Topic 2.2 - Part 2: Properties of the Fourier Series

Linear systems and circuit applications and Señales y Sistemas

Luca Martino — luca.martino@urjc.es — http://www.lucamartino.altervista.org

Based also on Professor Óscar Barquero Perez, Andrés Martínez and José Luis Rojo's slides

Real signal: property of a_k

We have already seen:

- If x(t) is a real signal, we have:

$$x(t) = x(t)^*$$

$$\boxed{a_k = a^*_{-k}}$$

$$\boxed{a^*_k = a_{-k}}$$

Real signal: property of a_k

- This also implies that:

$$a_0 \text{ is real}$$

$$|a_k| = |a_{-k}|$$

Linearity (Linealidad)

3.5.1 Linealidad

Sean $x(t)$ y $y(t)$ dos señales periódicas con periodo T que tienen coeficientes de la serie de Fourier denotados por a_k y b_k, respectivamente. Esto es

$$x(t) \stackrel{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k,$$
$$y(t) \stackrel{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} b_k.$$

Puesto que $x(t)$ y $y(t)$ tienen el mismo periodo T, fácilmente se desprende que cualquier combinación lineal de las dos señales también será periódica con periodo T. Además, los coeficientes de la serie de Fourier c_k de la combinación lineal de $x(t)$ y $y(t)$, $z(t) = Ax(t) + By(t)$, están dados por la misma combinación lineal de los coeficientes de la serie de Fourier para $x(t)$ y $y(t)$. Es decir,

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \stackrel{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} c_k = Aa_k + Bb_k. \tag{3.58}$$

La prueba de esto surge directamente de la aplicación de la ecuación (3.39). También observamos que la propiedad de linealidad se extiende con facilidad a una combinación lineal de un número arbitrario de señales con periodo T.

Shift in time domain

3.5.2 Desplazamiento de tiempo

Cuando se aplica un desplazamiento de tiempo a una señal periódica $x(t)$, se conserva el periodo T de la señal. Los coeficientes de la serie de Fourier b_k de la señal resultante $y(t) = x(t - t_0)$ se pueden expresar como

$$b_k = \frac{1}{T}\int_T x(t - t_0)e^{-jk\omega_0 t}\,dt. \tag{3.59}$$

Shift in time domain

Permitiendo $\tau = t - t_0$ en la integral, y observando que la nueva variable τ también fluctúa sobre un intervalo de duración T, obtenemos

$$\frac{1}{T}\int_T x(\tau)e^{-jk\omega_0(\tau+t_0)}d\tau = e^{-jk\omega_0 t_0}\frac{1}{T}\int_T x(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}d\tau$$
$$= e^{-jk\omega_0 t_0}a_k = e^{-jk(2\pi/T)t_0}a_k, \qquad (3.60)$$

donde a_k es el $k$ésimo (léase kaésimo) coeficiente de la serie de Fourier para $x(t)$. Esto es, si

$$x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k,$$

entonces

$$x(t - t_0) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} e^{-jk\omega_0 t_0}a_k = e^{-jk(2\pi/T)t_0}a_k.$$

Una consecuencia de esta propiedad es que, cuando una señal periódica se desplaza en el tiempo, las *magnitudes* de sus coeficientes de la serie de Fourier no se alteran. Es decir, $|b_k| = |a_k|$.

Shift in time domain: summary

$$x(t) \overset{\mathfrak{F}S}{\longleftrightarrow} a_k,$$

$$x(t - t_0) \overset{\mathfrak{F}S}{\longleftrightarrow} e^{-jk\omega_0 t_0} a_k = e^{-jk(2\pi/T)t_0} a_k$$

Time inversion

3.5.3 Inversión de tiempo

El periodo T de una señal periódica $x(t)$ también permanece sin cambio cuando la señal sufre una inversión en el tiempo. Para determinar los coeficientes de la serie de Fourier de $y(t) = x(-t)$, consideremos el efecto de la inversión de tiempo en la ecuación de síntesis (3.38):

$$x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk2\pi t/T}. \tag{3.61}$$

Haciendo la sustitución $k = -m$, obtenemos

$$y(t) = x(-t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{-m} e^{jm2\pi t/T}. \tag{3.62}$$

Time inversion

Observamos que el miembro derecho de esta ecuación tiene la forma de la ecuación de síntesis de la serie de Fourier para $x(-t)$, donde los coeficientes de la serie de Fourier b_k son

$$b_k = a_{-k}$$

Esto es, si

$$x(t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_k,$$

entonces

$$x(-t) \overset{\mathcal{FS}}{\longleftrightarrow} a_{-k}$$

Time inversion: consequences

En otras palabras, la inversión de tiempo que se aplica a una señal continua da como resultado una inversión de tiempo de la secuencia correspondiente de los coeficientes de la serie de Fourier. Una consecuencia interesante de la propiedad de inversión de tiempo es que si $x(t)$ es par, esto es, si $x(-t) = x(t)$, entonces sus coeficientes de la serie de Fourier también son par, es decir, $a_{-k} = a_k$. De forma similar, si $x(t)$ es impar, de manera que $x(-t) = -x(t)$, entonces también lo serán sus coeficientes de la serie de Fourier, es decir, $a_{-k} = -a_k$.

Even signal x(t) ——> x(t)=x(-t)

$$x(t) = x(-t) \longrightarrow \boxed{a_k = a_{-k}}$$

Odd signal x(t) ——> x(t)=-x(-t)

$$x(t) = -x(-t) \longrightarrow \boxed{a_k = -a_{-k}}$$

Real and Even signal x(t)

$$x(t) = x(t)^* \longrightarrow a_k = a^*_{-k}$$

$$x(t) = x(-t) \longrightarrow a_k = a_{-k}$$

$a_k = a_k^*$ i.e., a_k are real !

they are also even $(a_k = a_{-k})$

Real and Even signal x(t)

$a_k = a_k^*$ i.e., a_k are real !

they are also even $(a_k = a_{-k})$

$x(t)$ real and even signal $==>$ a_k real and even

Real and Odd signal x(t)

$$x(t) = x(t)^* \longrightarrow a_k = a^*_{-k}$$

$$x(t) = -x(-t) \longrightarrow a_k = -a_{-k}$$

$x(t)$ real and odd signal $==>$ a_k pure imaginary and odd

Time scaling

3.5.4 Escalamiento de tiempo

El escalamiento de tiempo es una operación que, en general, cambia el periodo de la señal principal. En concreto, si $x(t)$ es periódica con periodo T y frecuencia fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$, entonces $x(\alpha t)$, donde α es un número real positivo, es periódica con periodo T/α y frecuencia fundamental $\alpha\omega_0$. Debido a que la operación de escalamiento de tiempo se aplica directamente a cada una de las componentes armónicas de $x(t)$, podemos con facilidad concluir que los coeficiente de Fourier para cada una de esas componentes siguen siendo los mismos. Esto es, si $x(t)$ tiene la representación en serie de Fourier de la ecuación (3.38), entonces

$$x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(\alpha\omega_0)t}$$

es la representación en serie de Fourier de $x(\alpha t)$. Debemos enfatizar que, mientras que los coeficientes de Fourier no sufren cambio, la representación en serie de Fourier *sí cambia* debido a la variación de la frecuencia fundamental.

Multiplication in time domain

$$x(t) \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} a_k,$$

$$y(t) \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} b_k.$$

$$x(t)y(t) \overset{\mathfrak{FS}}{\longleftrightarrow} h_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$$

Convolution in the transformed domain!!

Parseval's relationship

3.5.7 Relación de Parseval para las señales periódicas continuas

Como se muestra en el problema 3.46, la relación de Parseval para señales periódicas continuas es

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2,} \tag{3.67}$$

donde los a_k son los coeficientes de la serie de Fourier de $x(t)$ y T es el periodo de la señal.

Propiedad	Sección	Señal periódica	Coeficientes de la serie de Fourier
		$\left.\begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \end{array}\right\}$ Periódicas con periodo T y frecuencia fundamental $\omega_0 = 2\pi/T$	a_k b_k
Linealidad	3.5.1	$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
Desplazamiento de tiempo	3.5.2	$x(t - t_0)$	$a_k e^{-jk\omega_0 t_0} = a_k e^{-jk(2\pi/T)t_0}$
Desplazamiento en frecuencia		$e^{jM\omega_0 t} = e^{jM(2\pi/T)t}x(t)$	a_{k-M}
Conjugación	3.5.6	$x^*(t)$	a^*_{-k}
Inversión de tiempo	3.5.3	$x(-t)$	a_{-k}
Escalamiento en tiempo	3.5.4	$x(\alpha t), \alpha > 0$ (periódica con periodo T/α)	a_k
Convolución periódica		$\int_T x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$Ta_k b_k$
Multiplicación	3.5.5	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$
Diferenciación		$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0 a_k = jk\frac{2\pi}{T}a_k$
Integración		$\int_{-\infty}^{t} x(t)dt$ (de valor finito y periódica sólo si $a_0 = 0$)	$\left(\frac{1}{jk\omega_0}\right)a_k = \left(\frac{1}{jk(2\pi/T)}\right)a_k$
Simetría conjugada para señales reales	3.5.6	$x(t)$ real	$\begin{cases} a_k = a^*_{-k} \\ \Re e\{a_k\} = \Re e\{a_{-k}\} \\ \Im m\{a_k\} = -\Im m\{a_{-k}\} \\ \lvert a_k \rvert = \lvert a_{-k} \rvert \\ \sphericalangle a_k = -\sphericalangle a_{-k} \end{cases}$
Señales real y par	3.5.6	$x(t)$ real y par	a_k real y par
Señales real e impar	3.5.6	$x(t)$ real e impar	a_k sólo imaginaria e impar
Descomposición par e impar de señales reales		$\begin{cases} x_e(t) = \mathcal{E}v\{x(t)\} & [x(t) \text{ real}] \\ x_o(t) = \mathcal{O}d\{x(t)\} & [x(t) \text{ real}] \end{cases}$	$\Re e\{a_k\}$ $j\Im m\{a_k\}$

Relación de Parseval para señales periódicas

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

Questions?