Ampliación de Señales y Sistemas

Tema 5:

Transformada Z

Ubicándonos

Tema 1: Señales y sistemas discretos en el dominio del tiempo

Tema 2: Señales y sistemas discretos en el dominio de la frecuencia

Tema 3: Muestreo

Tema 4: Fundamentos de la Transformada Discreta de Fourier

Tema 5: Transformada Z

- Definición de la TZ y su región de convergencia
- Propiedades y TZ inversa
- TZ para SLITS y sistemas descritos por ecuaciones en diferencias

Tema 6: Introducción al diseño de filtros discretos

Comentarios:

- Generalización de la TF (la TF es un caso específico de la TZ)
- Imposible que converja (exista) para todo z
- Muy útil para analizar y diseñar SDECs y, por ende, filtros
- Biblio: [BB3: McC&Sch&Yod] Cap. 7; [BB2: Opp&Sch] Secs. 4.0-4.4

Repaso: ya esto lo hemos visto

5.1 La Transformada Z

Análoga a la Transformada de Laplace (TZ discreto, TL continuo)

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

¿converge?=suponiendo que la suma da un valor finito ➔ No es nada evidente porque hay infinitos sumandos y z^{-n} puede ser muy grande (infinito)

$$x[n] = \underbrace{z^n}_{\substack{\text{Eigenfunction} \\ \text{for DT LTI}}} \longrightarrow y[n] = H(z)z^n$$

z=r\exp(j Omega)

$$\boxed{H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}}$$ suponiendo que converge

Se define como:

¡La TZ toma valores complejos y devuelve valores complejos!

$$x[n] \longleftrightarrow \boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}} = \mathcal{Z}\{x[n]\}$$

$$z \in C$$

La transformada Z

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot r^{-k} \cdot e^{-j\Omega k} = TZ\{x[n]\}$$

$$x[n] \xrightarrow{TZ} X(z)$$

$z \in ¢$, $X(z) \in ¢$

$\boxed{z = r \cdot e^{j\Omega}}$ (forma polar)

- Ω corresponde a una pulsación
- La definición planteada **no asegura que la transformación exista**
- Su representación será tridimensional
- Para que exista la TZ de una secuencia $x[n]$ deben existir algunos valores de la variable z para los cuales la suma converja. En caso contrario no existe $X(z)$
- Al conjunto de valores de z para los cuales la integral converge, se le llama **región de convergencia** (*ROC*) de $X(z) \equiv ROC_X$.
- La *ROC* se representa en el plano ¢ mediante una **zona sombreada**

5.2 ROC y relación entre la TZ y la TF en DT

$$z = re^{j\Omega}, \quad r = |z|, \ \Omega = \angle z$$

$$X(re^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\left(re^{j\Omega}\right)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(x[n]r^{-n}\right)e^{-j\Omega n}$$

$$= TF\{x[n]r^{-n}\}$$

Caso particular: si |z|=1 $\Rightarrow X(z) = X(e^{j\Omega})$

Region de convergencia

- $ROC:\left\{z = re^{j\Omega} \ donde \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|x[n]r^{-n}\right| < \infty\right\}$
  - sólo depende de $r = |z|$

ROC: conjunto de valores de z para los que $X(z)$ Converge (=para los que la X(z) es valor finito)

- Si la circunferencia unidad (r = 1) está dentro de la ROC $\Rightarrow$ TF en DT, $X(e^{j\Omega})$, existe

Convergencia

- La TZ no converge para todas las secuencias, ni para todos los valores de z.

- Para una determinada secuencia, el conjunto de valores de z para los cuales la TZ converge, se denomina **Región de Convergencia (*ROC*)**

- Para que la TZ de una secuencia sea convergente es necesario que la serie sea absolutamente sumable

Ejemplo 1

$$x[n] = a^n u[n]$$

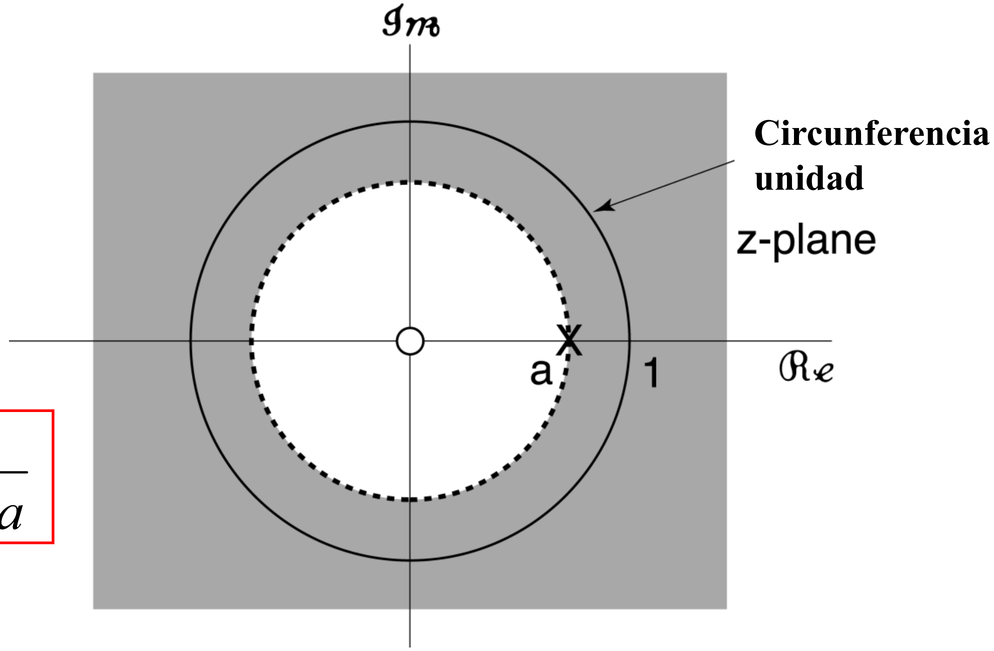
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

$$= \frac{1}{1-az^{-1}} = \boxed{\frac{z}{z-a}}$$

Region de convergencia (ROC):

$$\text{Si} \quad |az^{-1}| < 1 \Rightarrow, |z| > |a|$$



Comprobad utilizando la ec. de análisis que X(a/2)=∞

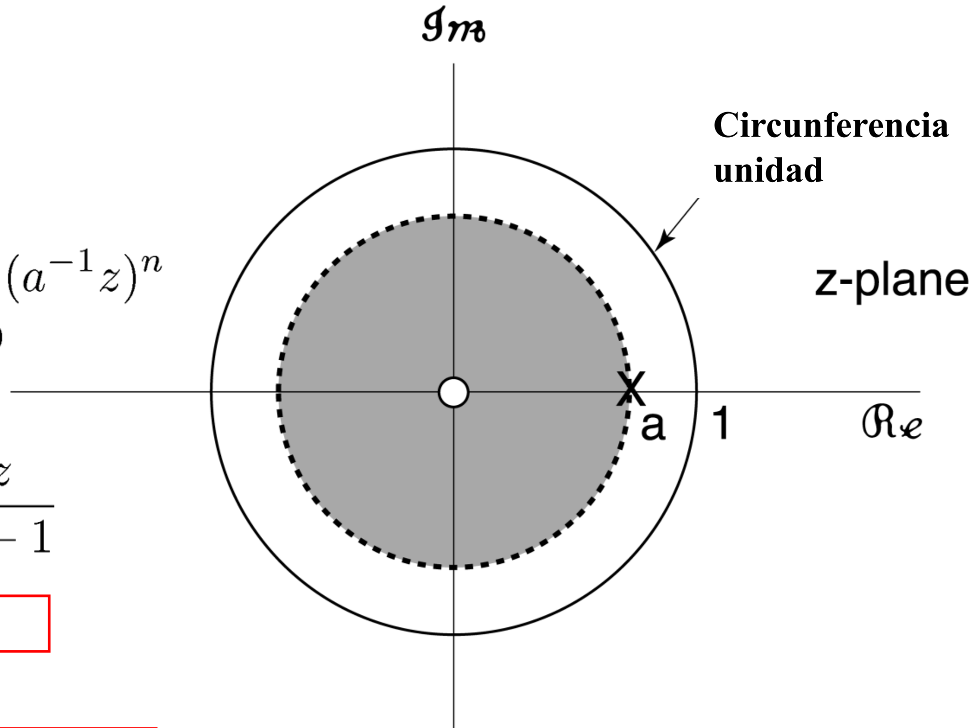
Es decir, la ROC, $|z| > |a|$, es exterior al círculo de radio $|a|$

Ejemplo 2:

$$x[n] = -a^n u[-n-1]$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{-a^n u[-n-1] z^{-n}\} \\ &= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}z)^n \\ &= 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} = \frac{a^{-1}z}{a^{-1}z-1} \\ &= \boxed{\frac{z}{z-a},} \end{aligned}$$

la misma X(z) !!!



pero tiene diferente ROC!!

Si $\boxed{|a^{-1}z| < 1, \;\Rightarrow\; |z| < |a|}$

La misma $X(z)$ que en el Ejemplo 1, pero con diferente ROC.

TZ de $x[n]$: expresión analítica de $X(z)$ + ROC

Ejemplo (I)

- Calcular la TZ de la siguiente secuencia:

$$\boxed{x[n]=\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]}$$

Ejemplo donde la ROC es un "donut" :)

sabemos que

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]\xleftrightarrow{TZ}\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}},|z|>\frac{1}{3}$$

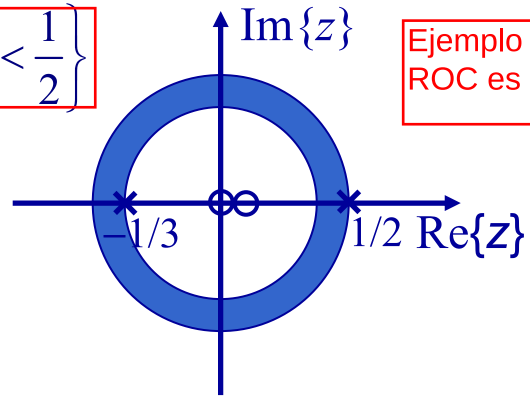
$$-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]\xleftrightarrow{TZ}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},|z|<\frac{1}{2}$$

aplicamos la propiedad de linealidad de la TZ

$$X(z)=\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},$$

$$\boxed{ROC_X=\left\{\frac{1}{3}<|z|<\frac{1}{2}\right\}}$$

$$X(z)=\frac{2z\left(z-\frac{1}{12}\right)}{\left(z+\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$



Ejemplo donde la ROC es un "donut" :)

Transformadas Z racionales

Nos interesan porque la mayor parte de las TZ de interés son racionales

$x[n]$ = combinación lineal de exponenciales

$$\Downarrow$$

$X(z)$ es racional

los polos de los ejemplos anteriores eran...?

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Polinomios en z

— caracterizada por sus polos y sus ceros

ceros: valores de z donde se anula $N(z)$

polos: valores de z donde se anula $D(z)$

mas en general:
polos: todos los valores de z tal que X(z)=infty
ceros: todos los valores de z tal que X(z)=0

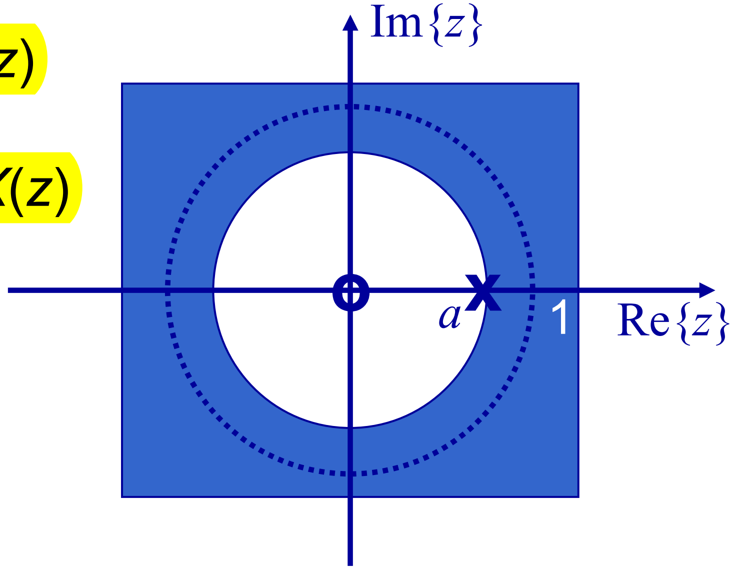
Conclusión: para señales que son combinaciones lineales de exponenciales en DT, las TZ son racionales

Diagrama de polos y ceros (I)

- Ya que la TZ es **función de una variable compleja**, es conveniente describirla e interpretarla usando el plano complejo
- Un grupo importante de TZ está constituido por aquellas funciones *X*(*z*) que son **racionales**, es decir son un cociente de polinomios en *z*:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}; \qquad \textit{donde } N(z) \textit{ y } D(z) \textit{ son polinomios en } z$$

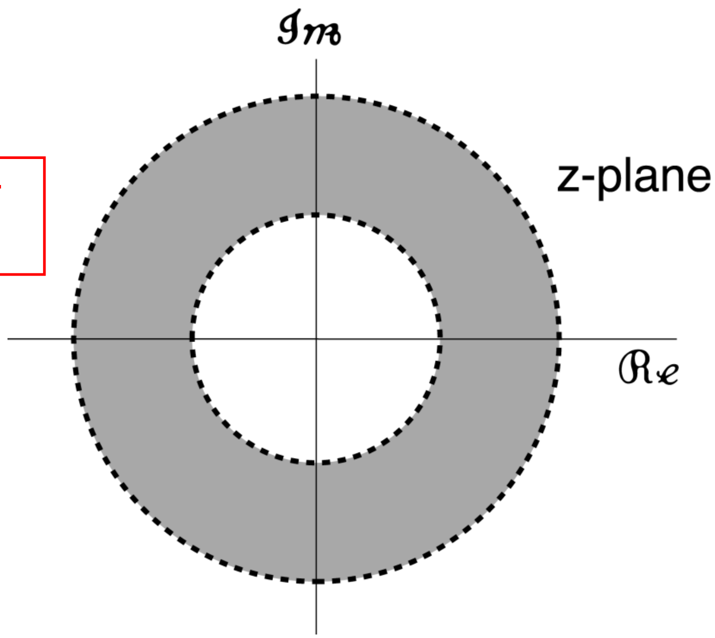
- **Ceros**: valores de z que anulan a *X*(*z*)
  - Por notación: **CERO ≡ o**
- **Polos:** valores de z que hacen ∞ a *X*(*z*)
  - Por notación: **POLO ≡ x**
- **No puede haber polos** en la *ROC*. Los polos están en el límite de la región de convergencia



5.2 Propiedades de las ROCs de la TZ

(1) La ROC de $X(z)$ es un anillo en el plano-z centrado en el origen.

Podria ser asi... no siempre es asi...



(2) La ROC **no** puede contener polos.

¿Por qué? ➔Un polo es un cero del denominador ➔ Si el denominador de anula, la TZ vale … infinito!!

Diagrama de polos y ceros (II)

H(*z*) cociente de polinomios en *z*:

$$H(z) = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_1 z + a_0}$$

c_i: ceros del sistema

$$H(z) = k \frac{(z - c_1)(z - c_2)\cdots(z - c_n)}{(z - p_1)(z - p_2)\cdots(z - p_m)}$$

p_i: polos del sistema

Salvo un factor, cualquier polinomio queda definido por sus raíces

$$X(z) = k \frac{(z-2)^2}{(z+1)(z+2)}; \qquad |z| < -1$$

Ceros: $c_1 = c_2 = 2$

Polos: $p_1 = -1; \qquad p_2 = -2$

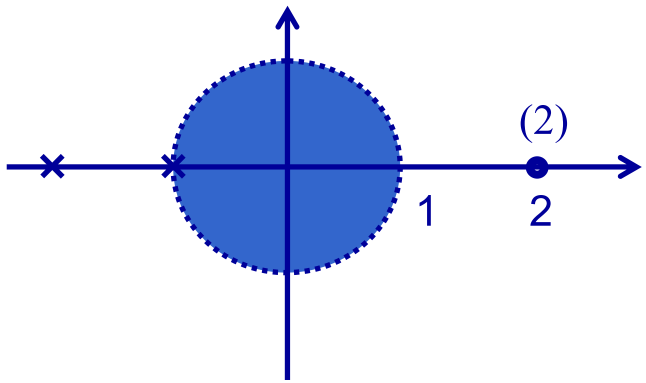
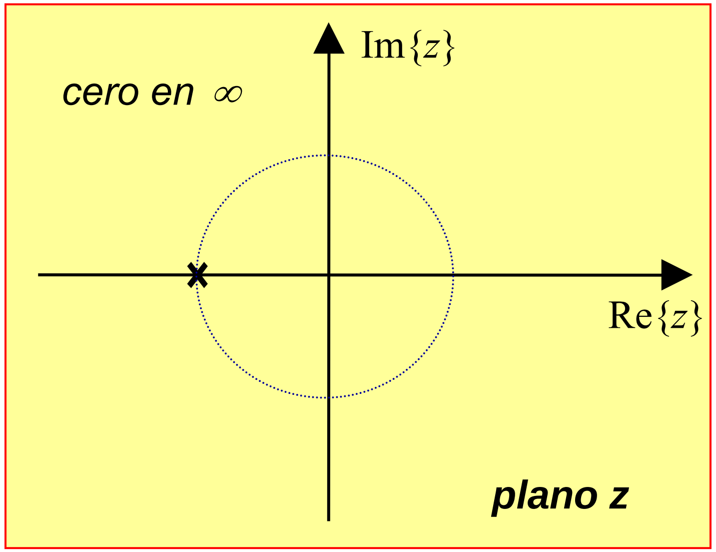


Diagrama de polos y ceros (III)

Coeficientes de $H(z)$ reales $\Rightarrow$ ceros y polos reales ó complejos conjugados

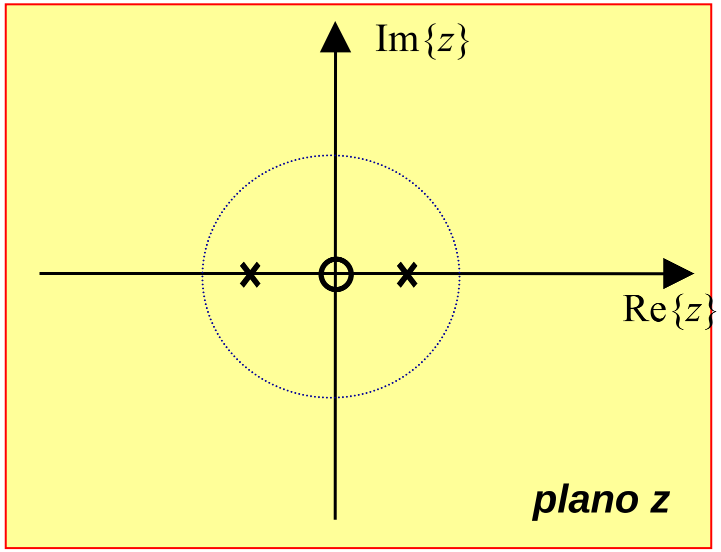
Ejemplo 1:

$$H(z) = \frac{1}{1+z}$$



Ejemplo 2:

$$H(z) = \frac{z^2}{(1-0.5z)(1+0.5z)}$$

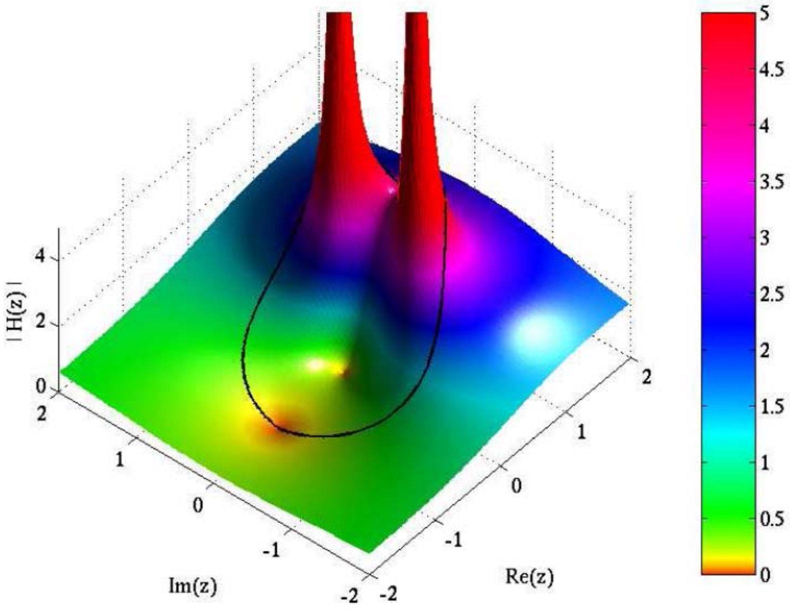


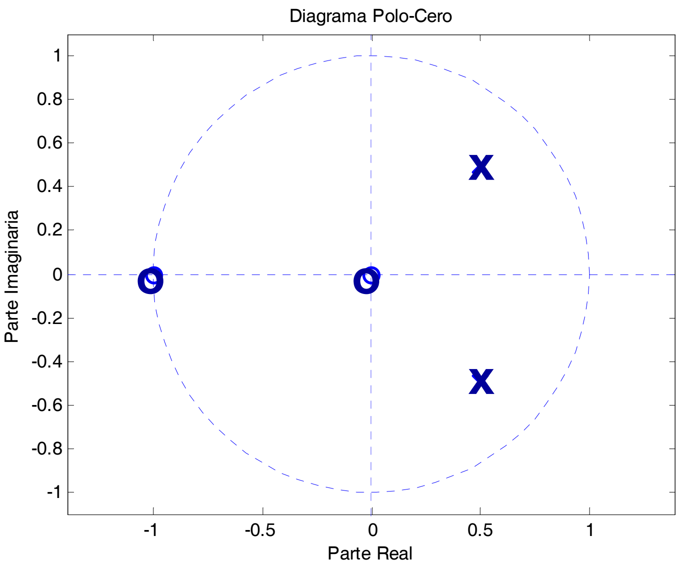
Ejemplo de TZ (I)

$$H(z)=\frac{1+z^{-1}}{1+z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

c_1=0; c_2=–1;

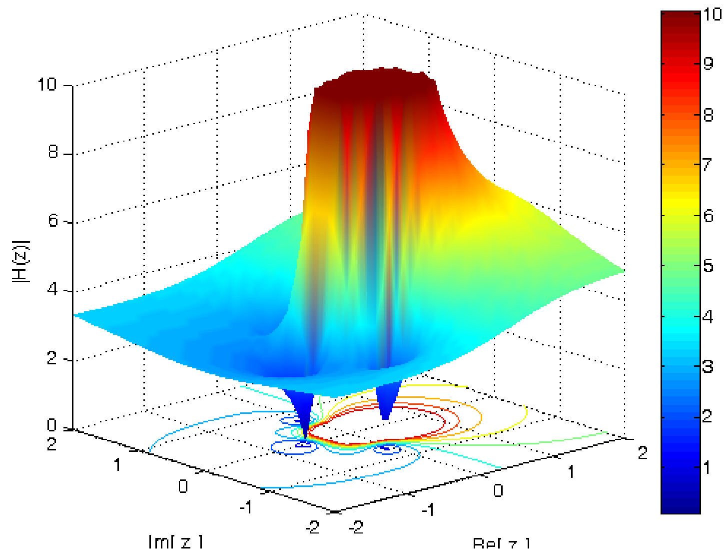
$p_{1,2}$=0.5(1± j)

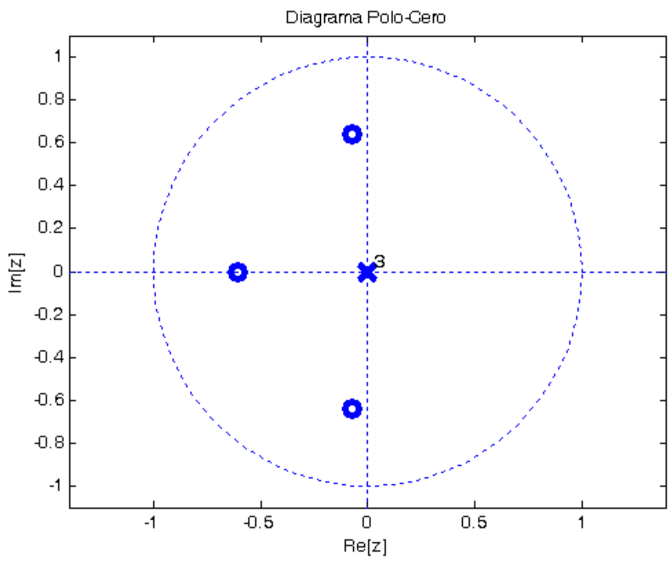


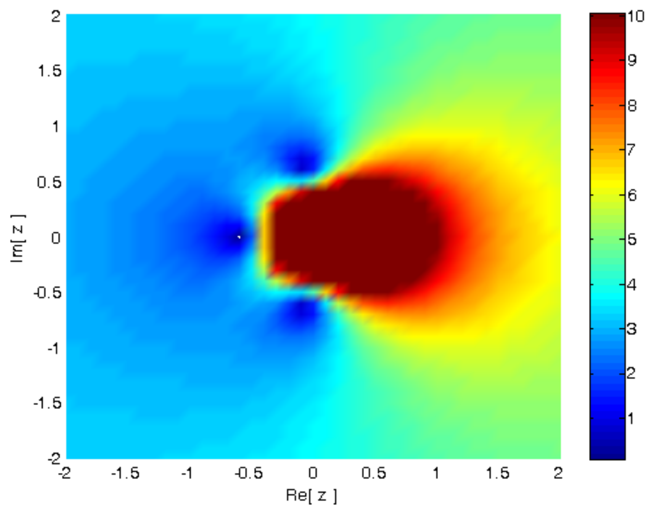


Ejemplo de TZ (II)

$$H(z) = \frac{4z^3 + 3z^2 + 2z + 1}{z^3}$$







5.2 Más propiedades

(3) Si $x[n]$ es de duración finita, entonces la ROC es todo el plano-z excepto posiblemente $z = 0$ y/o $z = \infty$.

¿Por qué?

$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] z^{-n}$$

el unico polo que puede tener es en cero...

Ejemplos:

$$\delta[n] \longleftrightarrow 1 \qquad \text{ROC all } z$$

$$\delta[n-1] \longleftrightarrow z^{-1} \qquad \text{ROC } z \neq 0$$

$$\delta[n+1] \longleftrightarrow z \qquad \text{ROC } z \neq \infty$$

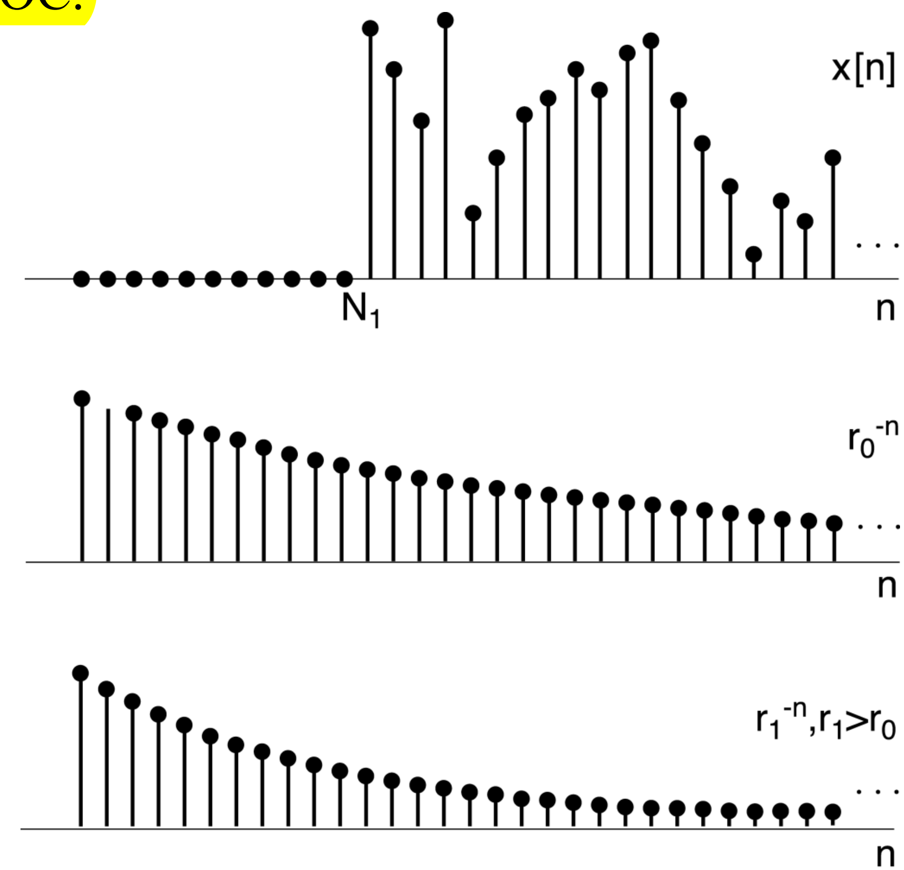
...o diverge a infinito....

TZ de señales básicas

Señal	Transformada	ROC
$\delta[\text{n}]$	1	$\forall z$
$u[\text{n}]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\|>1$
$\delta[\text{n-m}]$	z^{-m}	$\forall z\text{-}\{0,\infty\}$
$a^n u[\text{n}]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\|>\|a\|$
$na^n u[\text{n}]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\|>\|a\|$
$[\cos(\omega_o n)]u[n]$	$\dfrac{1-[\cos(\omega_o)]z^{-1}}{1-[2\cos(\omega_o)]z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
$[\text{sen}(\omega_o n)]u[n]$	$\dfrac{1-[sen(\omega_o)]z^{-1}}{1-[2\cos(\omega_o)]z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\|>1$
$[r^n\cos(\omega_o n)]u[n]$	$\dfrac{1-[r\cos(\omega_o)]z^{-1}}{1-[2r\cos(\omega_o)]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\|>r$
$[r^n sen(w_o n)]u[n$	$\dfrac{1-[rsen(w_o)]z^{-1}}{1-[2r\cos(w_o)]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\|>r$

5.2 Más propiedades

(4) Si $x[n]$ es una secuencia a derechas, y si $|z| = r_o$ está en la ROC, entonces todos los valores finitos de z con $|z| > r_o$ también están en la ROC.



$$\sum_{n=N_1}^{\infty} x[n] r_1^{-n}$$

Converge más rápido que:

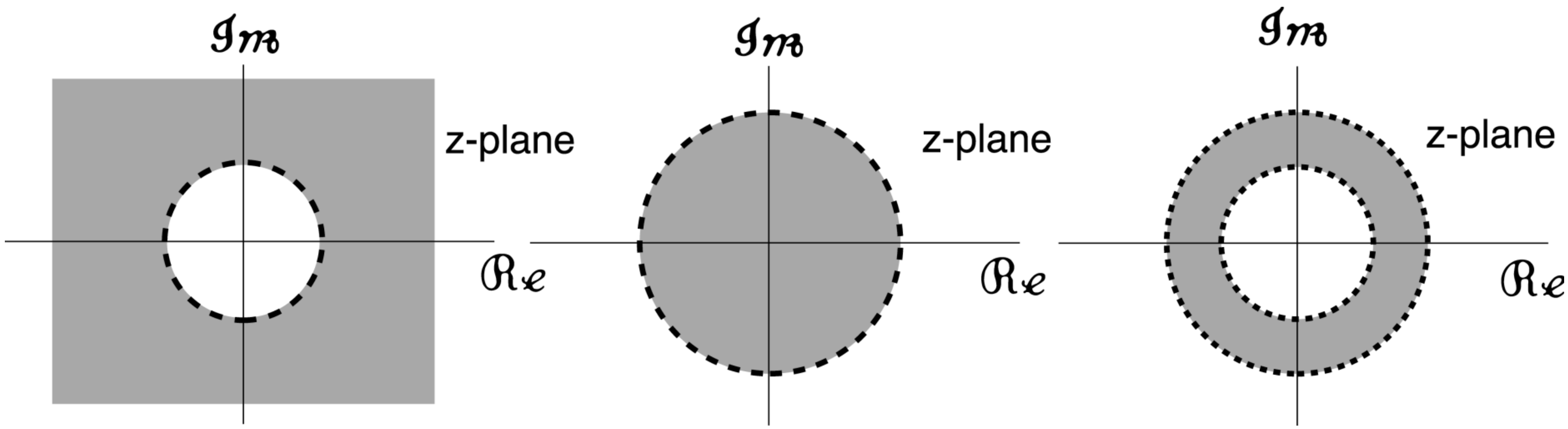
$$\sum_{n=N_1}^{\infty} x[n] r_0^{-n}$$

5.2 Más propiedades

(5) Si $x[n]$ es una secuencia a izquierdas, y si $|z| = r_o$ está en la ROC, entonces todos los valores finitos de z con $0 < |z| < r_o$ también están en la ROC.

(6) Si $x[n]$ es bilateral, y si $|z| = r_o$ está en la ROC, entonces la ROC es una anillo en el plano-z que incluye a la circunferencia con $|z| = r_o$.

¿A qué tipo de señales corresponden las siguientes ROCs?



sec. a derechas | sec. a izquierdas | sec. bilateral

importante estas figuras!

Propiedades de la TZ (IV)

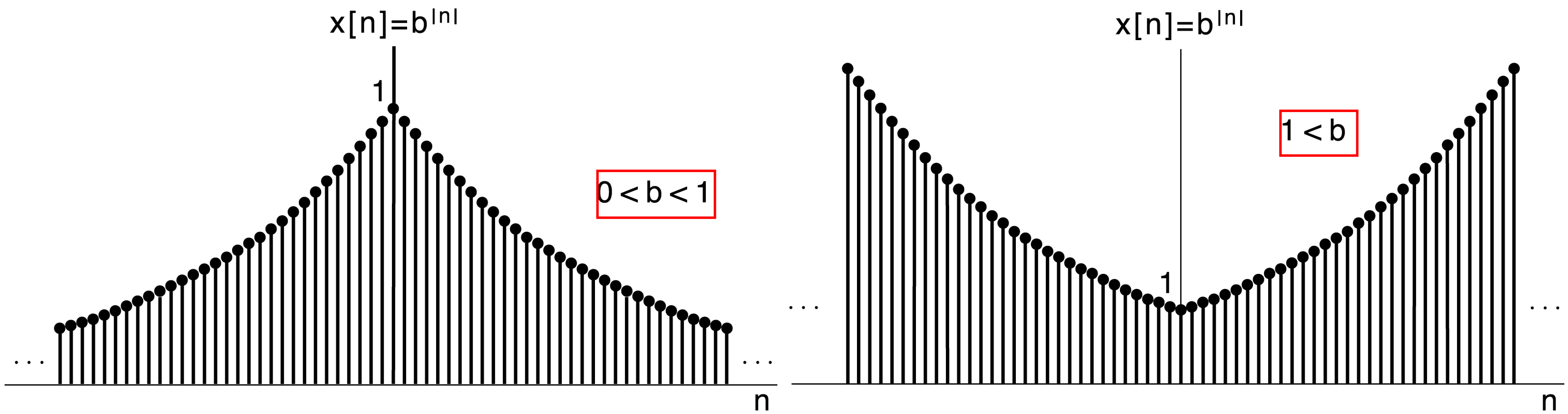
$$X(z) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] z^{-k}$$

Señal	Transformada	ROC
$x[n], x_1[n], x_2[n]$	$X(z), X_1(z), X_2(z)$	R_X, R_{X_1}, R_{X_2}
$ax_1[n]+bx_2[n]$	$aX_1(z)+bX_2(z)$	*contiene* $R_{X_1} \cap R_{X_2}$
$x[n-n_0]$	$z^{-n_0} X(z)$	R_X (†)
$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$	*contiene* $R_X \cap \{\lvert z \rvert > 1\}$
$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$\lvert z_0 \rvert R_X$
$x^*[-n]$	$X^*(1/z^*)$	$1/R_X$
$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z) X_2(z)$	*contiene* $R_{X_1} \cap R_{X_2}$
$x[n]=0, n<0$	$\lim_{z\to\infty} X(z) = x[0]$	

(†) indica que *z*=0 ó *z*=∞ pueden añadirse o eliminarse

Ejemplo 1

$$x[n] = b^{|n|}, \quad b > 0$$



$$x[n] = b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1]$$

De las tablas:

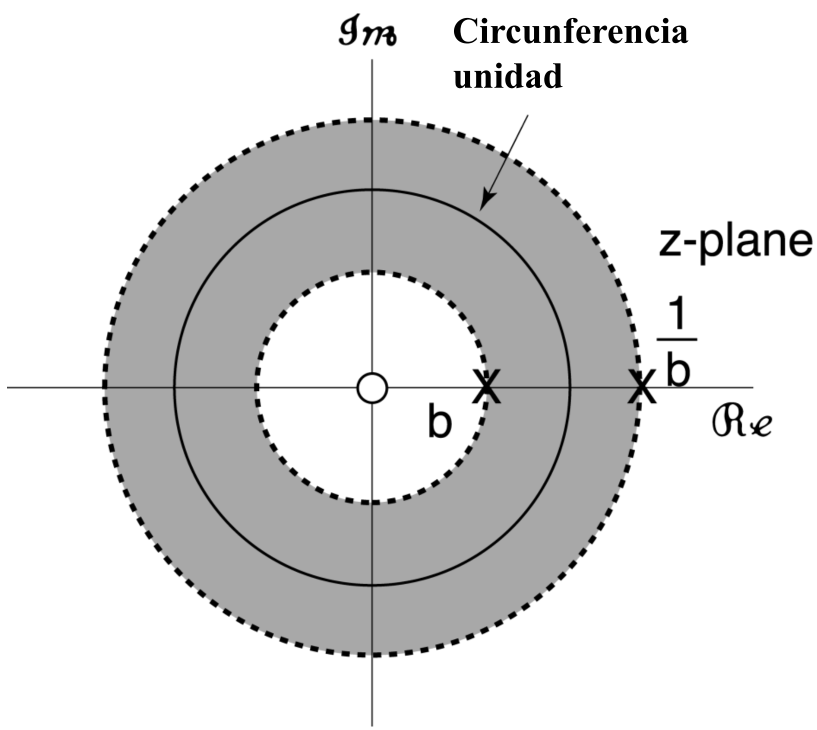
podemos obtener estas formulas desde la definición:

$$b^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1 - bz^{-1}}, \quad |z| > b$$

$$b^{-n} u[-n-1] \longleftrightarrow \frac{-1}{1 - b^{-1}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{b}$$

Ejemplo 1 (cont.)

$$X(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}} + \frac{-1}{1 - b^{-1}z^{-1}} \quad , \quad b < |z| < \frac{1}{b}$$



La ROC *no* existe si $b > 1 \Rightarrow$ *No* hay TZ para $b^{|n|}$.

Si b>1

5.2 Más propiedades

(7) Si $X(z)$ es racional, entonces su ROC está delimitada por los polos o se extendiende al ∞

Combinando la propiedad (7) con (4) y (5):

(8) Si $X(z)$ es racional y $x[n]$ es a derechas, entonces la ROC se extiende desde el polo más externo (el de mayor módulo) hasta el ∞ (incluyéndolo o no). Si además, $x[n]$ es causal, la ROC incluye al ∞.

(9) Si $X(z)$ es racional y $x[n]$ es a izquierdas, entonces la ROC se extiende desde el polo más interno (el de menor módulo) hasta el origen (incluyéndolo o no). Si además, $x[n]$ es anticausal, la ROC incluye al origen, es decir, a $z = 0$.

5.3 TZ inversa

$$X(z) = X(\underbrace{\boxed{re^{j\Omega}}}_{z}) = TF\{x[n]r^{-n}\}, \quad \boxed{z = re^{j\Omega} \in ROC}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x[n]\boxed{r^{-n}}} = TF^{-1}\{X(\underbrace{\boxed{re^{j\Omega}}}_{z})\} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\Omega})e^{j\Omega n}d\Omega$$

$$\Downarrow$$

la integral es respecto a Omega

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(re^{j\Omega})\underbrace{\boxed{r^n}e^{j\Omega n}}_{z^n}d\Omega$$

Para r fijo:

$$z = re^{j\Omega} \Rightarrow dz = j\,re^{j\Omega}d\Omega \Rightarrow d\Omega = \frac{1}{j}z^{-1}dz$$

$$\Downarrow$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz$$

Se necesitan herramientas matemáticas más avanzadas, nos centraremos en un par de casos sencillos

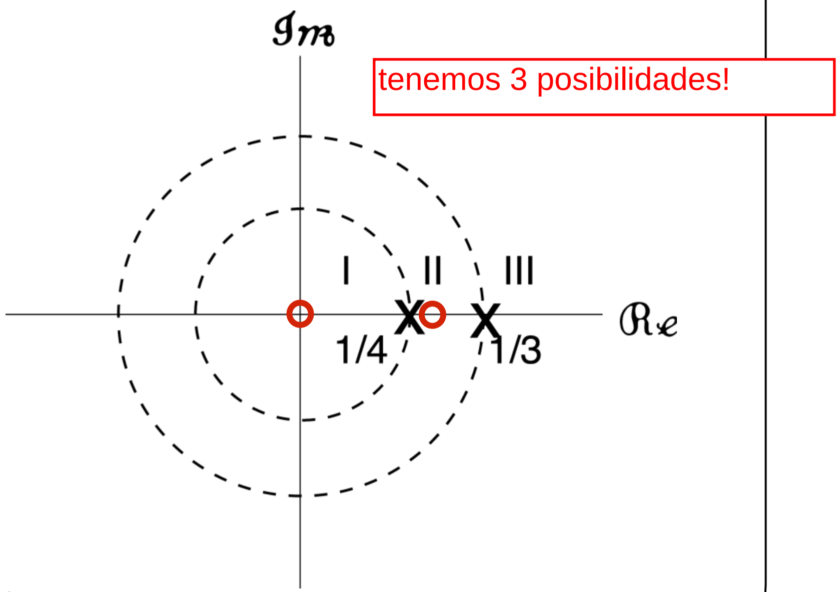
Otras formas de calcular TZ inversas:

a) si TZ es racional → usar expansión en fracciones simples: *Ejemplo*

$$X(z) = \frac{3z^2 - \frac{5}{6}z}{(z-\frac{1}{4})(z-\frac{1}{3})} = \frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})} = \frac{A}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

Expandiendo en fracciones simples: $A = 1, B = 2$

$$\begin{array}{ccccc} X(z) & = & \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} & + & \frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ x[n] & = & x_1[n] & + & x_2[n] \end{array}$$



Nota:

1) Para calcular polos y ceros, expresa $X(z)$ como una función de z.

2) Para calcular TZ inversas usa expansión en fracciones simples y expresa $X(z)$ como una función de z^{-1}.

tenemos 3 posibilidades!

ROC III: $|z| > \frac{1}{3}$ - sec. a derechas

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$x_2[n] = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

ROC II: $\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$ - sec. bilateral

$$x_1[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$$x_2[n] = -2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$$

ROC I: $|z| < \frac{1}{4}$ - sec. a izquierdas

$$x_1[n] = -\left(\frac{1}{4}\right)^n u[-n-1]$$

$$x_2[n] = -2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$$

b) Si TZ no es racional → por identificación de coeficientes en series de potencias

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

$x[n]$ son los coeficientes de z^{-n}

Ejemplo:

$$X(z) = 3z^3 - z + 2z^{-4}$$

Ejemplo estupendo!!

$$\begin{aligned} x[-3] &= 3 \\ x[-1] &= -1 \\ x[4] &= 2 \\ x[n] &= 0 \text{, para el resto de valores de } n \end{aligned}$$

importante por la ecuaciones a la diferencias

5.4 Propiedades de la TZ

(1) Desplazamiento temporal $\boxed{x[n-n_0] \longleftrightarrow z^{-n_0}X(z),}$

La ROC no cambia, excepto por posible adición o eliminación del origen o del infinito

si $n_o > 0 \Rightarrow$ puede que la ROC no contenga $z = 0$

si $n_o < 0 \Rightarrow$ puede que la ROC no contenga $z = \infty$

(2) Diferenciación en dominio-z: $nx[n] \longleftrightarrow -z\dfrac{dX(z)}{dz}$, la ROC no cambia

Derivación:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

$$\frac{dX(z)}{dz} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]z^{-n-1}$$

$$-z\frac{dX(z)}{dx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]z^{-n}$$

5.4 Propiedades de la TZ

(3) Escalado en el dominio-z:

$$z_0^n x[n] \xleftrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{z_0}\right), \quad ROC = |z_0|\, ROC_x$$

(4) Teorema del valor principal:

si x[n] es causal (x[n]=0, n < 0), entonces x[0] = $\lim_{z\to\infty} X(z)$

(5) Otras: linealidad, expansión temporal, conjugación, etc.

5.4 Propiedad de Convolución

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$$

$Y(z) = H(z)X(z)$, la ROC es al menos la intersección de las ROCs de $H(z)$ y $X(z)$,
puede ser más grande si hay cancelación de polos/ceros. *P.e.*

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{z-a}, \quad |z| > a \\ X(z) &= z-a, \quad z \neq \infty \\ Y(z) &= 1 \quad \text{ROC all } z \end{aligned}$$

$$\boxed{H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}}$$

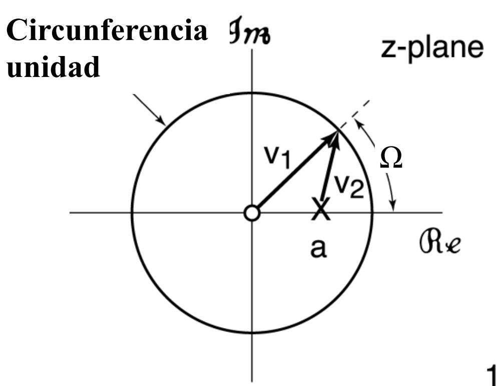
— Función (de transferencia) del sistema

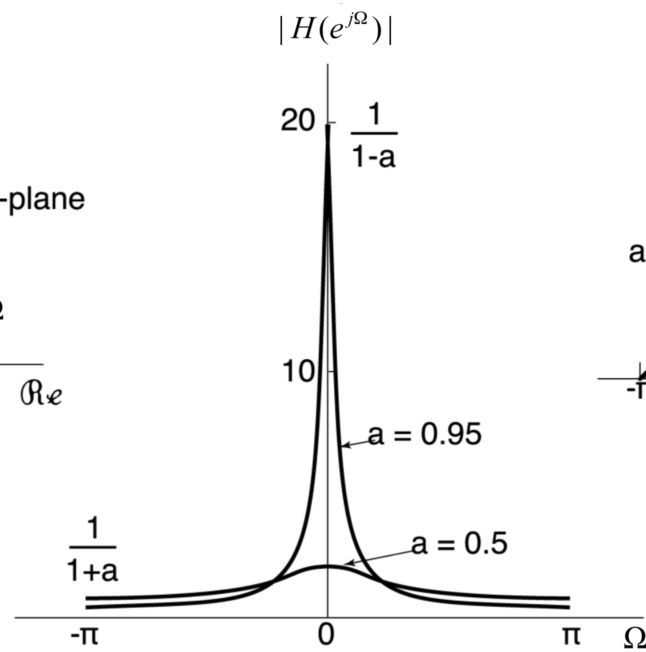
5.5 Evaluación de la respuesta en frecuencia a partir del diagrama de polos y ceros

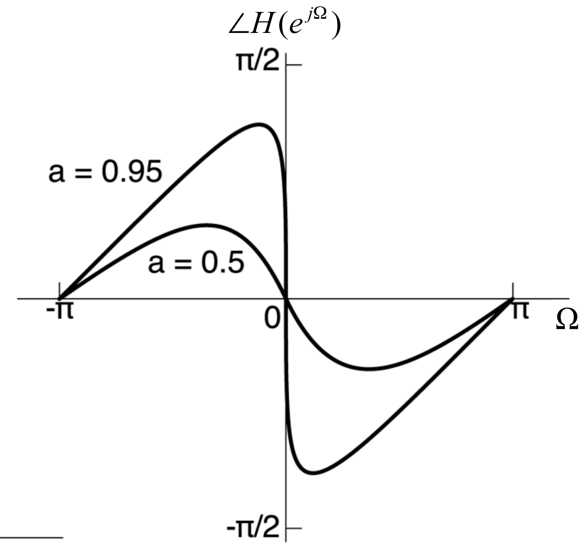
Sistema de primer orden
— un polo *real*

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z-a} \quad , \quad |z| > |a|$$

$$h[n] = a^n u[n] \quad , \quad |a| < 1$$

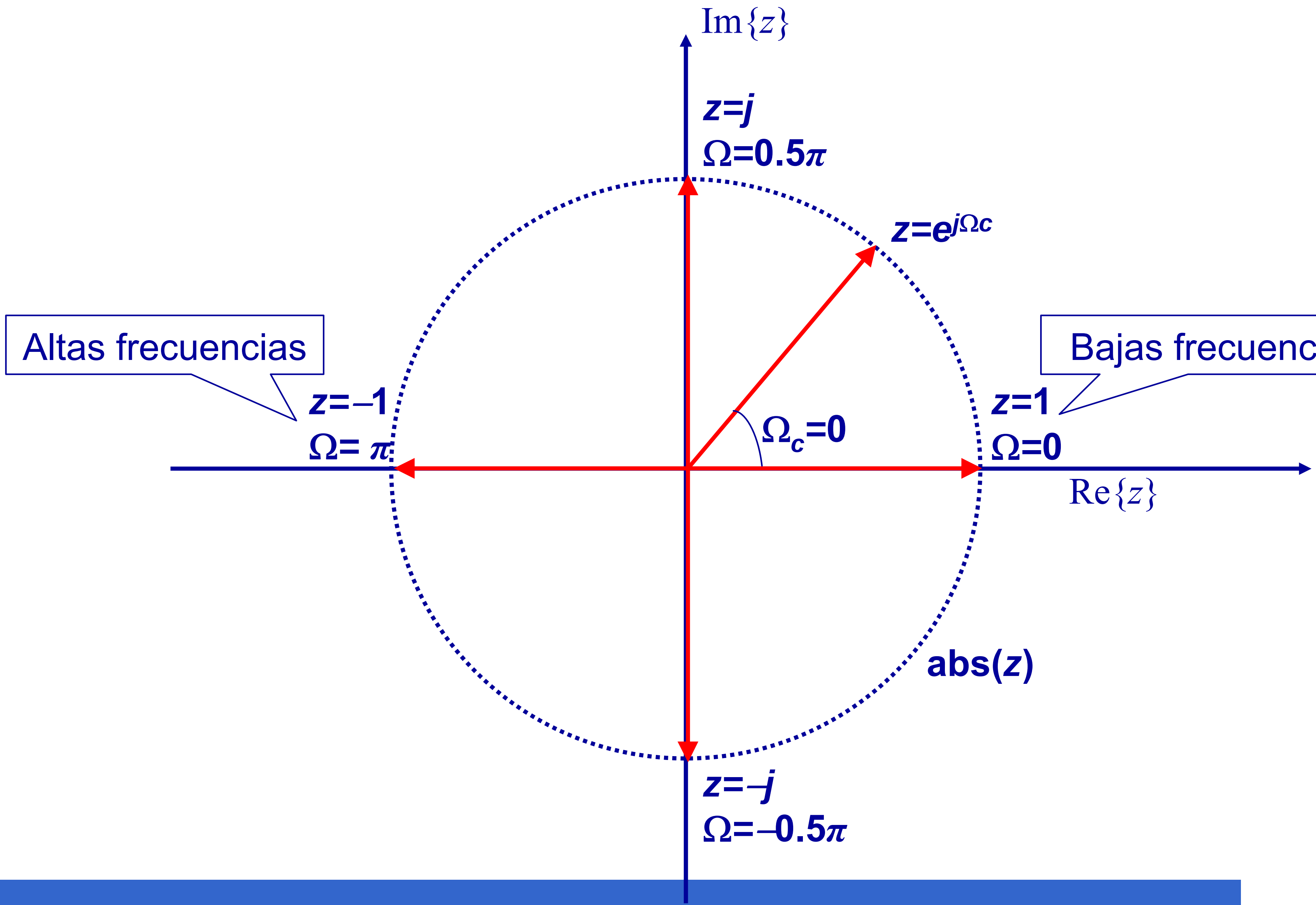






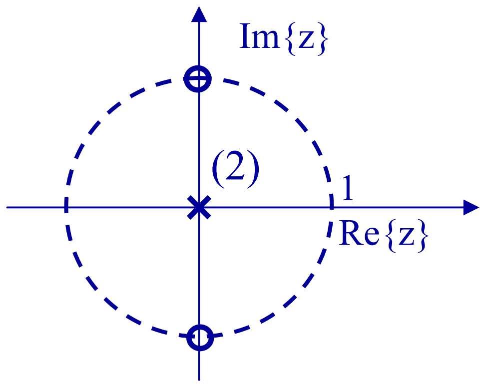
$$H(e^{j\Omega}) = \frac{v_1}{v_2}, \; |H(e^{j\Omega})| = \frac{|v_1|}{|v_2|} = \frac{1}{|v_2|}, \quad \angle H(e^{j\Omega}) = \angle v_1 - \angle v_2 = \Omega - \angle v_2$$

El plano z y el círculo de radio unidad



Ejemplo (I)

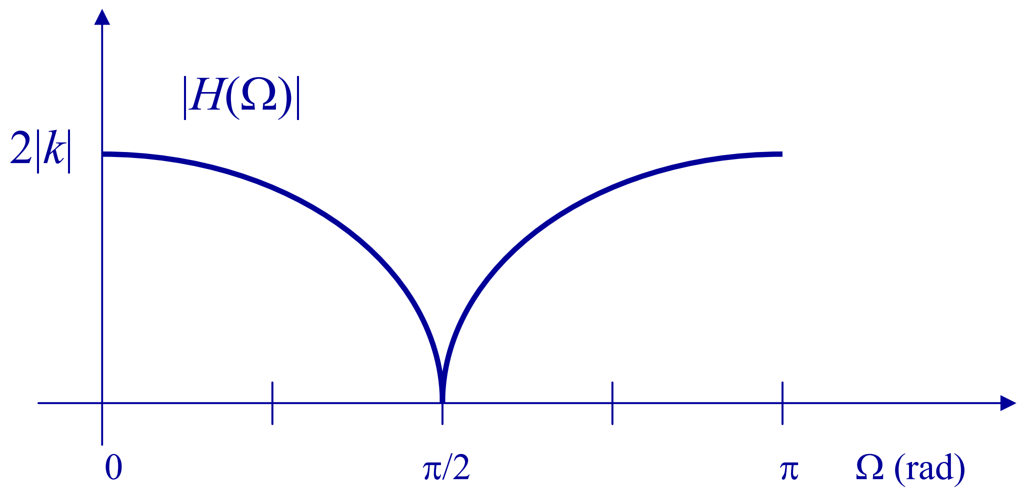
Supongamos el siguiente diagrama de polos y ceros:



$$H(z) = k\frac{\prod_i \left(1 - c_i z^{-1}\right)}{\prod_i \left(1 - p_i z^{-1}\right)} = k\frac{\left(1 - jz^{-1}\right)\left(1 + jz^{-1}\right)}{1^2} \Rightarrow$$

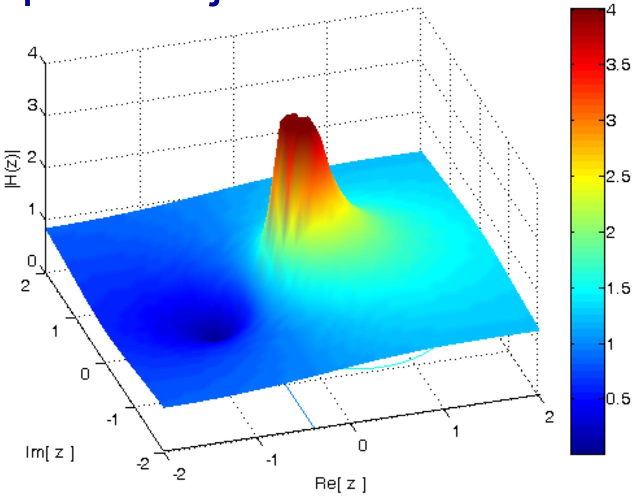
$$H(\Omega) = k\left(1 - j\,\mathrm{e}^{-j\Omega}\right)\left(1 + j\,\mathrm{e}^{-j\Omega}\right) = k\left(1 + \mathrm{e}^{-j2\Omega}\right)$$

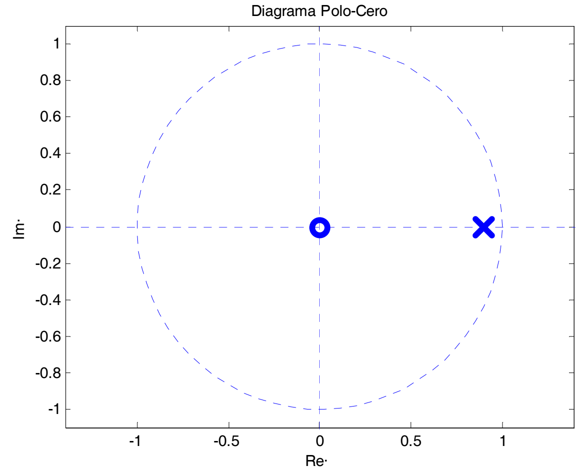
Como $H(\Omega)$ es periódica de periodo 2π, basta dibujarla entre 0 y 2π. Para $h[n]$ real (polos y ceros reales o pares complejos conjugados) $|H(\Omega)|$ tiene simetría par, entonces basta dibujar entre 0 y π :

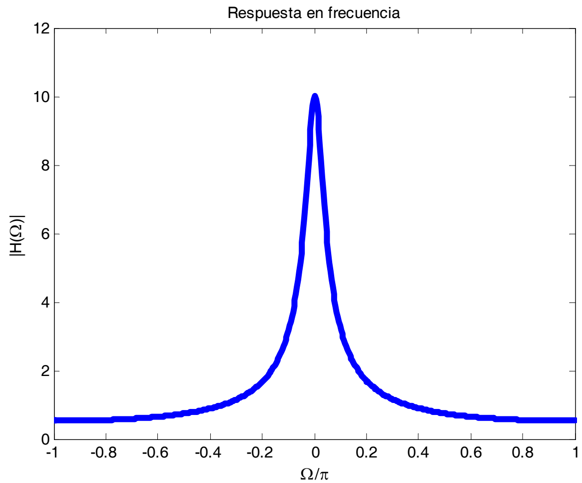


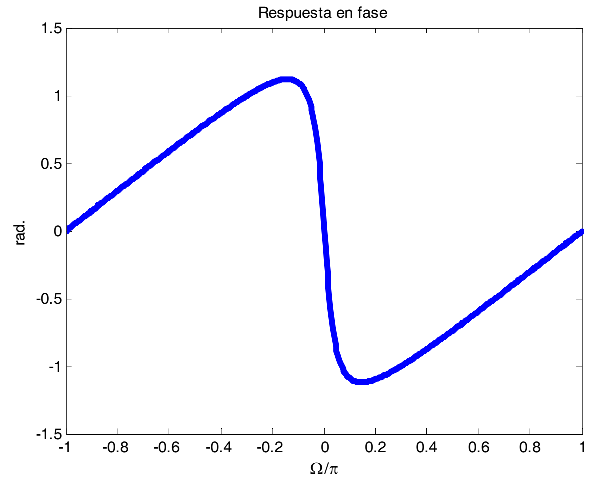
Ejemplo (II)

Filtro paso bajo



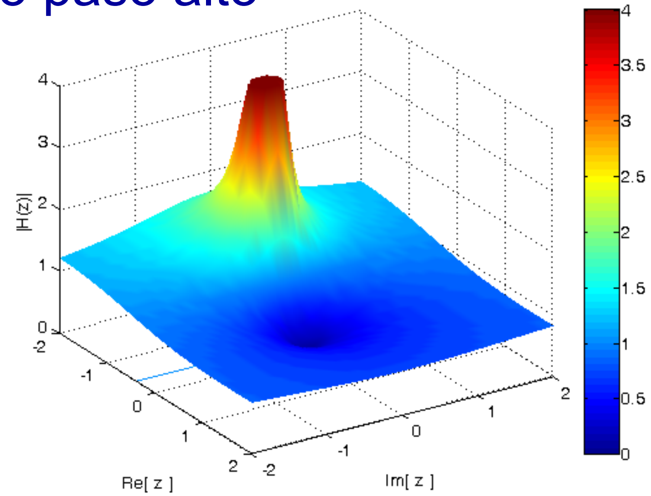


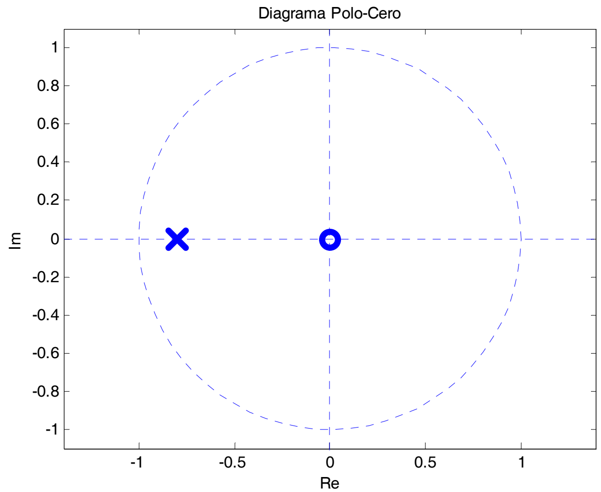


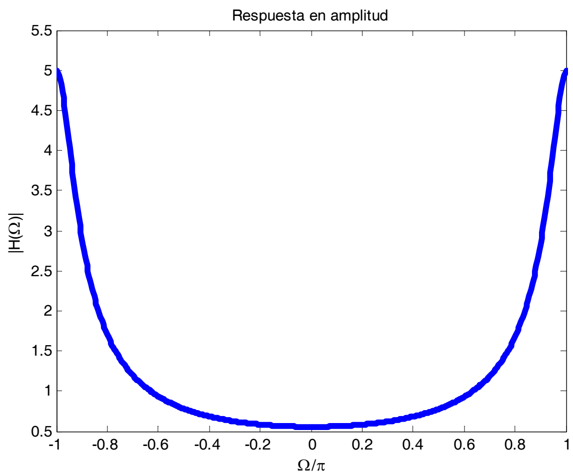


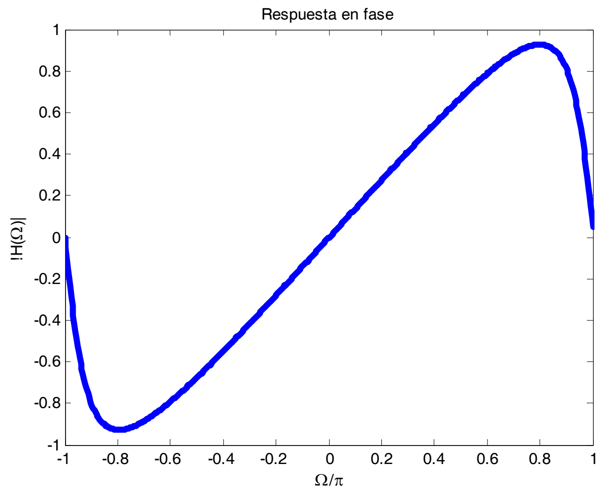
Ejemplo (III)

Filtro paso alto



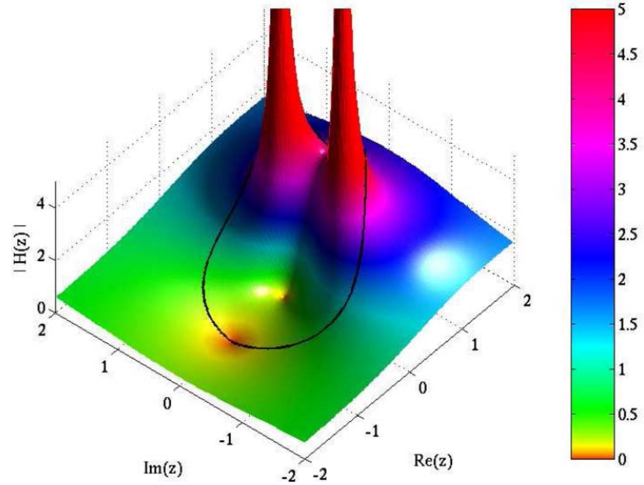


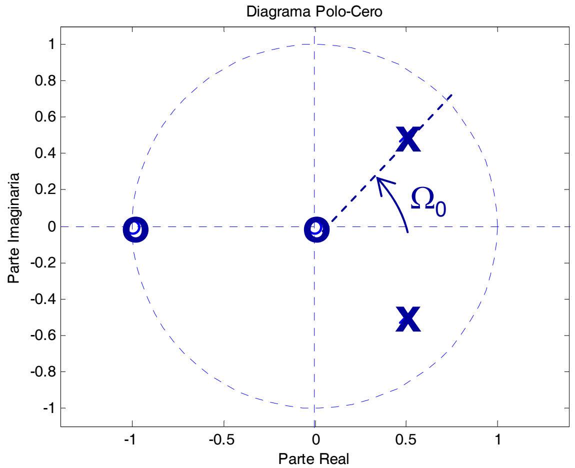


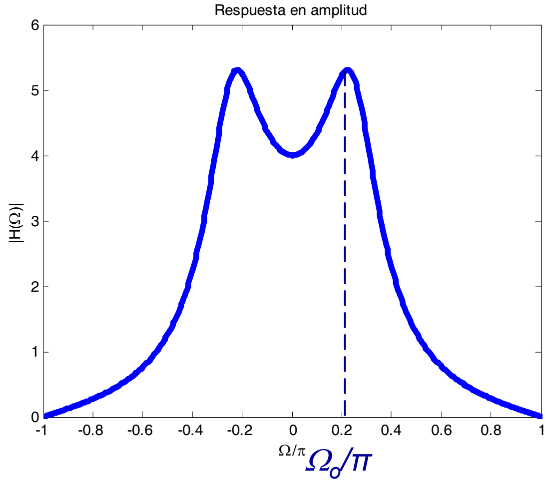


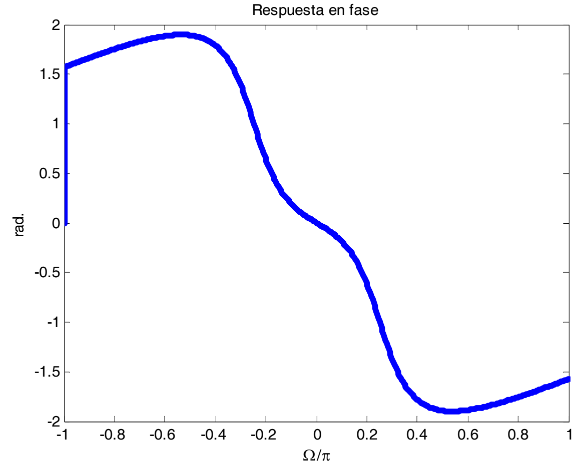
Ejemplo (IV)

Filtro paso banda









bueno necesitamos la ROC

5.6 Análisis y caracterización de los SLTIs usando la TZ

Los SLTIs quedan totalmente caracterizados por su $h[n]$ ➔ Los SLTIs quedan totalmente caracterizados por su $H(z)$ ➔ Analizando $H(z)$, su ROC y sus diagramas de polos y ceros podremos analizar tanto el comportamiento como las propiedades del SLTI asociado

1) **Causalidad**: $h[n]$ es una sec. a derechas $\Rightarrow$ la ROC es el exterior de una circunferencia *posiblemente* incluyendo $z = \infty$:

$$H(z) = \sum_{n=N_1}^{\infty} h[n] z^{-n}$$

Si $N_1 < 0$, entonces el término $h[N_1] z^{-N_1} \rightarrow \infty$ en $z = \infty$

$\Rightarrow$ La ROC es el exterior a una circunferencia, pero *sin* incluir el ∞

$$\text{Causal} \Leftrightarrow N_1 \geq 0$$

$$\Downarrow$$

Un SLTI en DT con función de transferencia $H(z)$ es causal $\Leftrightarrow$ la ROC de $H(z)$ es el exterior a una circunferencia *incluyendo* $z = \infty$

Causalidad para sistemas con funciones de transferencia racionales

$$\boxed{H(z) = \frac{b_M z^M + b_{M-1} z^{M-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \cdots + a_1 z + a_0}}$$

$\Downarrow$ Si M $\leq$ N, no hay polos en el ∞

Un SLTI en DT con función de transferencia *H*(*z*) racional es causal

$\Leftrightarrow$ (a) la ROC es el exterior de la circunferencia dada por el polo más externo

(b) si podemos escribir *H(z)* como el cociente de polinomios en *z*

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

entonces

grado *N*(*z*) $\leq$ grado *D*(*z*)

2) Estabilidad:

SLTI es estable $\Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \Leftrightarrow$ ROC de $H(z)$ incluye a la circunferencia unidad, $|z| = 1$

$\Rightarrow$ la respuesta en frecuencia $H(e^{j\Omega})$ (TF en DT de $h[n]$) existe.

3) Causalidad y estabilidad:

Un SLTI causal con función de transferencia racional es estable $\Leftrightarrow$ todos los polos están dentro del círculo unidad, es decir, tienen magnitudes < 1

Un SLTI anticausal con función de transferencia racional es estable $\Leftrightarrow$ todos los polos están fuera del círculo unidad, es decir, tienen magnitudes > 1

5.6 Representación en diagramas de bloques:

SLTIs Descritos por Ecuaciones en Diferencias (SDED)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

No da información sobre la ROC

Usando la propiedad de desplazamiento temporal:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$

$$\Downarrow$$

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$ — racional

ROC: Depende de si h[n] es una sec. a izquierdas, a derechas o bilateral.

Para caracterizar el sistema, además de $H(z)$, necesitamos su ROC, es decir, necesitamos saber si el sistema es causal y/o estable

Ejemplo 1:

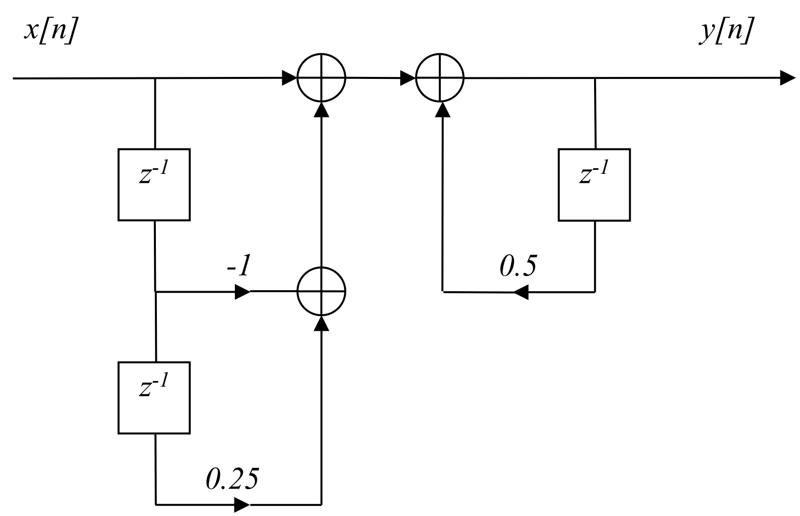
$$y[n] = 0.5y[n-1] + x[n] - x[n-1] + 0.25x[n-2]$$ ➔ Si lo pasamos a z

$$Y(z) = 0.5Y(z)z^{-1} + X(z) - X(z)z^{-1} + 0.25X(z)z^{-2}$$

$$Y(z) - 0.5Y(z)z^{-1} = X(z) - X(z)z^{-1} + 0.25X(z)z^{-2}$$

$$Y(z)\left(1 - 0.5z^{-1}\right) = X(z)\left(1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}\right) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\left(1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}\right)}{\left(1 - 0.5z^{-1}\right)}$$

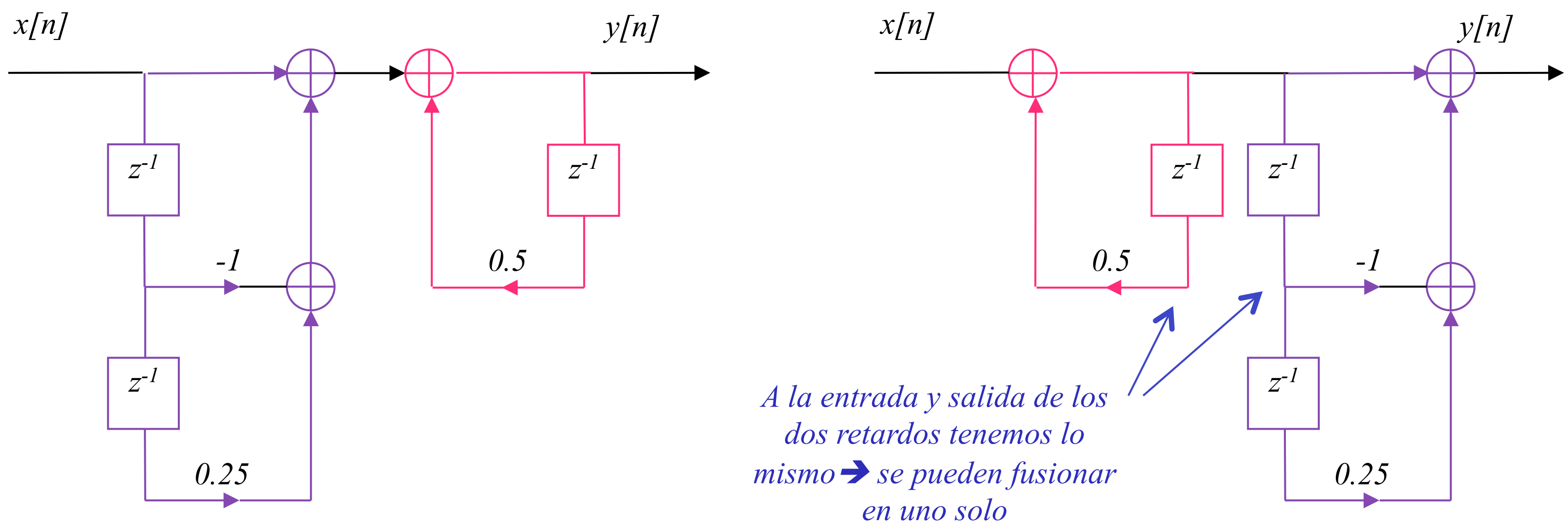
¿Diagrama de bloques?



Ejemplo 1:

Es un sistema, pero lo podemos ver como la conexión en cascada de dos

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}}{1 - 0.5z^{-1}} = \frac{1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}}{1}\,\frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}\,\frac{1 - z^{-1} + 0.25z^{-2}}{1}$$

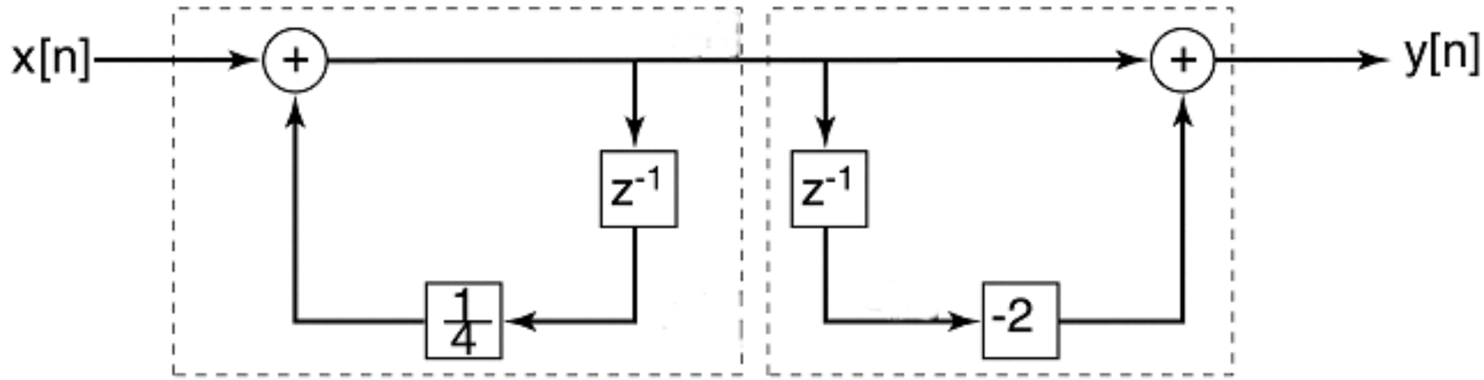


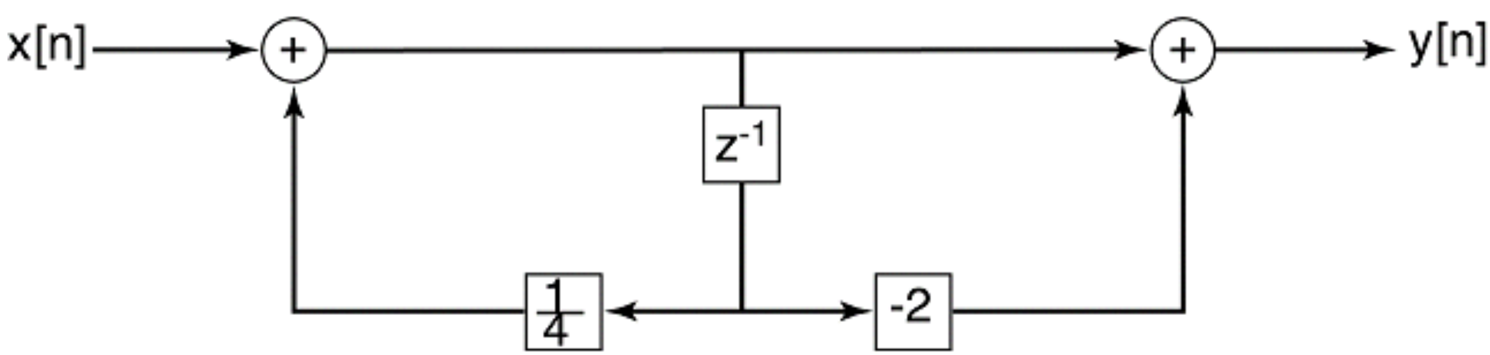
Forma Directa I

Forma Directa II

Ejemplo 2:

$$H(z) = \frac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}\right)(1-2z^{-1})\ \text{—}$$ Cascada de dos sistemas





Respuestas al impulso de SDED

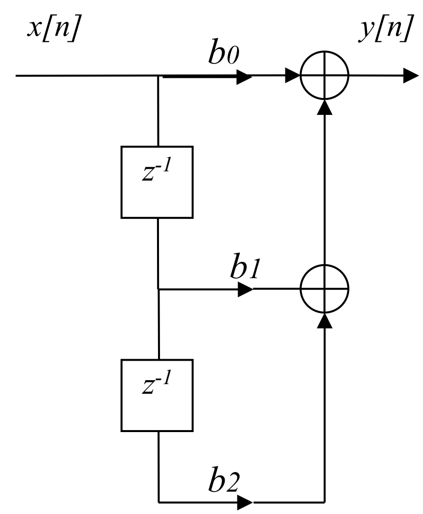
Caso A): La salida es únicamente versiones retardadas de la entrada ➔ Fácil

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$$

RI: salida cuando la entrada es δ[n] →

$$h[n] = b_0 \delta[n] + b_1 \delta[n-1] + b_2 \delta[n-2]$$

Si lo pasamos a z es igual de fácil



$$Y(z) = b_0 X(z) + b_1 X(z) z^{-1} + b_2 X(z) z^{-2}$$

$$\Downarrow$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$$

$$\Downarrow$$ TZ inversa

$$h[n] = b_0 \delta[n] + b_1 \delta[n-1] + b_2 \delta[n-2]$$

Evidentemente nos da lo mismo que si lo hacemos directamente en el dominio del tiempo

Respuestas al impulso de SDED

Caso B): La salida es la entrada más la salidad retardada un instante ➔ No muy difícil

$$y[n] = x[n] + a_1 y[n-1]$$

RI: salida cuando la entrada es δ[n] → h[n]

Si x[n]=δ[n]:

Hasta n=0 x[n] es cero → y[n]=h[n]=0 n<0

En n=0, x[n]=1 → y[0]=x[0]+a_1y[-1]=1+0

En n=1, x[n]=0 → y[1]=x[1]+a_1y[0]=0+$a_1 \cdot 1 = a_1$

En n=2, x[n]=0 → y[2]=x[2]+a_1y[1]=0+$a_1 \cdot a_1 \cdot 1 = (a_1)^2$

…

En n=m, x[m]=0 → y[m]=x[m]+a_1y[m-1]=0+$a_1 \cdot (a_1)^{m-1} = (a_1)^m$

$$h[n] = (a_1)^n u[n]$$

Si lo pasamos a z es más fácil

$$Y(z) = X(z) + a_1 Y(z) z^{-1}$$

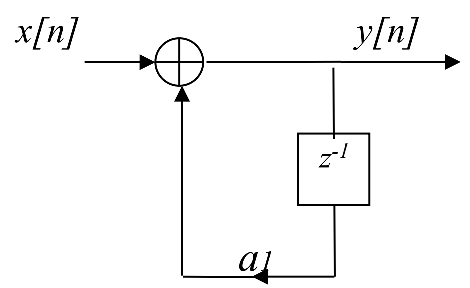
$$\Downarrow$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1}}$$

$$\Downarrow$$ TZ inversa

$$h[n] = (a_1)^n u[n]$$

Evidentemente nos da lo mismo que si lo hacemos directamente en el dominio del tiempo



Respuestas al impulso de SDED

Caso C): Un sistema SDED general $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$

Obtener la RI en el dominio del tiempo es bastante complicado: ¿solución? → Nos vamos al dominio Z, obtenemos H(z) y luego hacemos la TZ inversa

- Muy parecido a lo que se hace en continuo cuando tenemos ecuaciones diferenciales
- Para hacer la TZ inversa hay que hacer descomposición en fracciones simples

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \quad \Rightarrow \quad H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

$\Downarrow$ Descomposición en frac.simples

$$H(z) = \ldots + C_1 z + C_0 + C_{-1} z^{-1} + C_{-2} z^{-2} + \ldots + \frac{D_1}{1 - d_1 z^{-1}} + \frac{D_2}{1 - d_2 z^{-1}} + \ldots$$

Sí sabemos hacer la TZ inversa de cada uno de los sumandos $\Downarrow$

$$h[n] = \ldots + C_1 \delta[n+1] + C_0 \delta[n] + C_{-1} \delta[n-1] + C_{-2} \delta[n-2] + \ldots + D_1 \cdot d_1^n du[n] + D_2 \cdot d_2^n du[n] + \ldots$$

Nota: hay que saber hacer descomposición en fracciones simples (Ruffini, polos dobles, etc.)

9. Sistemas descritos por ec. en diferencias lineales de coeficientes constantes (e.d.l.c.c.)

- Consideramos la forma general de una e.d.l.c.c. (*N* y *M*≥0):

$$\sum_{K=0}^{N} a_k \cdot y[n-k] = \sum_{K=0}^{M} b_k \cdot x[n-k], \qquad y^{i)}[n-k] = c_i, \quad i = 1.....N$$

- Dos soluciones: $y[n] = y_l[n] + y_f[n]$
  - Solución homogénea (régimen libre o transitorio)

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{K=0}^{N} a_k \cdot y[n-k] = 0, \qquad y^{i)}[n-k] = c_i, \quad i = 1.....N \\ y[n] = z_0^n \equiv \text{autofunción} \end{array}\right\} \Rightarrow y_l[n]$$

  - Solución completa (régimen forzado o permanente)

$$\left.\sum_{K=0}^{N} a_k \cdot y[n-k] = \sum_{K=0}^{M} b_k \cdot x[n-k], \qquad y^{i)}[n-k] = 0, \quad i = 1.....N \right\} \Rightarrow y_f[n]$$

$$y_f[n] = \frac{1}{a_0}\left(\sum_{K=0}^{M} b_k \cdot x[n-k] \right)$$

Función de sistema para sistemas LTI discretos descritos por e.d.l.c.c.

- Sea un sistema definido por e.d.l.c.c. que parte del **reposo inicial** (condiciones iniciales nulas trasladables)

$$\sum_{K=0}^{N} a_k \cdot y[n-k] = \sum_{K=0}^{M} b_k \cdot x[n-k], \qquad y^{i)}[n-k] = 0, \quad i = 1.....N$$

- Aplicando TZ se tiene: $TZ\left\{\sum_{K=0}^{N} a_k \cdot y[n-k]\right\} = TZ\left\{\sum_{K=0}^{M} b_k \cdot x[n-k]\right\} \Rightarrow$

$$\sum_{K=0}^{N} a_k \cdot TZ\{y[n-k]\} = \sum_{K=0}^{M} b_k \cdot TZ\{x[n-k]\} \Rightarrow$$

$$\sum_{K=0}^{N} a_k \cdot z^{-k} Y(z) = \sum_{K=0}^{M} b_k \cdot z^{-k} X(z) \Rightarrow Y(z)\sum_{K=0}^{N} a_k \cdot z^{-k} = X(z)\sum_{K=0}^{M} b_k \cdot z^{-k}$$

- Y por lo tanto:

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{K=0}^{M} b_k \cdot z^{-k}}{\sum_{K=0}^{N} a_k \cdot z^{-k}} = \frac{A \cdot \prod_{k=1}^{M}\left(1 - c_k z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1 - d_k z^{-1}\right)}}$$

Respuesta en frecuencia de sistemas caracterizados por e.d.l.c.c.

- Supongamos un sistema descrito por una ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes (e.d.l.c.c.) que parte del **reposo inicial**:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- Consideramos que *N* y *M* son positivos
- Suponemos que a_0 es no nulo.
- Aplicamos DTFT a ambos lados de la ecuación.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k TF\left\{y[n-k]\right\} = \sum_{k=0}^{N} a_k \, \mathrm{e}^{-jk\Omega}\, Y(\Omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k TF\left\{x[n-k]\right\} = \sum_{k=0}^{M} b_k \, \mathrm{e}^{-jk\Omega}\, X(\Omega)$$

$$\boxed{H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \, \mathrm{e}^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k \, \mathrm{e}^{-jk\Omega}}}$$

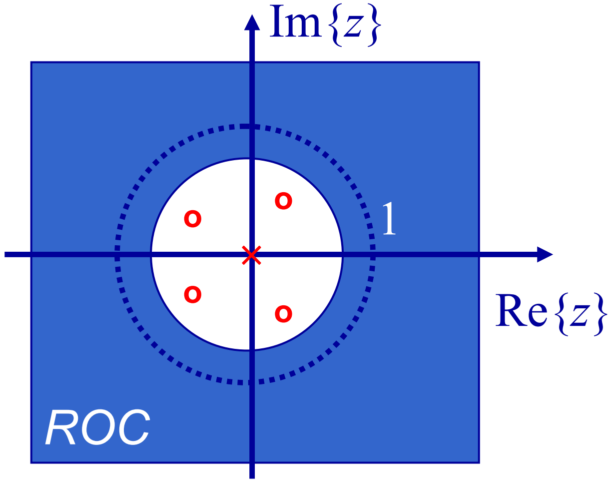
10. Introducción al filtrado digital

- Filtros **FIR**:
  - la función de sistema puede expresarse como un polinomio en el numerador
  - la respuesta al impulso tiene **longitud finita**
  - **todos los polos están en el origen** (si es no causal puede haber polos en el infinito)
  - No recursivo implica filtro FIR

- Filtros **IIR:**
  - la función de sistema tiene polos
  - la respuesta al impulso tiene **longitud infinita**
  - los polos están en cualquier punto del plano z
  - filtro IIR implica recursivo

Filtros FIR

$$y[n]=\sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k]$$ **No recursivo**

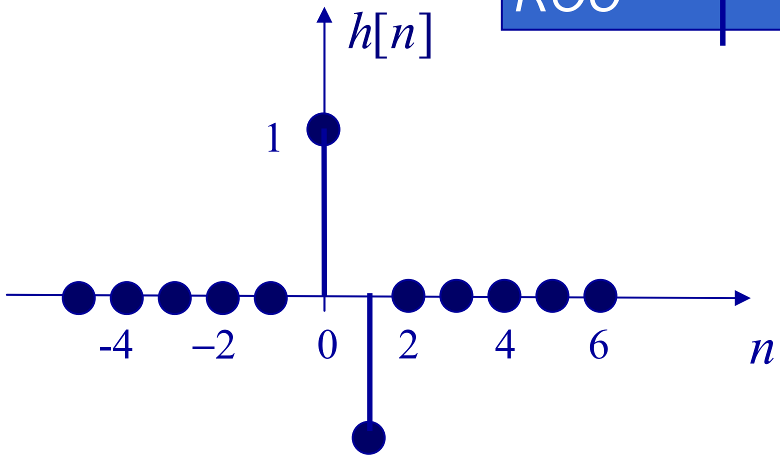


$$H(z)=\sum_{K=0}^{N} b_k \cdot z^{-k} = A\cdot\prod_{k=1}^{N}(1-c_k z^{-1})$$

Ej: 1ª diferencia

$y[n]= x[n]-x[n-1]$

$H(z)= 1 - z^{-1}$



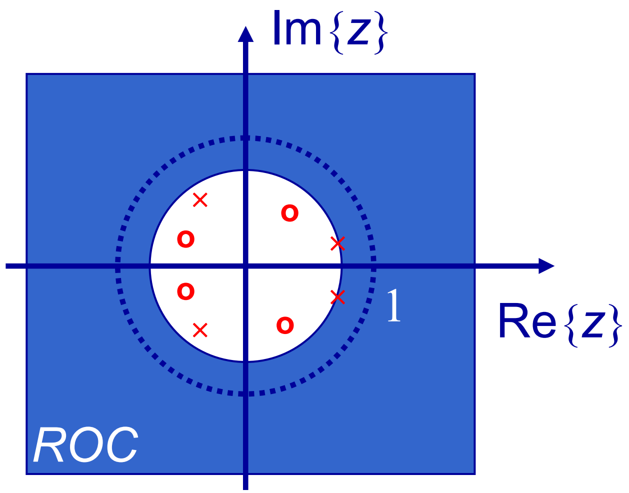
La respuesta al impulso de un sistema **FIR** tiene (***N*+1**) términos

Filtros IIR

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

$$H(z) = \frac{\sum_{K=0}^{M} b_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{K=1}^{N} a_k \cdot z^{-k}}$$

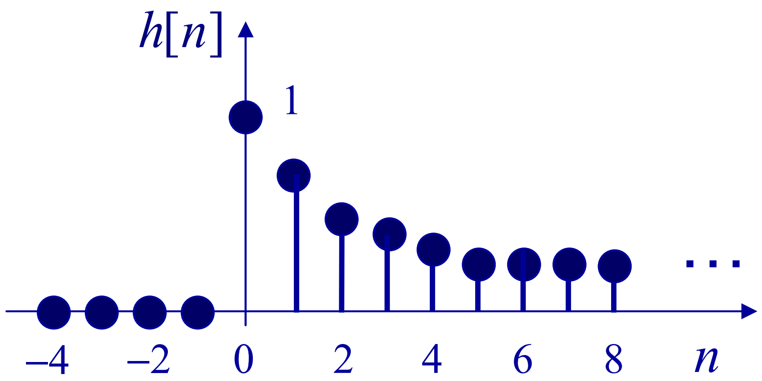
Recursivo



Ej: $y[n] = a \cdot y[n-1] + x[n]$

$H(z) = 1/(1 - az^{-1})$, *estable si* $|a|<1$

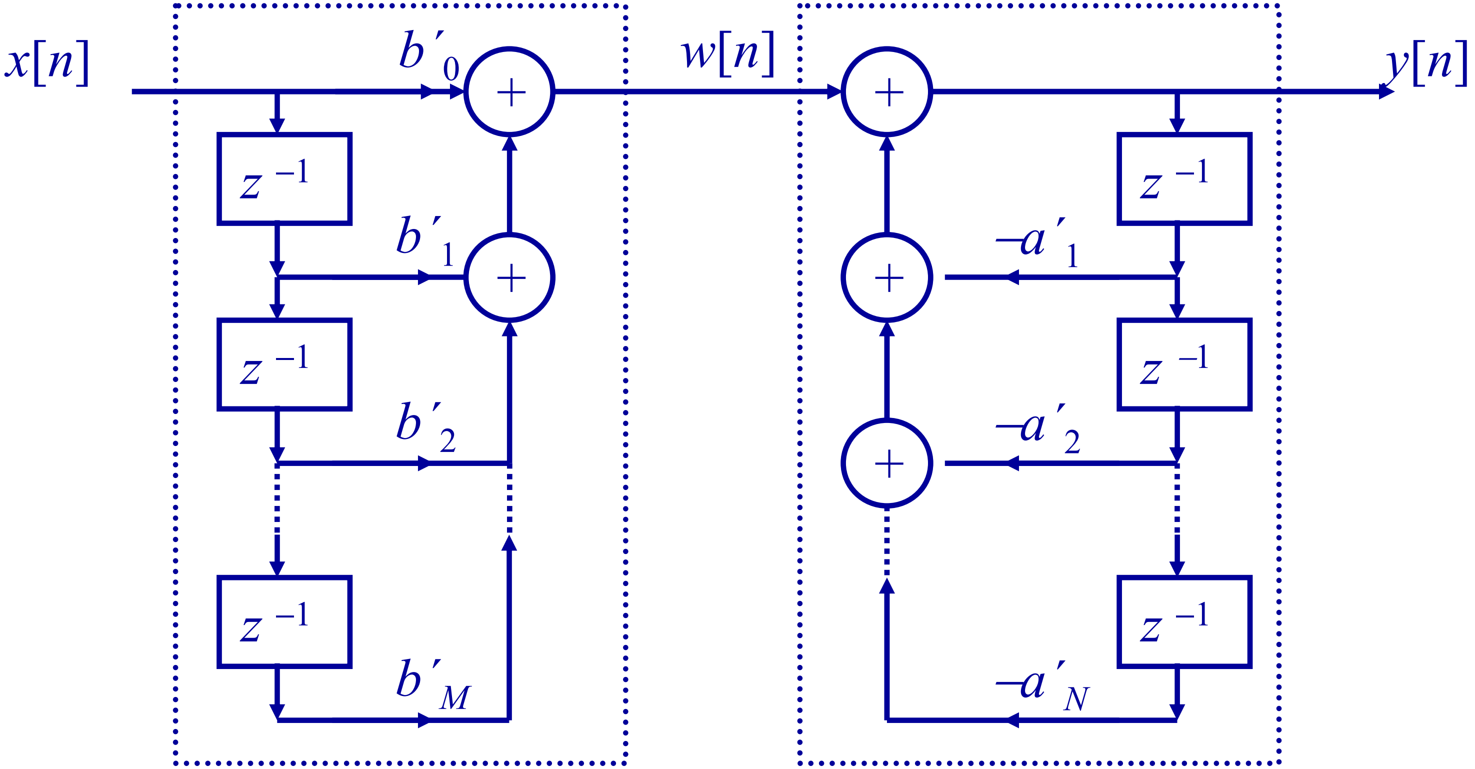
$h[n] = a^n u[n]$



La respuesta al impulso de un sistema **IIR** tiene ∞ términos

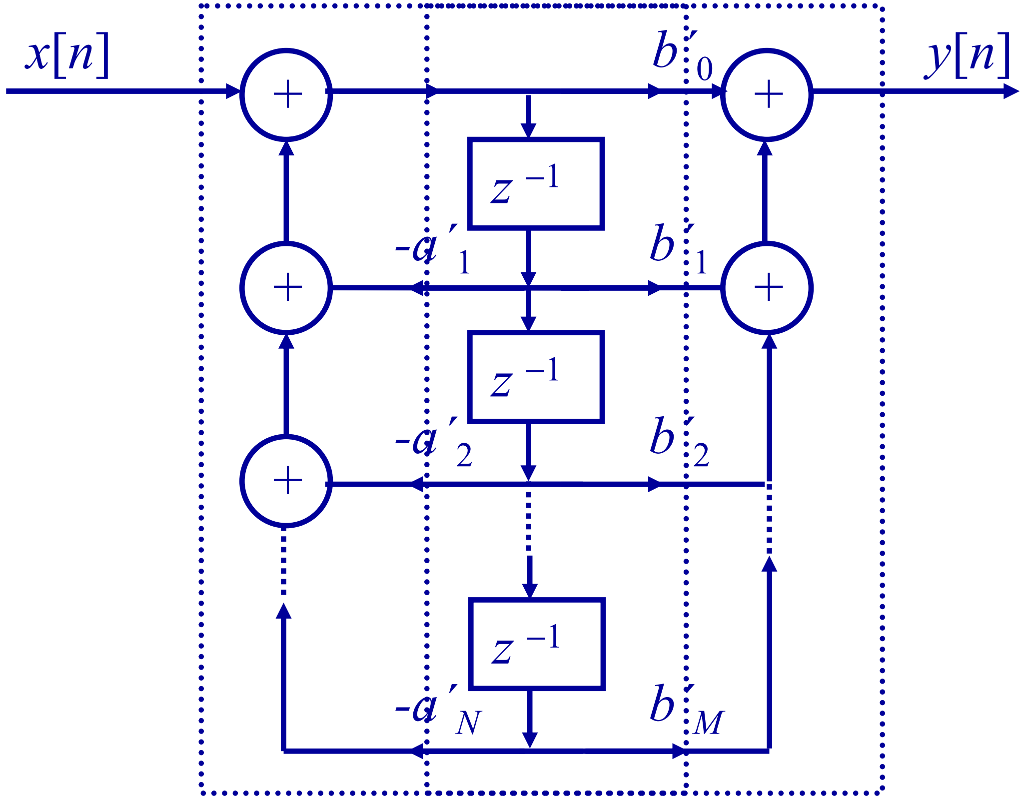
Realización de un filtro (forma directa I)

$$\sum_{K=0}^{N} a_k \cdot y[n-k] = \sum_{K=0}^{M} b_k \cdot x[n-k] \qquad y[n] = \sum_{m=0}^{M} b'_m x[n-m] - \sum_{k=1}^{N} a'_k y[n-k]$$



Realización de un filtro (forma directa II)

- Esta estructura se basa en utilizar los retardos de la variable intermedia, *w*[*n*]. Este hecho se traduce en un ahorro en el número de retardos necesarios



Ejemplo

- Considérese el sistema LTI con función de transferencia:

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.9z^{-2}} \qquad b_0 = 1, \ \ b_1 = 2, \ \ a_1 = 1.5, \ \ a_2 = -0.9$$

- Puede implementarse de las siguientes formas