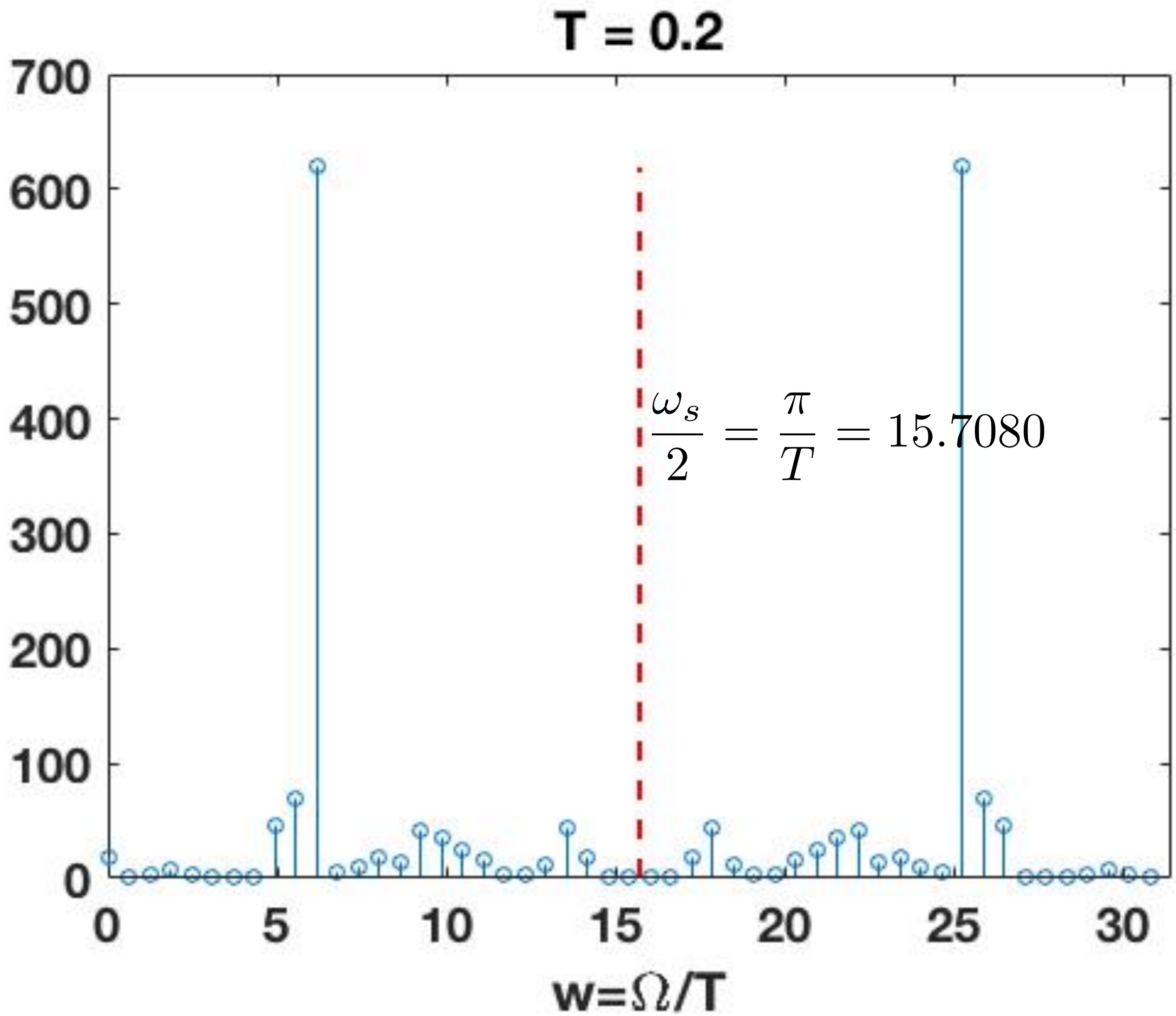
FFT en Matlab (T, sampling period)



Entre dos puntos hay:

$$\frac{2\pi}{N} = 0.1232$$

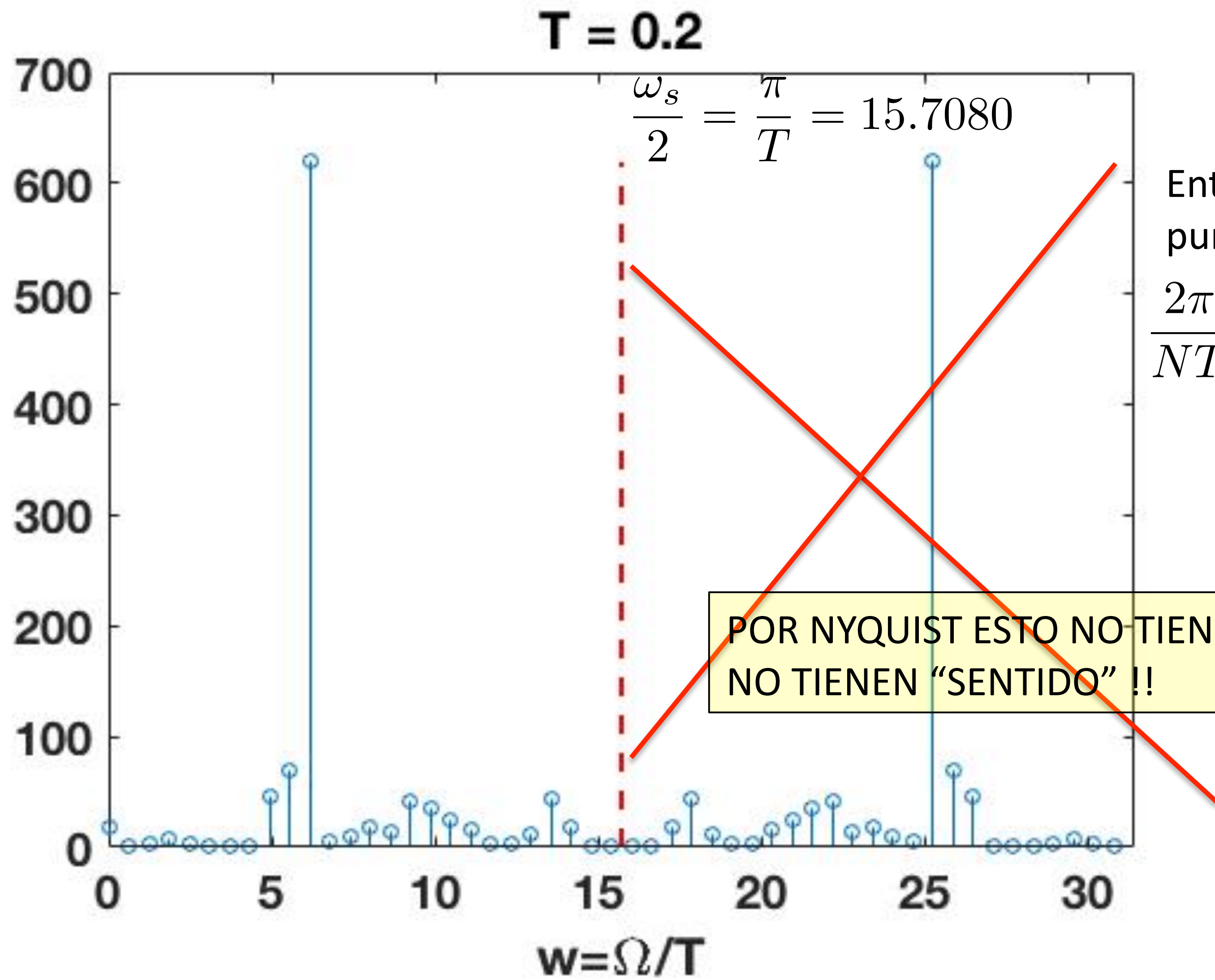
FFT en Matlab (T, sampling period)



Entre dos puntos hay:

$$\frac{2\pi}{NT} = 0.6160$$

FFT en Matlab (T, sampling period)



$$\frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T} = 15.7080$$

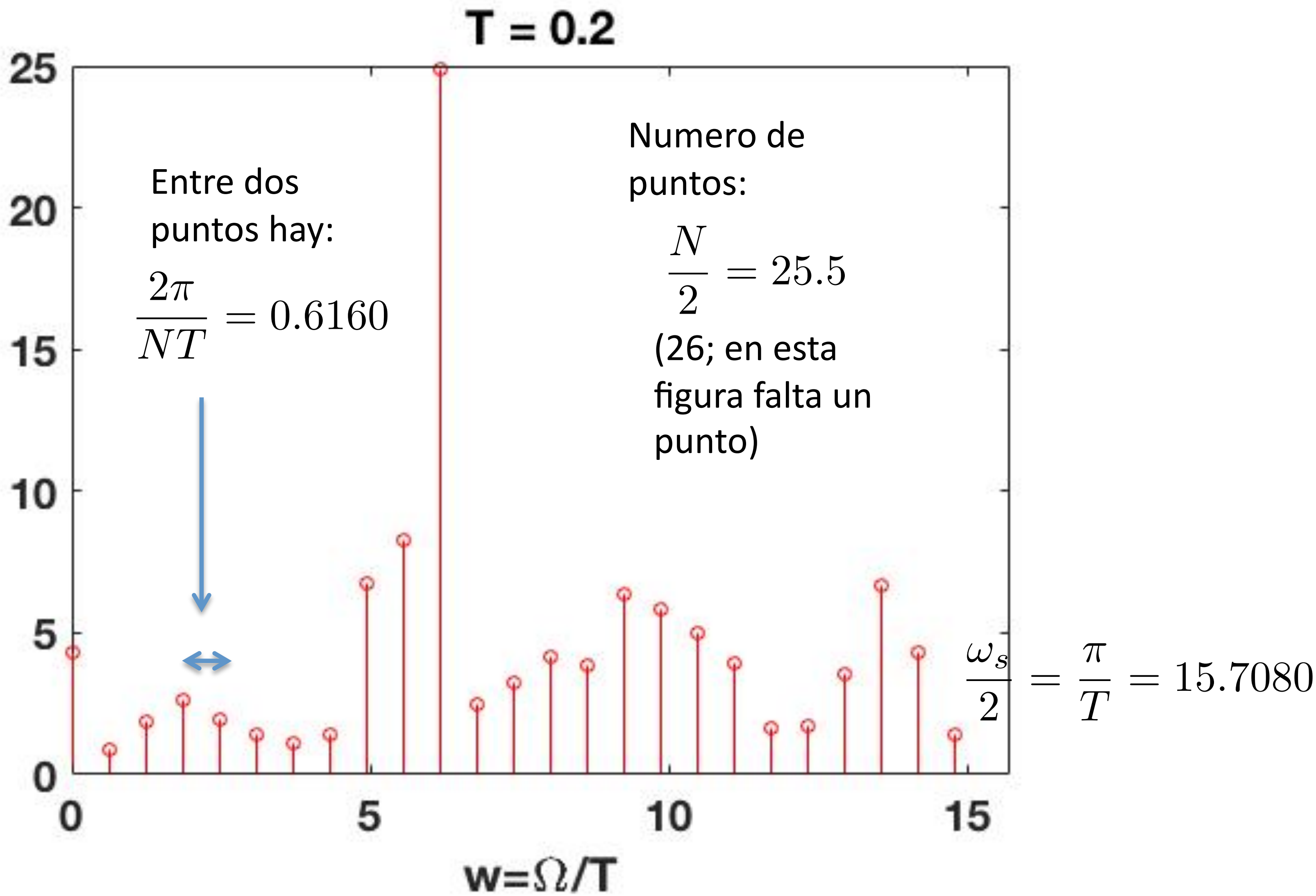
Entre dos puntos hay:

$$\frac{2\pi}{NT} = 0.6160$$

POR NYQUIST ESTO NO TIENE VALOR !!!
NO TIENEN "SENTIDO" !!

SI EL MUESTREO EL TIEMPO ESTA BIEN HECHO, PODEMOS "VER" SOLO HASTA LA FRECUENCIA $\frac{\omega_s}{2} = \frac{\pi}{T}$!!!

FFT en Matlab (T, sampling period)



Estimando la TF de una señal continua

- Si queremos estimar la TF de la señal continua

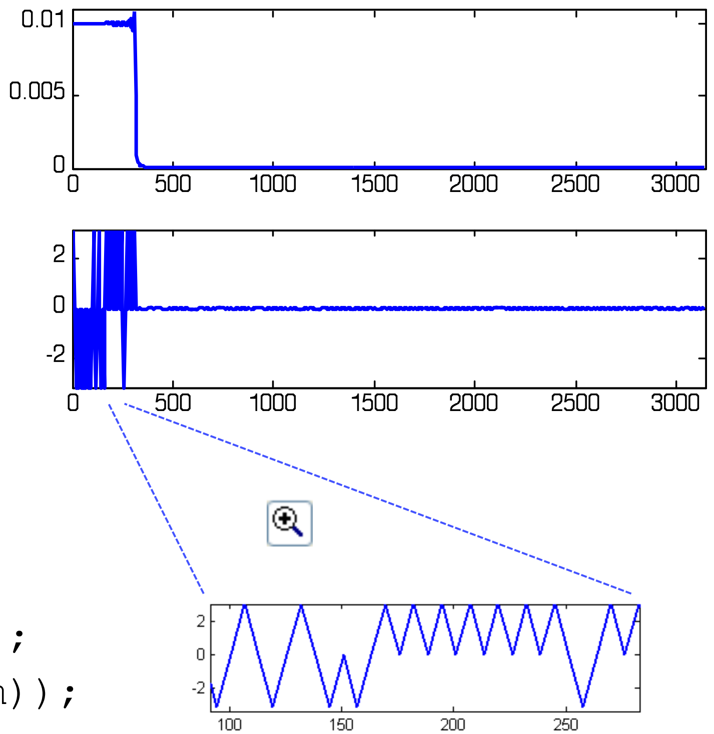
```
➢ Ts=.001; t=0:Ts:.999; N=length(t); x=sinc((t-.5)/.01);

➢ X=fft(x,N);
➢ Omega=(0:(N-1))*(2*pi/N);
➢ %Esta sería la frec. discreta

➢ Fs=1/Ts; Ws=2*pi*Fs;
➢ X_m = Ts*X(1:N/2);
➢ omega = Omega(1:N/2)/Ts;
➢ %También omega = Omega(1:N/2)*fs;
➢ %También omega = (0:(N/2-1))*Ws/N;

➢ figure;
➢ subplot(2,1,1); plot(omega,abs(X_m));
➢ subplot(2,1,2); plot(omega,angle(X_m));
➢ %Ojo, pintamos la mitad
```

Resolución espectral (rads/seg)



Estimando la TF de una señal continua

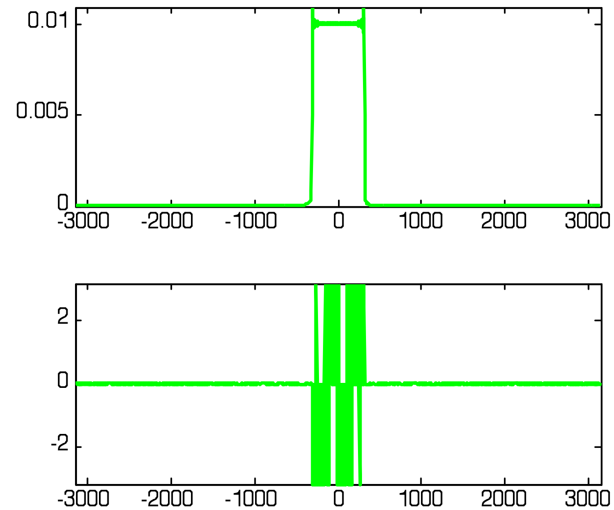
- Si queremos estimar también la parte negativa de la TF

```
➢ Ts=.001; t=0:Ts:.999; N=length(t); x=sinc((t-.5)/.01);

➢ X=fft(x,N); X_c = fftshift(X);
➢ Omega=(-N/2:(N/2-1))*(2*pi/N);
➢ %También Omega=-pi:(2*pi/N):pi;
➢ %(sigue) Omega=Omega(1:end-1);

➢ X_c = Ts*X_c; omega = Omega/Ts;
➢ %También omega = -(Ws/2):(Ws/N):(Ws/2);
➢ % (sigue) omega=omega(1:end-1);

➢ figure;
➢ subplot(2,1,1);
➢ plot(omega,abs(X_c));
➢ subplot(2,1,2);
➢ plot(omega,angle(X_c));
```



Estimando la TF de una señal continua

- Si queremos que las unidades de la TF sean Hz

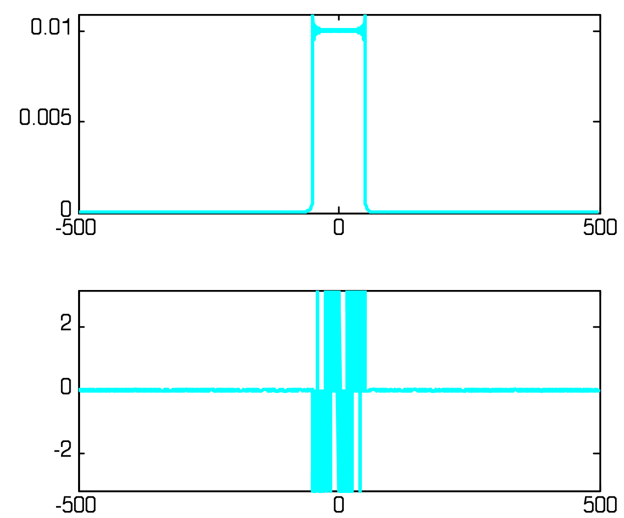
```
Ts=.001; t=0:Ts:.999; N=length(t); x=sinc((t-.5)/.01);

X=fft(x,N);
X_c = Ts*fftshift(X);

Fs=1/Ts;

f=(-Fs/2):(Fs/N):(Fs/2);
f=f(1:end-1);

figure;
subplot(2,1,1);
plot(f,abs(X_c));
axis([-Fs/2 Fs/2 0 max(abs(X_m))])
subplot(2,1,2);
plot(f,angle(X_c));
axis([-Fs/2 Fs/2 -pi pi])
```

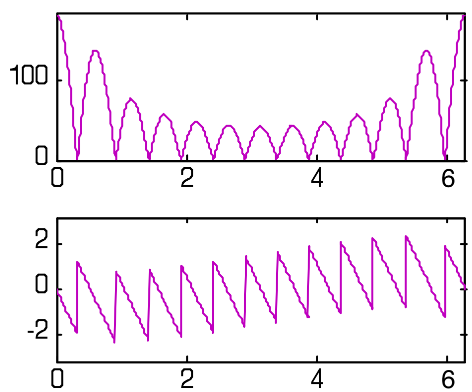


Importante!!!

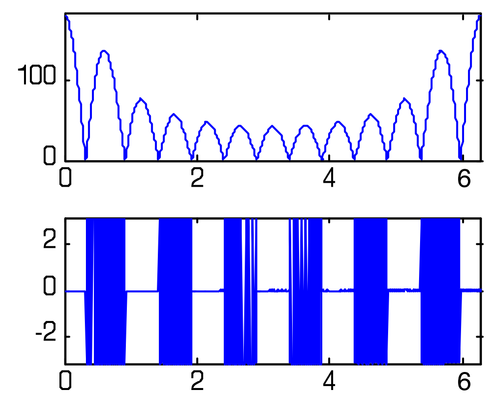
DFT en Matlab: otros apectos

- ¿Qué ocurre si tenemos una señal fuera del intervalo [0,N-1]?
  - Tenemos que corregirlo nosotros, desplazándola para llevarla al intervalo [0,N-1]
  - La TF cambia (desplazar en tiempo = multiplicar por una exponencial en frecuencia)

```
n=-6:6; x=n.^2; N=1000; Omega=0:(2*pi/N):(2*pi-2*pi/N);
X=fft(x,N); %Matlab siempre asume que empieza en 0 (no hay que hacer nada)
X_correg = X.*exp(j*6*Omega); %Como no empieza en 0 sino en ==> corregimos
```



¿Cuál es X y cuál es X_correg?




```
figure; subplot(2,1,1); plot(abs(X));
subplot(2,1,2); plot(angle(X));
figure; subplot(2,1,1); plot(abs(X_correg));
subplot(2,1,2); plot(angle(X_correg));
```