

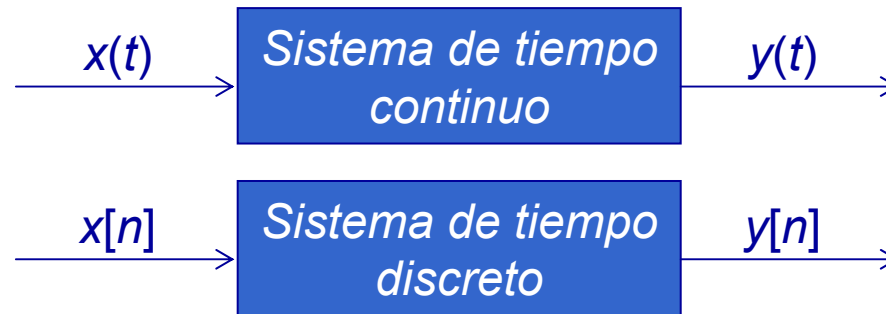
# Sistemas en el dominio del tiempo

1. Definición de sistemas y de sus propiedades.
2. Sistemas lineales e invariantes en el tiempo (LTI).
3. Representación de señales en términos de impulsos.
4. Sistemas de tiempo discreto lineales e invariantes en el tiempo.
5. Sistemas de tiempo continuo lineales e invariantes en el tiempo.
6. Propiedades de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo.



# 1 Definición de sistemas y sus propiedades

“Se entiende por **sistema** cualquier **transformación** de una señal (que llamamos de **entrada**) en otra señal (que llamamos de **salida**)”



Relación **entrada-salida**:

expresión matemática que expresa la **salida** como **función** de la **entrada** del sistema:  $y(t)=f\{ x(t) \}$ ;  $y[n]=f\{ x[n] \}$

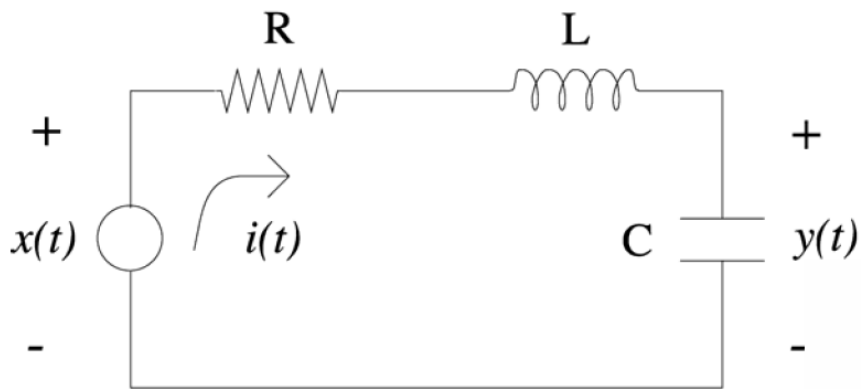
Ejemplos:

- Aplicación de un voltaje a un altavoz → producción de un sonido
- Cambio de presión en un micrófono → producción de una señal eléctrica
- Luz que incide sobre un fotodiodo → corriente fotogenerada
- Presión sobre el acelerador → aumento de la velocidad de un coche
- Voltaje aplicado a un amplificador → voltaje amplificado



# Ejemplos de sistemas (I)

## □ Circuito RLC



$$\left. \begin{aligned} R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + y(t) &= x(t) \\ i(t) &= C \frac{dy(t)}{dt} \end{aligned} \right\} \longrightarrow LC \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

# Ejemplos de sistemas (II)

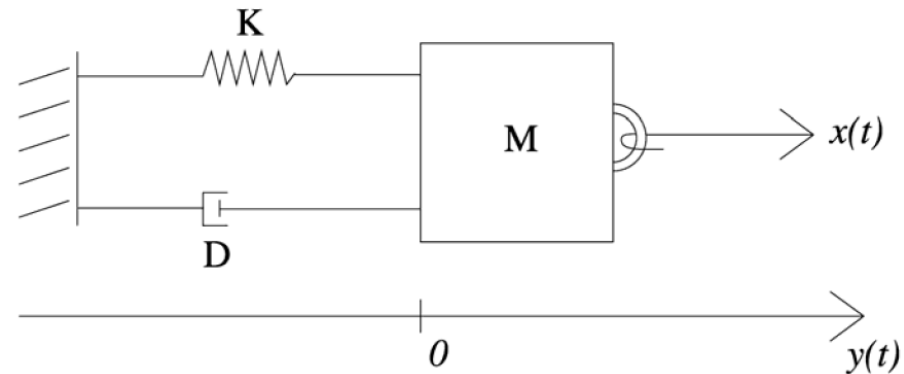
## □ Sistema mecánico

$x(t)$  = fuerza aplicada

$K$  = cte. del muelle

$D$  = cte. de amortiguación

$y(t)$  = desplazamiento



$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = x(t) - Ky(t) - D \frac{dy(t)}{dt} \left. \vphantom{M \frac{d^2 y(t)}{dt^2}} \right\} \longrightarrow M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + D \frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = x(t)$$

- Observación: se pueden modelar matemáticamente sistemas físicos muy diferentes de forma muy similar

# Ejemplos de sistemas (III)

- Detector de bordes “rudimentario”

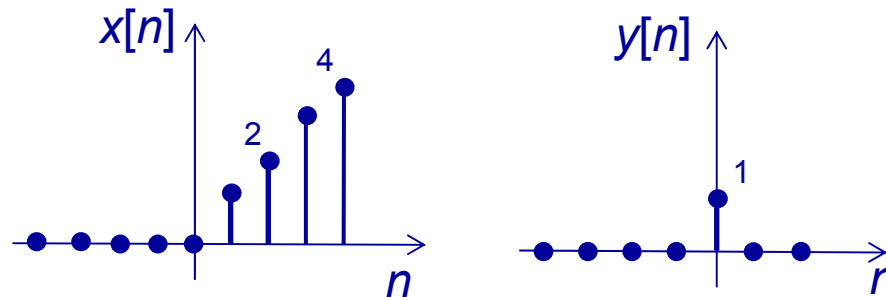
$$y[n]=x[n+1]-2\cdot x[n]+x[n-1]=\{x[n+1]-x[n]\}-\{x[n]-x[n-1]\} \Rightarrow$$

“segunda diferencia”

- Este sistema detecta cambios de pendiente en la señal

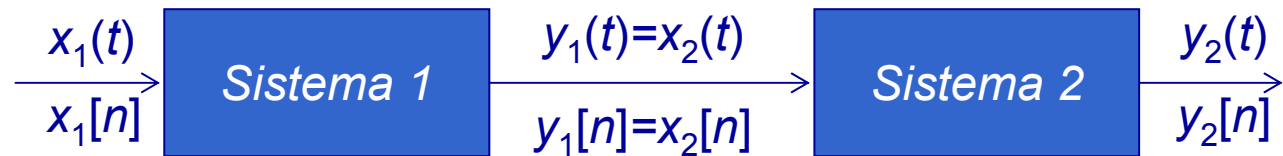
$$x[n]=n \quad \Rightarrow \quad y[n]=0$$

$$x[n]=n\cdot u[n] \quad \Rightarrow \quad y[n]$$

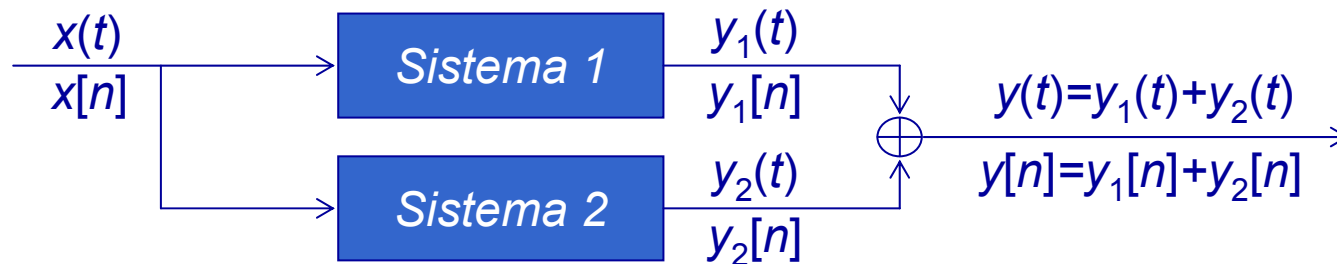


# Interconexión de sistemas

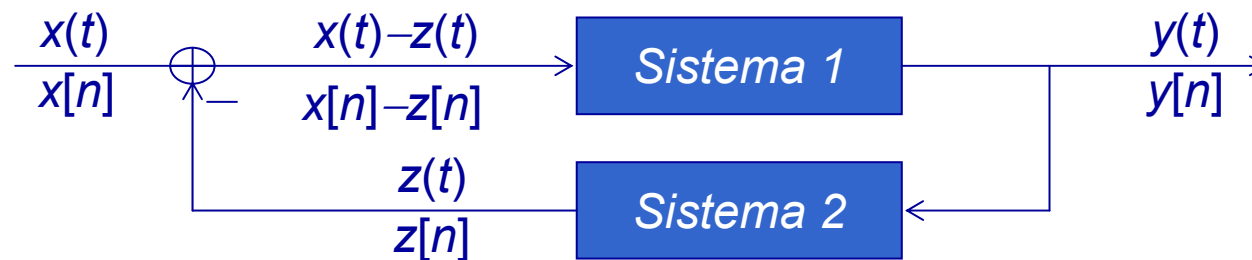
Interconexión en **serie** o **cascada**:



Interconexión en **paralelo**:



Interconexión de **realimentación**:



# Propiedades de sistemas

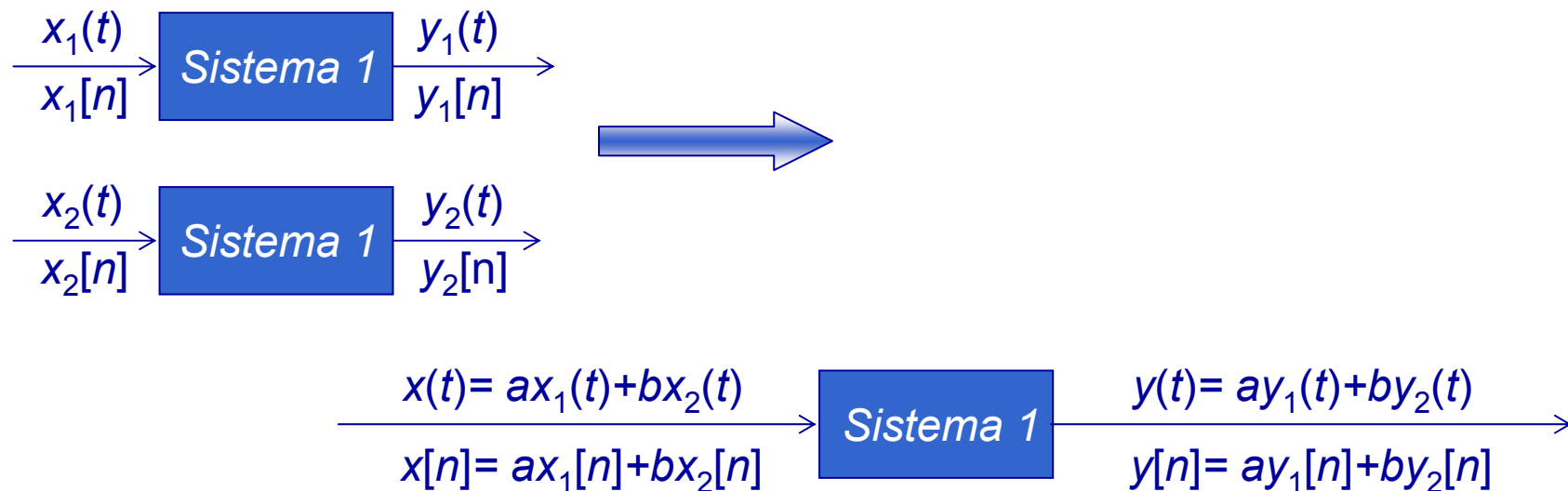
- ❑ Detrás de las propiedades de los sistemas hay implicaciones físicas y prácticas muy importantes
- ❑ Las propiedades nos proporcionan una perspectiva y una estructura que podemos explotar para analizar y comprender los problemas más a fondo
- ❑ Nos interesa caracterizar las siguientes propiedades de los sistemas:
  - ★ Linealidad
  - ★ Invarianza en el tiempo
  - ★ Causalidad
  - ★ Memoria
  - ★ Estabilidad
  - ★ Invertibilidad



# Linealidad (I)

**Linealidad (L):** Se dice que un sistema es lineal  $\Leftrightarrow$  se cumple que dadas dos señales de **entrada**  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$  cuyas correspondientes **salidas** son  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$ , entonces para una **entrada**  $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$ , la **salida** es  $y(t) = ay_1(t) + by_2(t)$ , cualesquiera que sean  $a$ ,  $b$ ,  $x_1(t)$  y  $x_2(t)$

La definición de linealidad para un sistema de tiempo discreto es igual cambiando  $t$  por  $n$

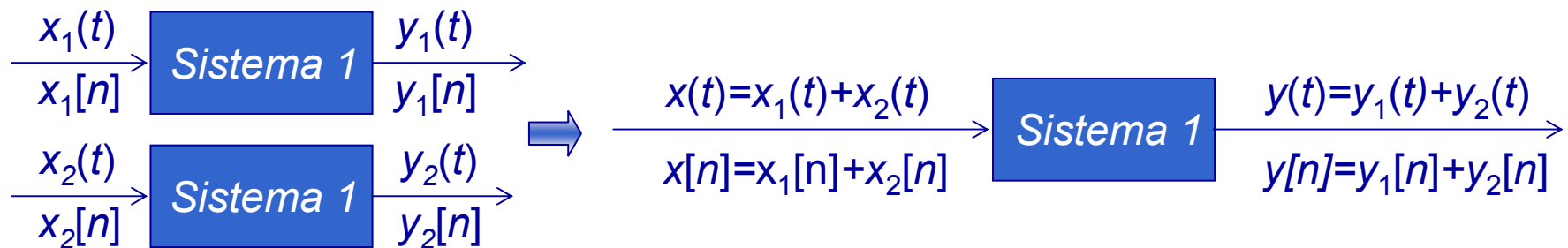




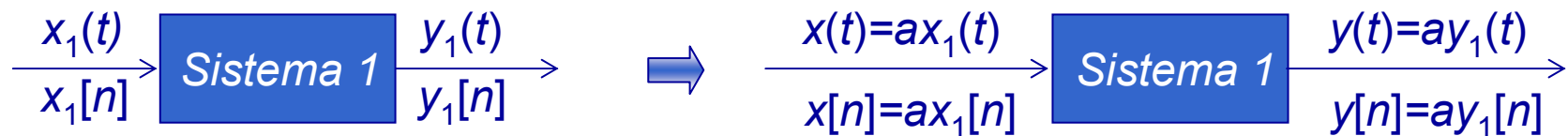
# Linealidad (II)

Equivale a **aditividad** y **proporcionalidad** simultáneamente:

Aditividad:



Proporcionalidad:



Si  $x(t)=0$  ( $x[n]=0$ ) y el sistema es lineal, la salida es nula:  $y(t)=0$  ( $y[n]=0$ )

Sistema incrementalmente lineal: se cumple la linealidad para la diferencia (o incrementos) de entradas



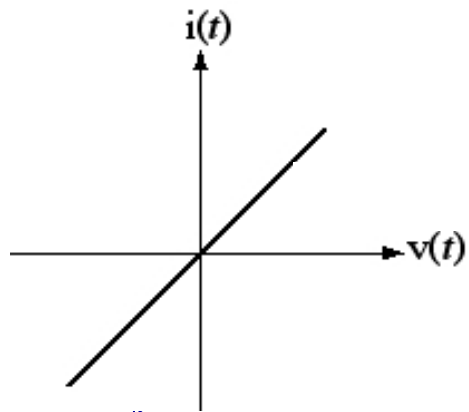
# Linealidad o no linealidad

- Muchos sistemas son no lineales.
  - ❖ Por ejemplo: muchos elementos de circuitos (ej., diodos), dinámica de aviones, modelos econométricos, etc.
  
- No obstante, nos centramos exclusivamente en los sistemas lineales. ¿Por qué?
  - ❖ Los sistemas lineales describen representaciones precisas del comportamiento de muchos sistemas (ej., resistencias lineales, condensadores, otros ejemplos mencionados anteriormente, etc.)
  - ❖ Se pueden linealizar modelos con el fin de examinar perturbaciones de "pequeña señal" alrededor de "puntos de funcionamiento"
  - ❖ Los sistemas lineales son manejables de forma analítica, facilitando bases para herramientas importantes y una considerable perspectiva.



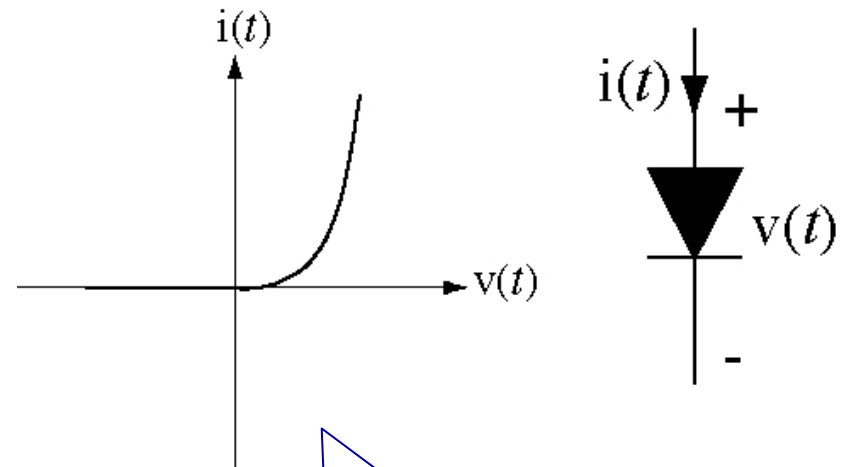
# Ejemplo

Diagrama V-I de una resistencia



Lineal

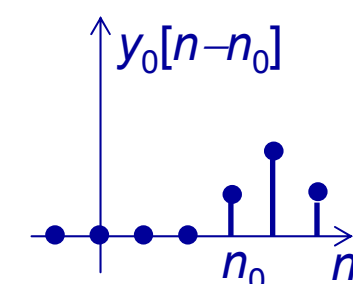
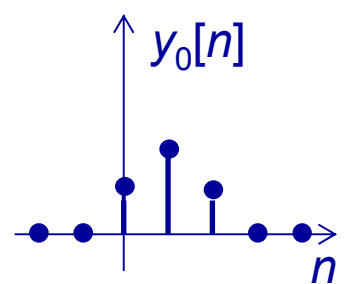
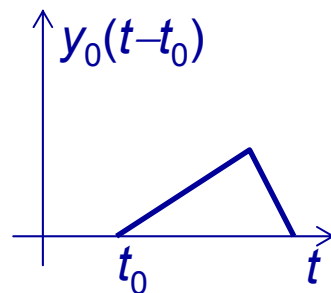
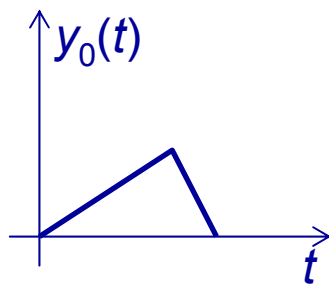
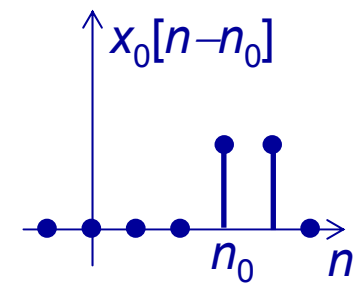
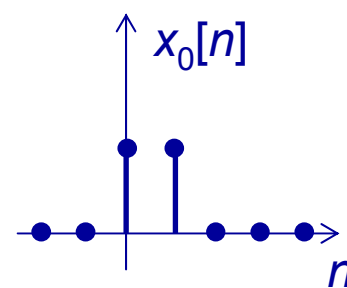
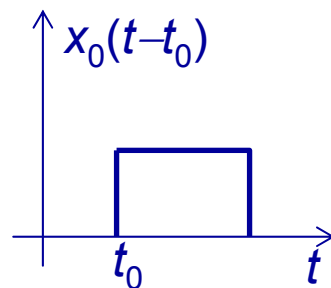
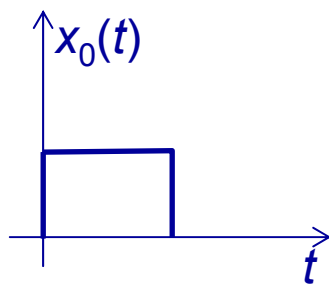
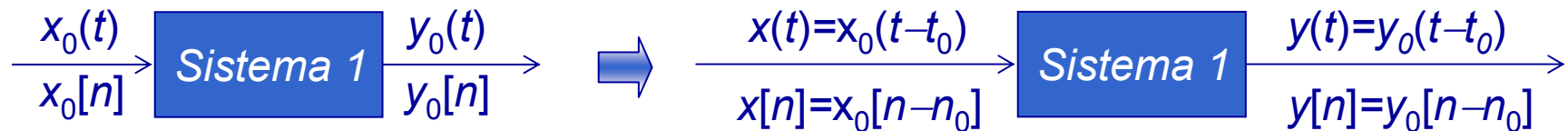
Diagrama V-I de un diodo



No Lineal

# Invarianza en el tiempo

**Invarianza en el tiempo (TI):** Se dice que un sistema es invariante en el tiempo  $\Leftrightarrow$  se cumple que dada una señal de entrada  $x_0(t)$  cuya salida correspondiente sea  $y_0(t)$ , entonces para una entrada  $x(t) = x_0(t - t_0)$ , la salida es  $y(t) = y_0(t - t_0)$  cualesquiera que sean  $x_0(t)$  y  $t_0$



# Causalidad

**Causalidad:** Se dice que un sistema es causal  $\Leftrightarrow$  su respuesta en cada instante **depende exclusivamente** de los valores de la entrada en el **instante actual** o en **instantes pasados**.

Equivale a decir que la respuesta del sistema comienza en el instante en que comienza la entrada o en instantes posteriores cualquiera que sea la señal de entrada. Es decir, el sistema cumple el principio de causalidad o la relación causa-efecto: el efecto siempre es simultáneo o posterior a la causa. Como consecuencia, todos los sistemas que funcionan en tiempo real son causales

Ej. Causal:

- Pisar el pedal del freno  $\Rightarrow$  el coche frena
- Aplicación de una tensión a un circuito  $\Rightarrow$  paso de corriente
- Pulsar el botón de encendido  $\Rightarrow$  encendido de un equipo

Ej: No causal:

- Grabar una secuencia  $\Rightarrow$  reproducción en sentido inverso
- Registrar temperaturas  $\Rightarrow$  presentar temperatura media del día



# Memoria

**Memoria:** Se dice que un sistema no tiene memoria  $\Leftrightarrow$  la **salida** en cada instante **depende exclusivamente** de los valores de la **entrada** en el **instante actual** (no depende del futuro ni del pasado).

- Un sistema **sin memoria** es **causal**.
- Un sistema **sin memoria no** almacena **energía** (datos).
- Un sistema **no causal** tiene **memoria**

Ej. Sin memoria:

- Aplicar una tensión a una resistencia  $\Rightarrow$  paso de corriente
- Amplificar idealmente una señal:  $y(t)=a \cdot x(t)$
- Multiplicar por sí misma una señal:  $y(t)=x^2(t)$

Ej. Con memoria:

- Corriente por una bobina  $\Rightarrow$  generación de una tensión
- Paso de corriente por condensador  $\Rightarrow$  generación de tensión
- Derivar o integrar una señal
- Retrasar (o adelantar) una señal:  $y[n]=x[n+n_0]$



# Estabilidad

**Estabilidad:** Se dice que un sistema es estable  $\Leftrightarrow$  para cualquier **entrada acotada**, la **salida es acotada** (criterio bound input, bound output: **BIBO**).



De forma matemática se expresa como:

Un sistema es estable (siendo  $A$  y  $B$  finitos)  $\Leftrightarrow$

$\forall x(t)$  t.q.  $|x(t)| < A \Rightarrow |y(t)| < B$ , ( $\forall x[n]$  t.q.  $|x[n]| < A \Rightarrow |y[n]| < B$ )

Ej. Estable:

- Amplificar o atenuar una señal  $y[n]=a \cdot x[n]$ ,
- Retrasar o adelantar una señal:  $y(t)=x(t-t_0)$
- Obtener la media de una señal en un intervalo finito...

Ej. Inestable:

- Integrar o derivar una señal
- Multiplicar una señal por el tiempo:  $y[n]=n \cdot x[n]$



# Invertibilidad

***Invertibilidad:*** Se dice que un sistema es invertible  $\Leftrightarrow$  conocida la **salida** del sistema se puede determinar **unívocamente** la **entrada** correspondiente

Ej. Invertible:

- Amplificar o atenuar una señal  $y[n]=a \cdot x[n]$
- Retrasar o adelantar una señal:  $y(t)=x(t+t_0)$
- Se puede despejar unívocamente  $x(t)$  (o  $x[n]$ ) de la relación entrada-salida

Ej. No invertible:

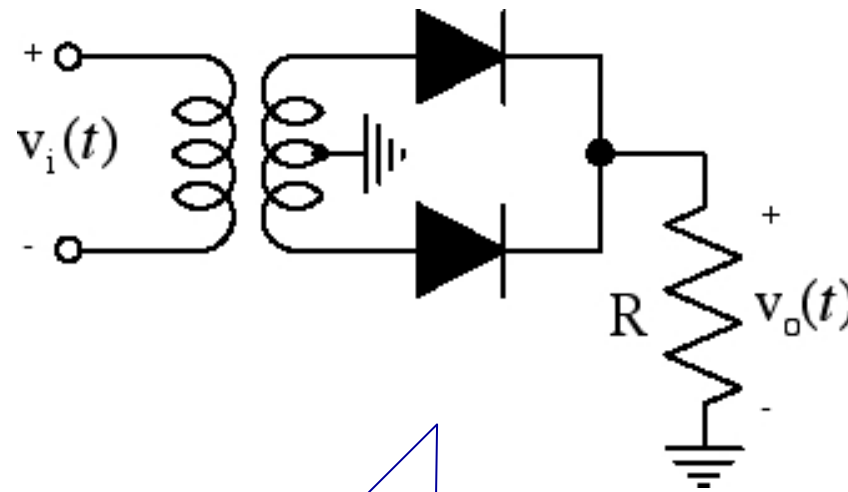
- Derivar una señal:  $y(t)=dx(t)/dt$
- Elevar a una potencia entera una señal:  $y(t)=x^2(t)$





# Ejemplo

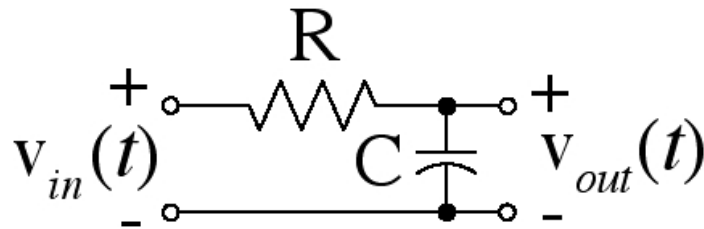
- Un rectificador de onda completa es un sistema no invertible



No Invertible

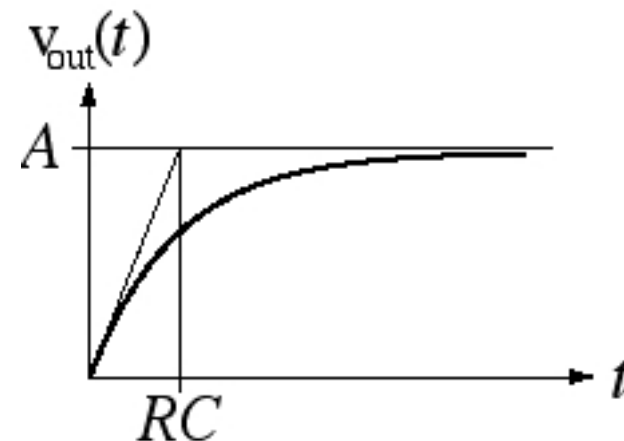
## 2. Sistemas Lineales e invariantes en el tiempo

- Un filtro paso bajo RC es un sistema eléctrico LTI
- Se excita con una tensión,  $v_{in}(t)$ , y responde con  $v_{out}(t)$ ,



$$v_{in}(t) = Au(t)$$

$$v_{out}(t) = A \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) u(t)$$



Si duplicamos la excitación, se duplica la salida  
Si aplicamos la excitación en otro instante de tiempo la salida no cambia

## 2. Sistemas Lineales e invariantes en el tiempo

- Sistemas que cumplen la propiedad de linealidad: superposición y proporcionalidad
- Sistemas invariantes en el tiempo: ante una misma entrada aplicada en distintos momentos responde con la misma salida



# 3. Representación de señales en términos de impulsos

*“El **impulso** (tanto en tiempo continuo como discreto) permite **construir**, mediante **combinación lineal**, una clase muy amplia de **señales**”*

Esta afirmación es válida para señales de tiempo continuo y para señales de tiempo discreto

- i. Representación de señales discretas en términos de impulsos discretos
- ii. Representación de señales continuas en términos de impulsos continuos

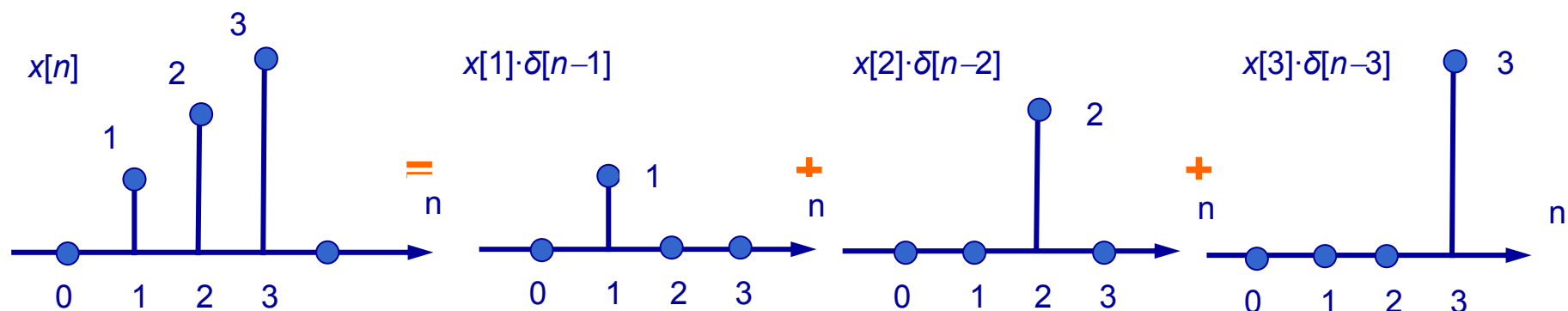


# Representación de señales en términos de impulsos. Señales de tiempo discreto (TD)

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0 \\ 0, & \text{si } n \neq 0 \end{cases} ; \quad x[n] \cdot \delta[n] = x[0] \cdot \delta[n] = \begin{cases} x[0], & \text{si } n = 0 \\ 0, & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

$$x[n] \cdot \delta[n - n_0] = x[n_0] \cdot \delta[n - n_0] = \begin{cases} x[n_0], & \text{si } n = n_0 \\ 0, & \text{si } n \neq n_0 \end{cases}$$

Supongamos una señal cualquiera  $x[n]$ , por ej.  $x[n] = n \cdot (u[n] - u[n-4])$



Se comprueba que:  $x[n] = x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + x[3]\delta[n-3]$



# Representación de señales en términos de impulsos. Señales de TD

Si la duración de la señal  $x[n]$  fuera mayor, sólo habría que incluir más términos en la suma de modo que:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]$$

A esta suma se le llama **suma de convolución** y es un resultado válido para cualquier señal  $x[n]$ : una señal de TD se puede representar como una **combinación lineal de impulsos desplazados** cuyos coeficientes son los propios valores de la señal en cada instante al que se ha desplazado cada impulso. Se representa por:

$$x[n] = x[n] * \delta[n]$$

Por ejemplo, para la función escalón se tiene:

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u[k] \delta[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

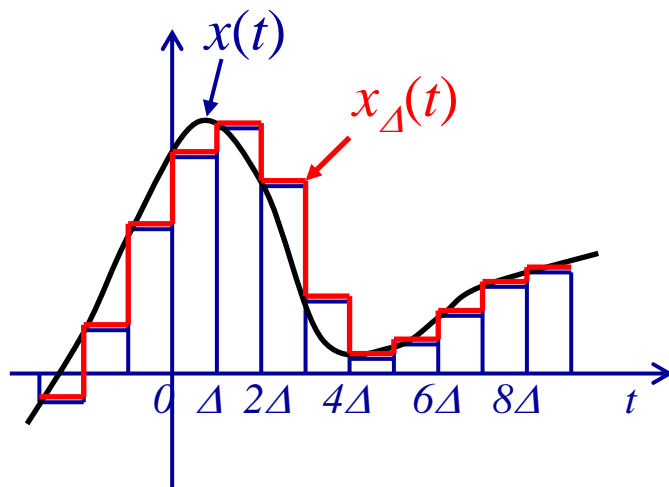


# Representación de señales en términos de impulsos. Señales de tiempo continuo (TC)

Volvemos a emplear la función auxiliar  $\delta_{\Delta}(t)$ :

$$\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 1/\Delta, & \text{si } 0 < t < \Delta \\ 0, & \text{si } t > \Delta \end{cases} \implies \delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t)$$

Dada una señal  $x(t)$  cualquiera se puede obtener una aproximación mediante versiones desplazadas y escaladas en amplitud de  $\delta_{\Delta}(t)$ :



$$x_{\Delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta,$$

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} x_{\Delta}(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta) \delta_{\Delta}(t - k\Delta) \Delta$$

si  $k\Delta \rightarrow \tau$  y  $\Delta \rightarrow d\tau \implies$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = x(t) * \delta(t)$$



## 4. Sistemas TD lineales e invariantes

- Son sistemas de TD que cumplen las propiedades de:
  - ❖ **Linealidad**
  - ❖ **Invarianza** en el tiempo
- Se representan como:



- La relación entrada/salida viene dada por la **suma de convolución**
- Están caracterizados por su respuesta **al impulso**



# La suma de convolución (I)

Consideramos un sistema LTI de TD y una señal de entrada arbitraria:



Podemos expresar la señal de entrada  $x[n]$  como **suma de convolución (o convolución discreta)**:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]$$

Vemos que se trata de una combinación lineal de impulsos desplazados en el tiempo

Supongamos que conocemos la salida del sistema  $h_k[n]$  cuando la entrada es un impulso desplazado  $\delta[n-k]$



# La suma de convolución (II)

Si aprovechamos la propiedad de **linealidad** del sistema podemos escribir:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]$$

Se trata de la misma combinación lineal (coeficientes  $x[k]$ ) que representa a  $x[n]$ , pero de las respuestas a los impulsos desplazados

Por **invarianza** temporal del sistema  $\Rightarrow$  la respuesta  $h_k[n]$  a un impulso desplazado  $\delta[n-k]$  corresponde al desplazamiento de la respuesta  $h_0[n-k]$  al impulso sin desplazar  $\delta[n]$

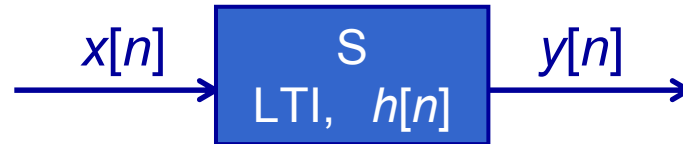
$$h_k[n] = h_0[n-k] \Rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_0[n-k]$$

Como sólo necesitamos conocer  $h_0[n]$ , llamamos  $h[n]=h_0[n]$  y la relación entrada salida que describe al sistema queda:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$



# La suma de convolución. Consecuencias



Se puede obtener la salida de un sistema LTI discreto conociendo  $h[n]$ :

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

La **respuesta al impulso**  $h[n]$  de un sistema LTI de TD **caracteriza completamente al sistema**: permite escribir la relación entrada-salida

Para **caracterizar** un sistema de **TD LTI** basta con **conocer**  $h[n]$

Un sistema **NO LTI** también **tendrá respuesta al impulso**, pero en este caso **NO caracteriza al sistema** (no aporta información adicional):

$$y[n] \neq x[n] * h[n]$$

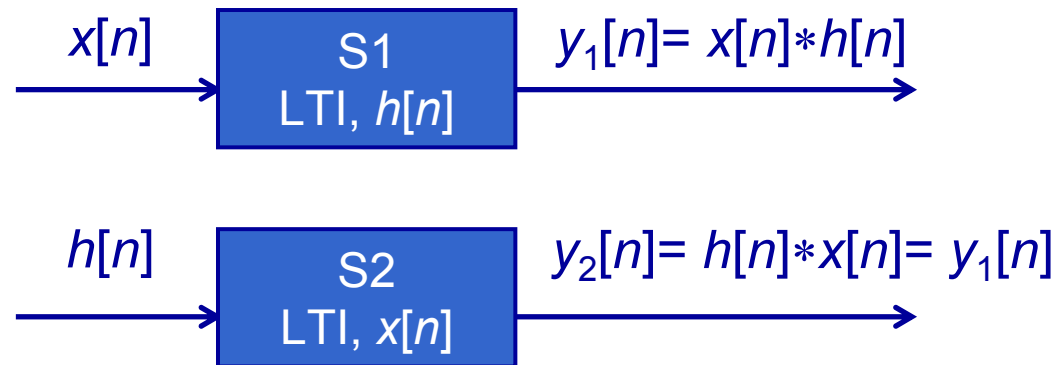


# Propiedades de la suma de convolución (I)

a) Propiedad **conmutativa**:

$$x_1[n] * x_2[n] = x_2[n] * x_1[n]$$

Aplicado a un sistema LTI

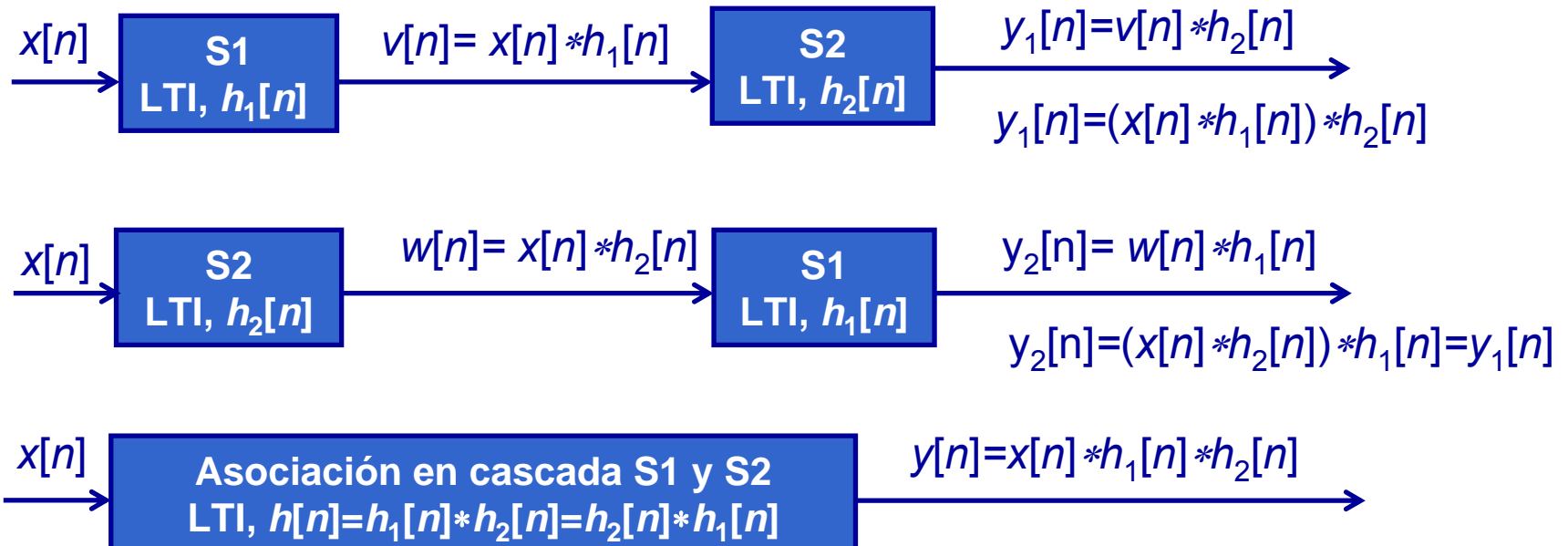


# Propiedades de la suma de convolución (II)

b) Propiedad **asociativa**, interconexión en **cascada**:

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$$

Aplicado a sistemas LTI:



$y[n] = y_1[n] = y_2[n] \Rightarrow$  Los tres esquemas son equivalentes

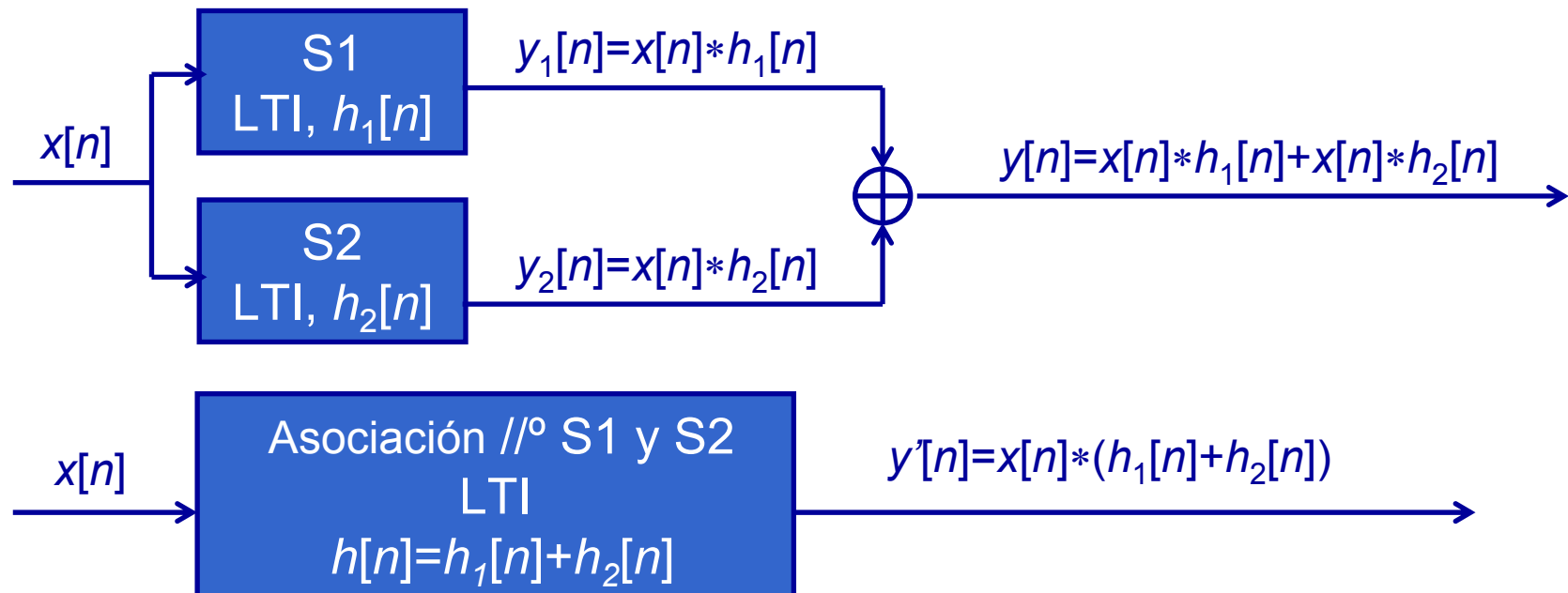


# Propiedades de la suma de convolución (III)

c) Propiedad **distributiva** sobre la suma, interconexión en **paralelo**:

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) + (x[n] * h_2[n])$$

Aplicado a sistemas LTI:



$y'[n] = y[n] \Rightarrow$  Los dos esquemas son equivalentes



# 5. Sistemas TC lineales e invariantes

- Son sistemas de TC que cumplen las propiedades de:
  - ❖ **Linealidad**
  - ❖ **Invarianza** en el tiempo
- Se representan como:



- La relación entrada/salida viene dada por la **integral de convolución**
- Están caracterizados por su respuesta **al impulso**



# La integral de convolución (I)

Consideramos un sistema LTI de TC y una señal de entrada arbitraria:



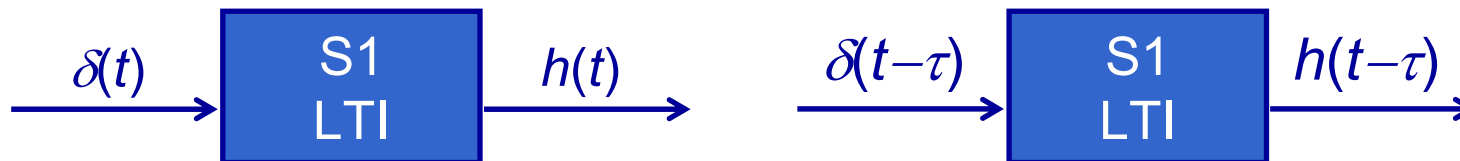
Podemos expresar la señal de entrada  $x(t)$  como **integral de convolución (o convolución continua)**:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

Se trata de una combinación lineal de impulsos desplazados en el tiempo

Supongamos conocida la salida del sistema  $h(t)$  cuando la entrada es  $\delta(t)$

Por invarianza en el tiempo  $\Rightarrow$  si desplazamos la entrada en  $\tau$ ,  $\delta(t-\tau)$ , la salida se debe desplazar en la misma cantidad:  $h(t-\tau)$





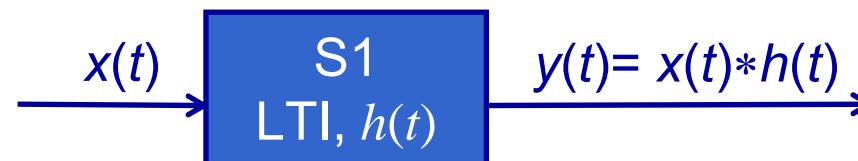
# La integral de convolución (II)

Como el sistema es lineal y la entrada se puede expresar como una combinación lineal de impulsos desplazados:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau \quad \begin{array}{c} \text{S1} \\ \text{LTI} \end{array} \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = x(t) * h(t)$$

Un sistema LTI de TC queda completamente caracterizado (se puede describir, se puede obtener una relación entrada salida) si se conoce su respuesta al impulso  $h(t)$ :



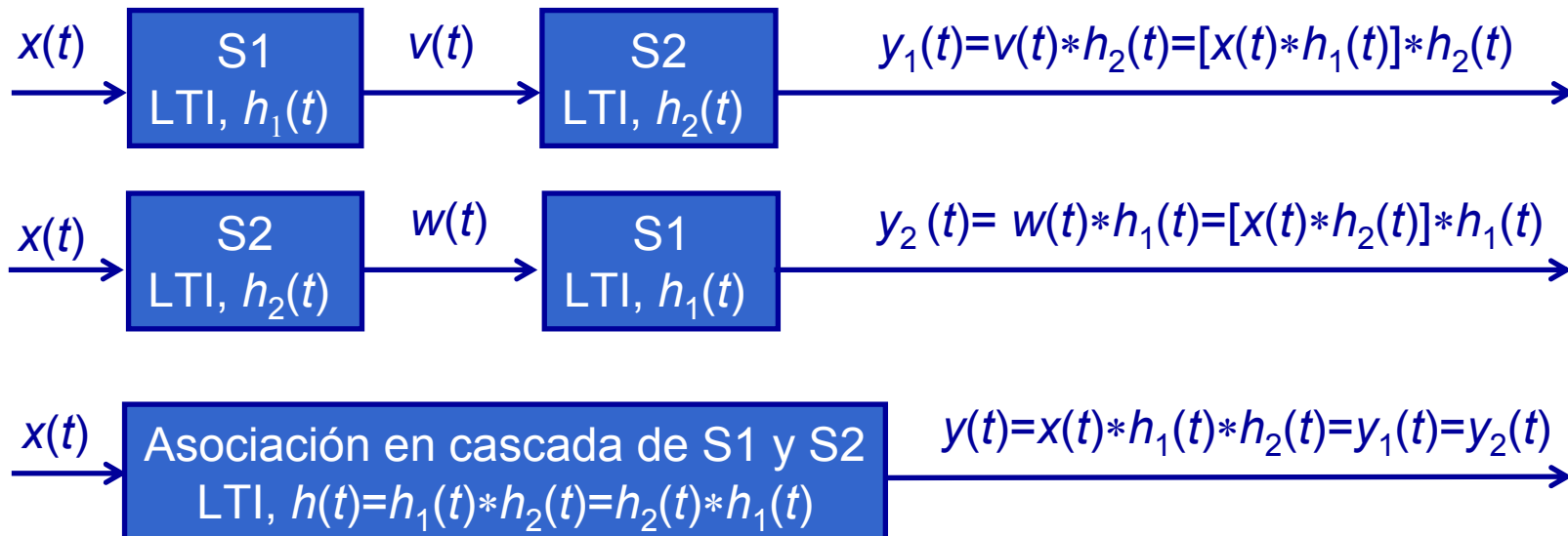
# Propiedades de la integral de convolución (I)

a) Propiedad conmutativa:  $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$

b) Propiedad asociativa, interconexión en cascada:

$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t)$$

Aplicado a sistemas LTI:



Los tres esquemas son equivalentes

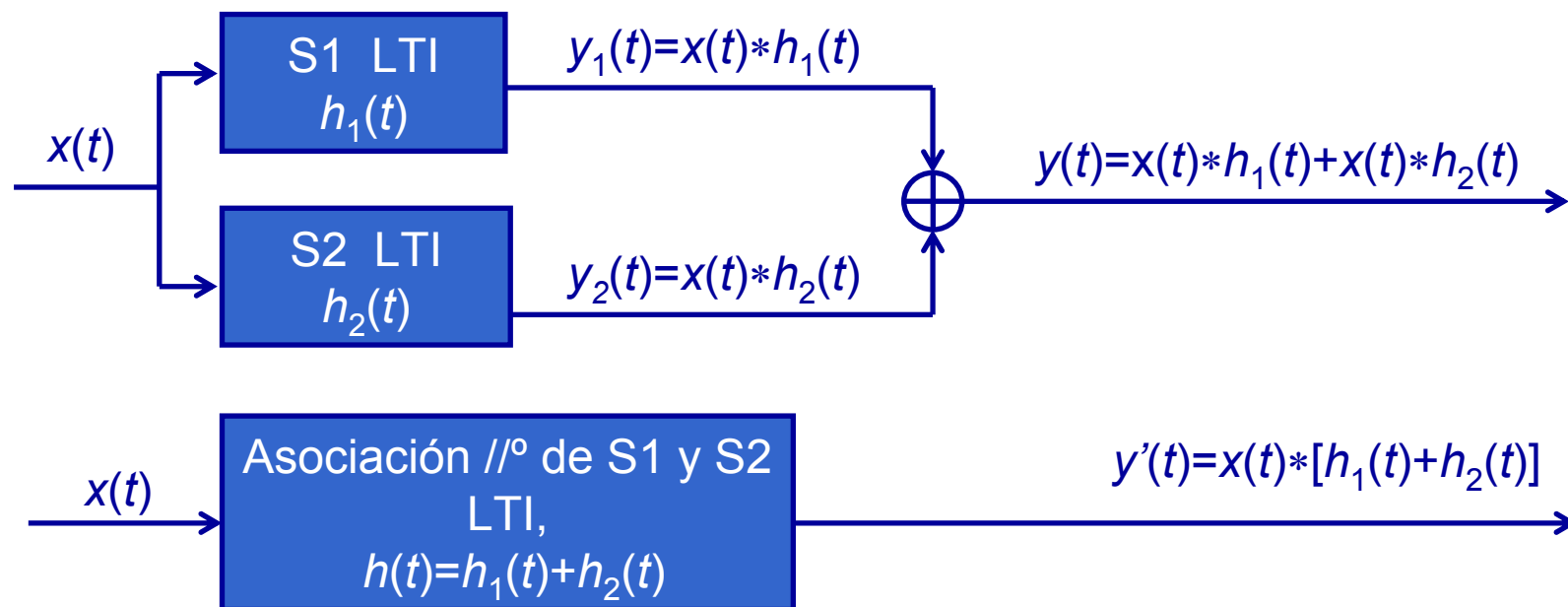


# Propiedades de la integral de convolución (II)

c) Propiedad distributiva sobre la suma, interconexión en paralelo:

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] + [x(t) * h_2(t)]$$

Aplicado a sistemas LTI:



$y'(t) = y(t) \Rightarrow$  Los dos esquemas son equivalentes

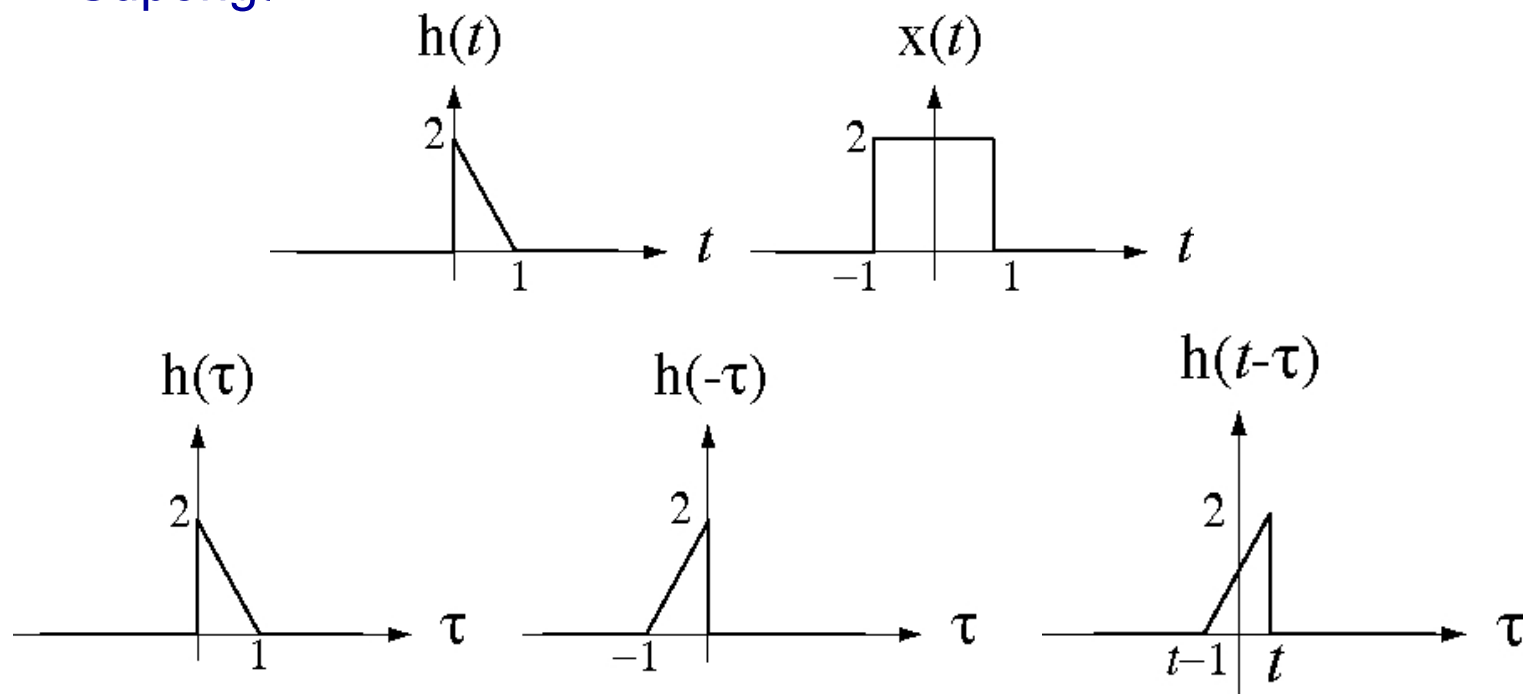


# Interpretación gráfica de la integral de convolución (I)

- Se ha definido la integral de convolución como:

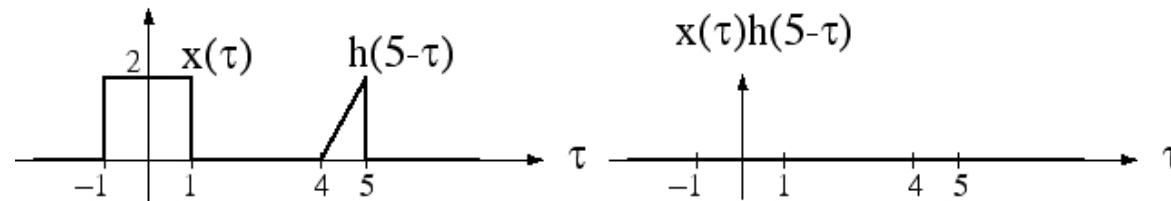
$$x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

- Supongamos:

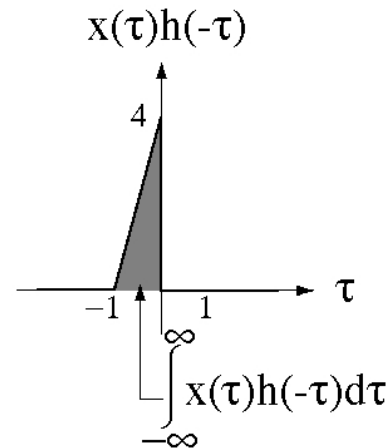
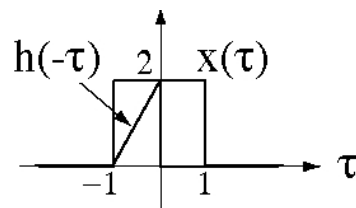


# Interpretación gráfica de la integral de convolución (II)

- La convolución es el valor del área bajo el producto de  $x(t)$  y  $h(t-\tau)$ . Esta área depende del valor de  $t$ .
- Supongamos como ejemplo que  $t=5$ .



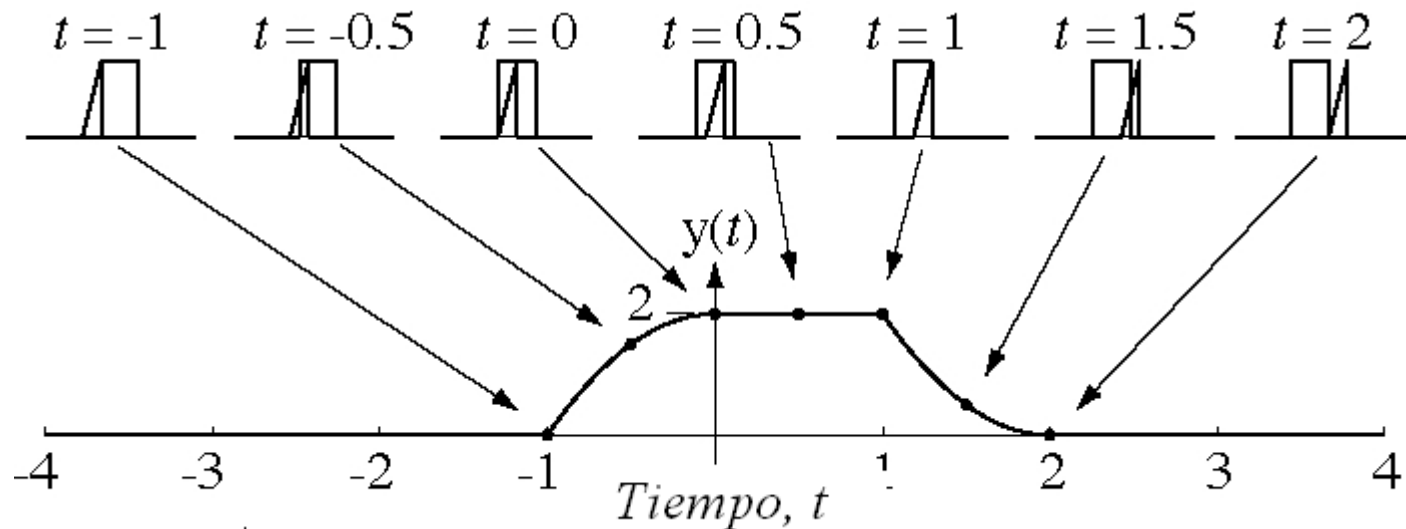
- Para  $t=5$  el área bajo el producto es  $0 \Rightarrow y(5)=0$
- Supongamos ahora  $t=0$



- Entonces  $y(0)=2$

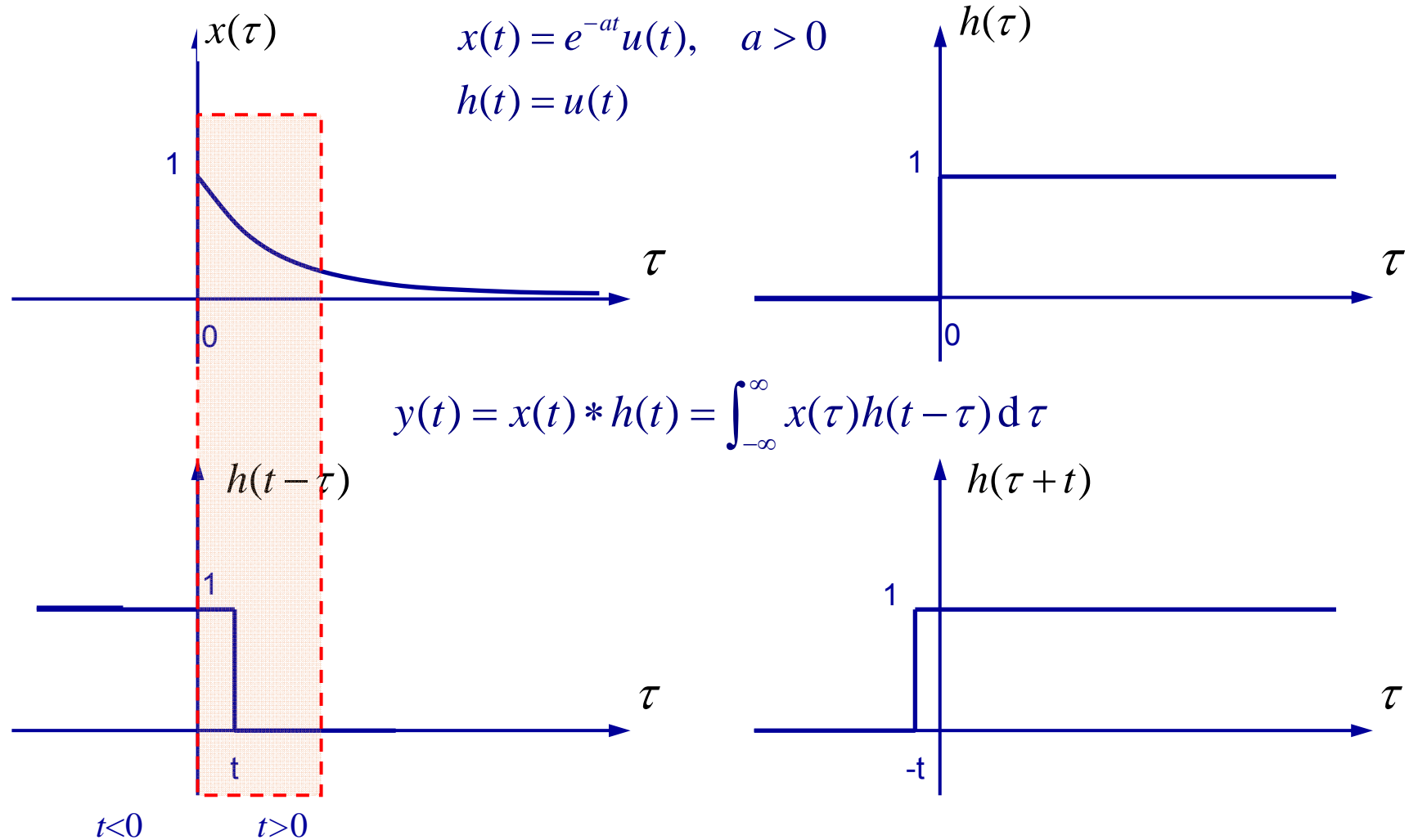
# Interpretación gráfica de la integral de convolución (III)

- El proceso completo de convolución arroja la función  $y(t)$

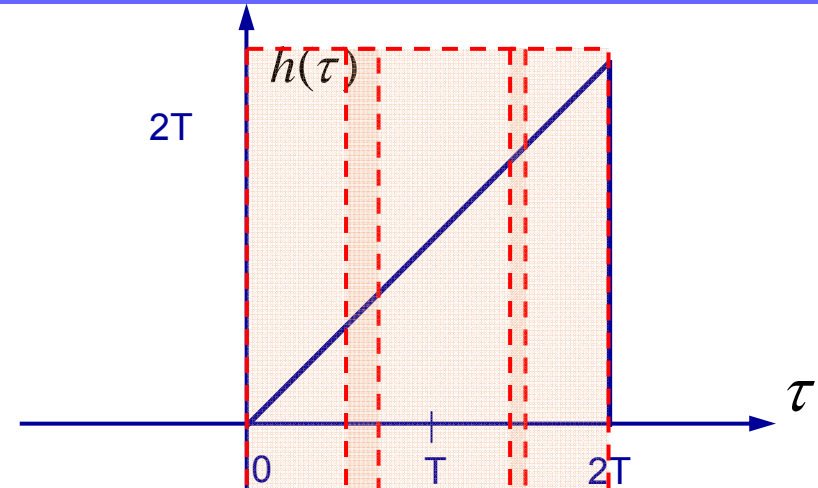
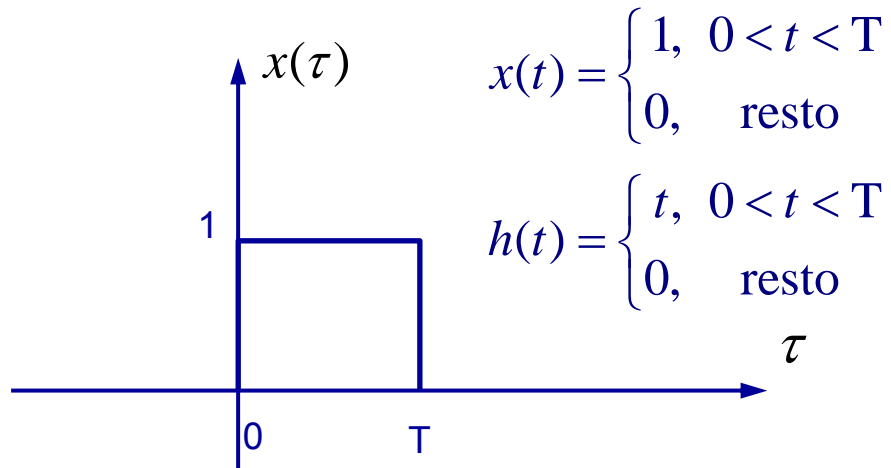


- La determinación correcta de los intervalos de integración es crucial

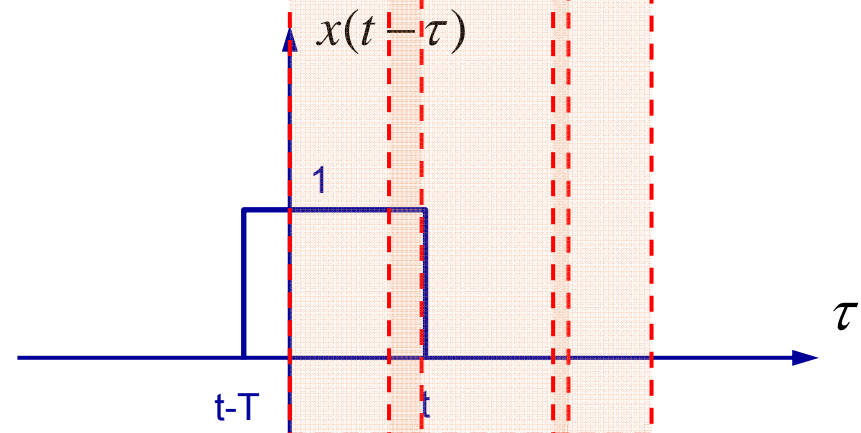
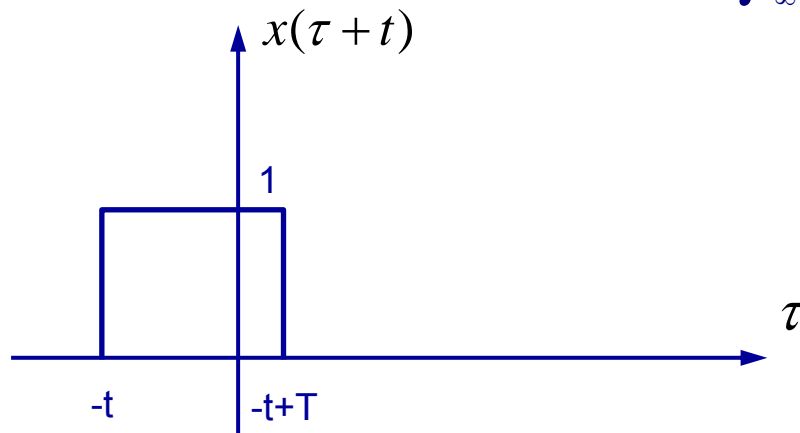
# Ejemplo I de convolución gráfica TC



# Ejemplo II de convolución gráfica TC



$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau) d\tau$$

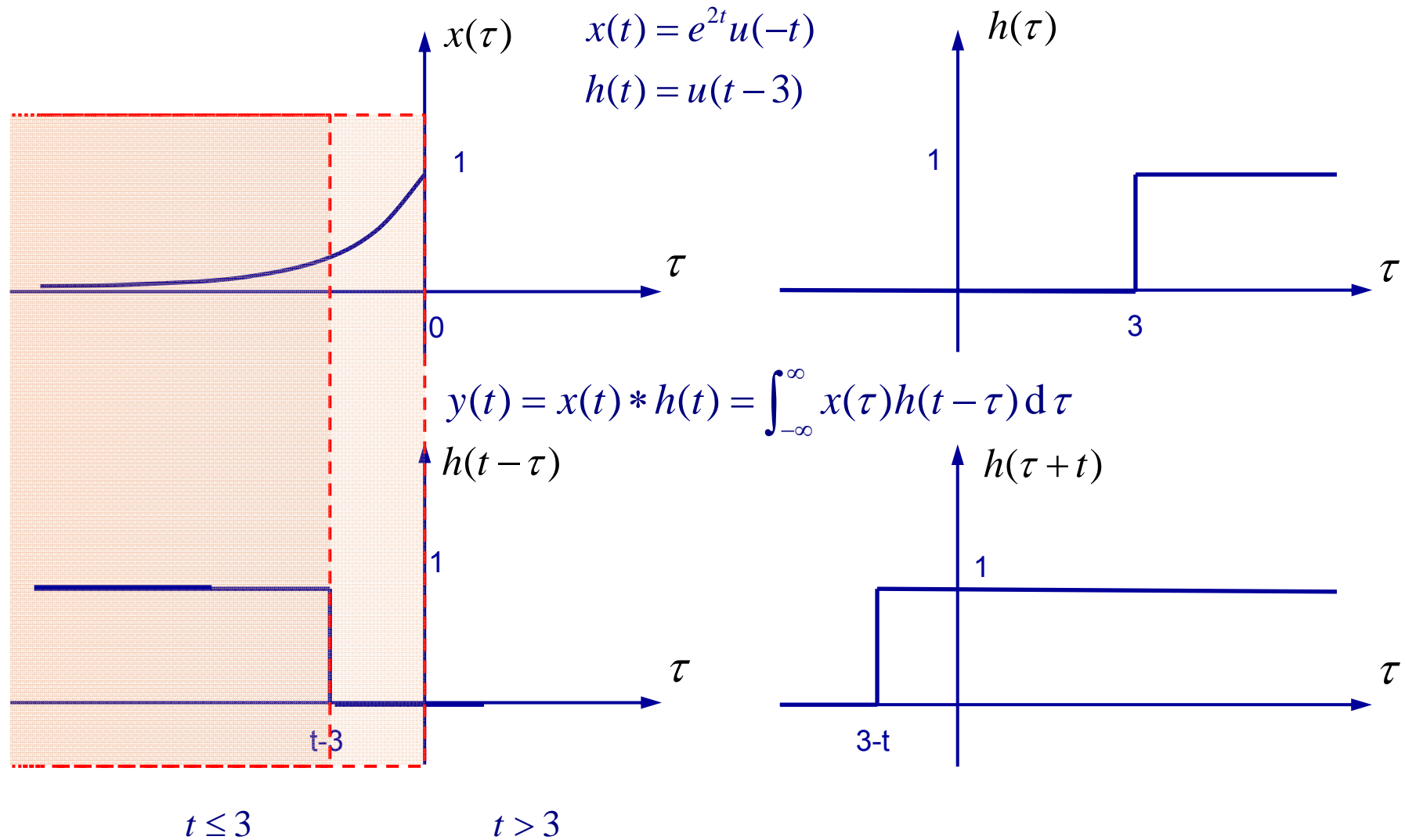


$$t \leq 0 < t \leq T < t \leq 2T < t \leq t > 3T$$

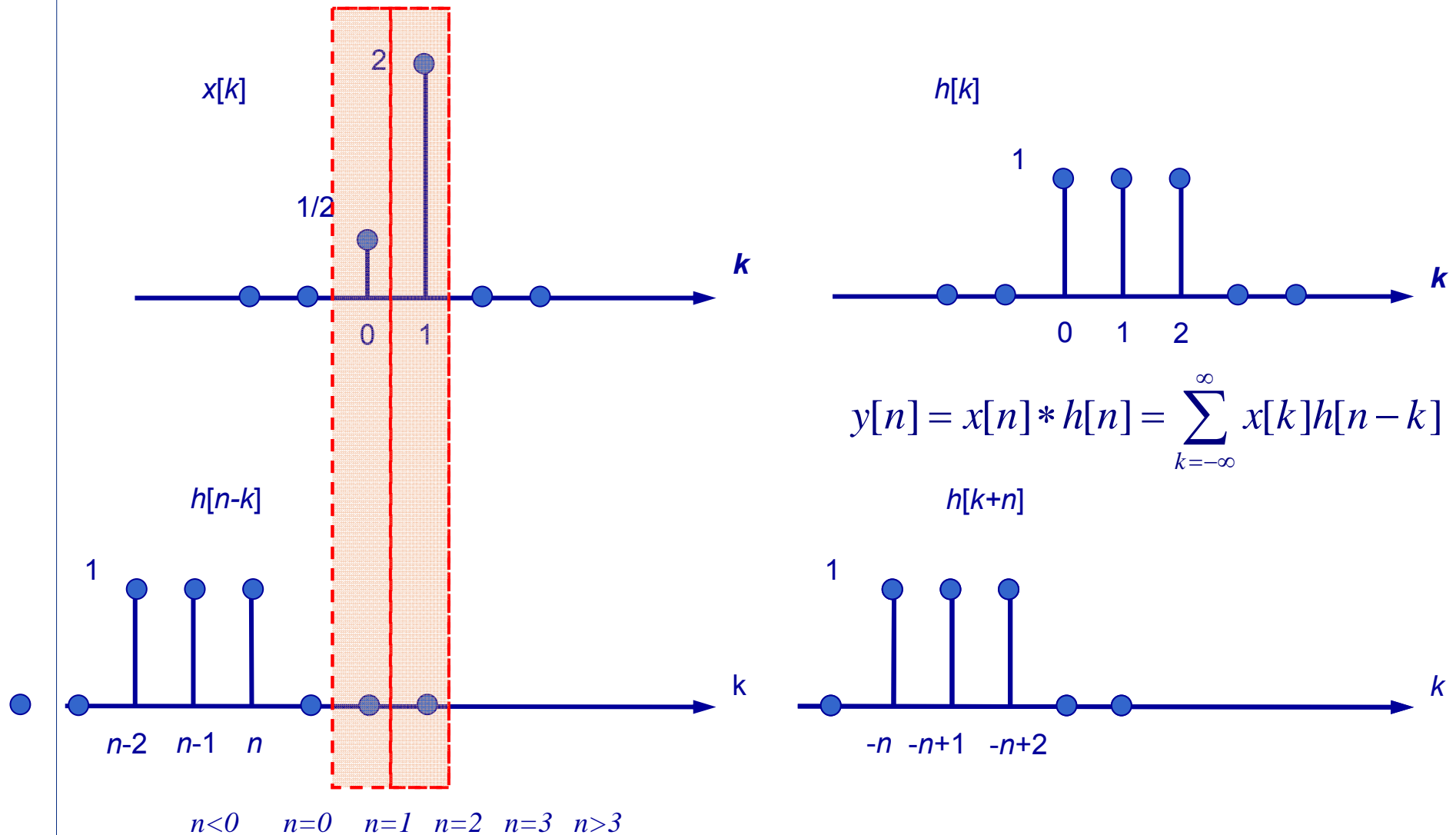




# Ejemplo III de convolución gráfica TC

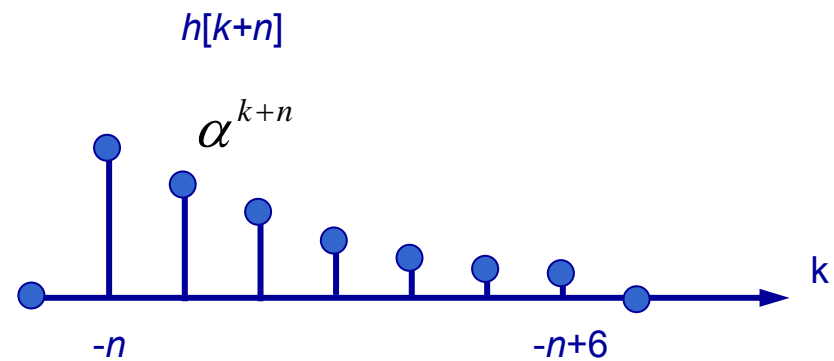
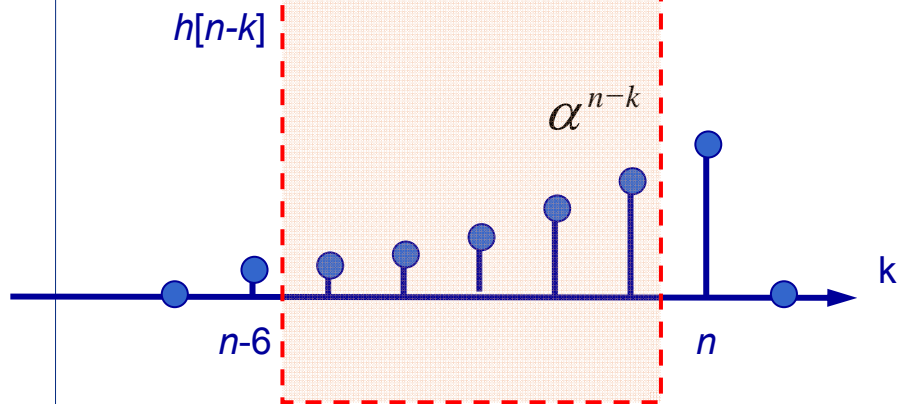
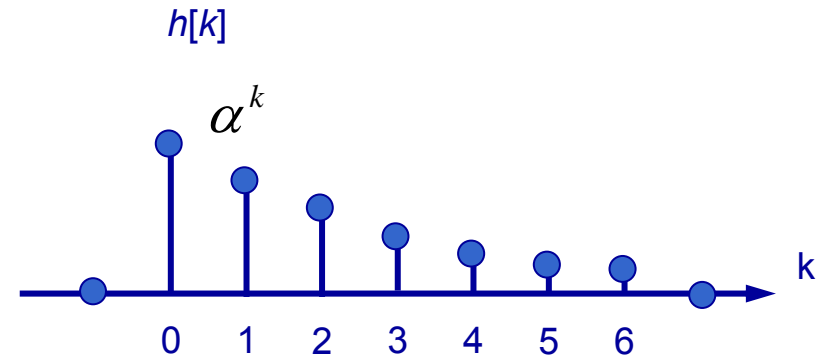
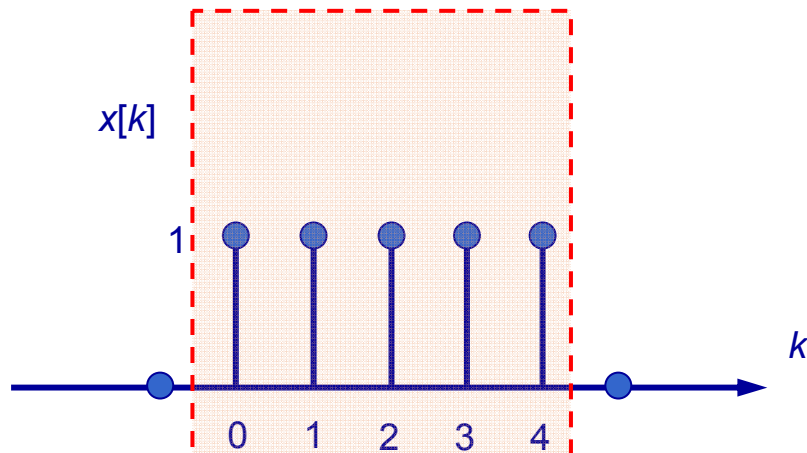


# Ejemplo I de convolución gráfica TD



# Ejemplo II de convolución gráfica TD

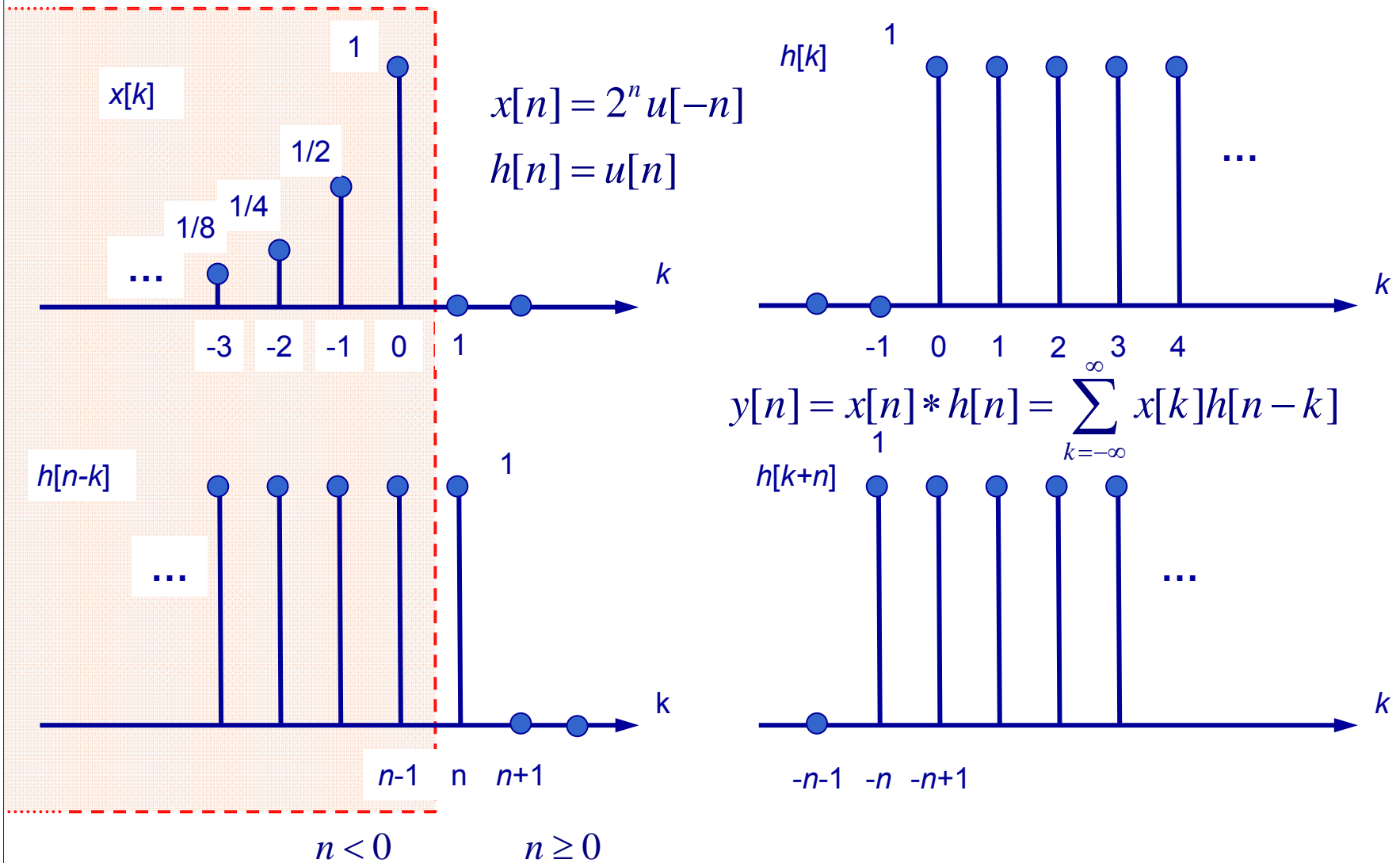
$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$



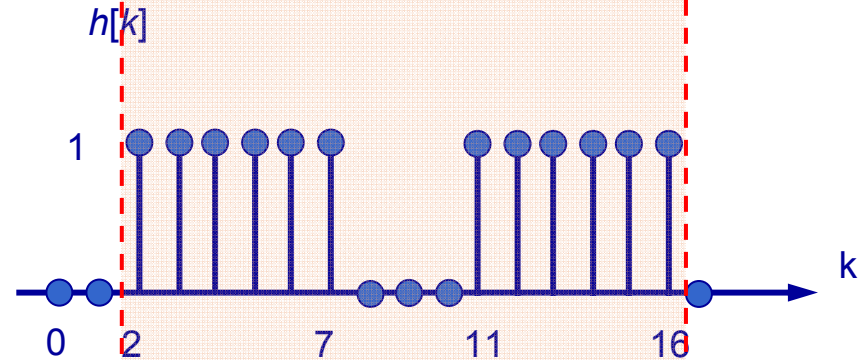
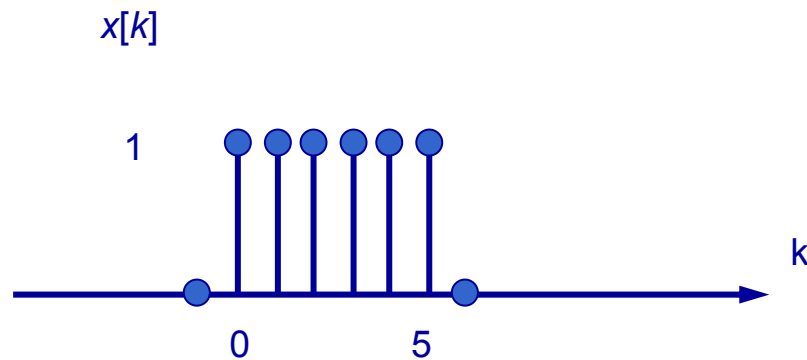
$n < 0$      $0 \leq n \leq 4$      $4 < n \leq 6$      $6 < n \leq 10$      $n > 10$



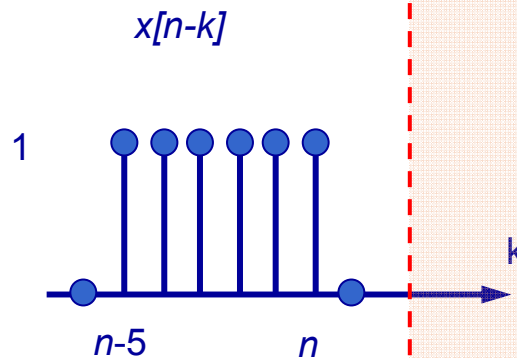
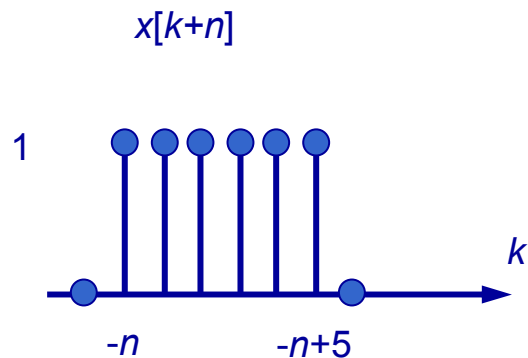
# Ejemplo III de Convolución gráfica TD



# Ejemplo IV de Convolución gráfica TD



$$y[n] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

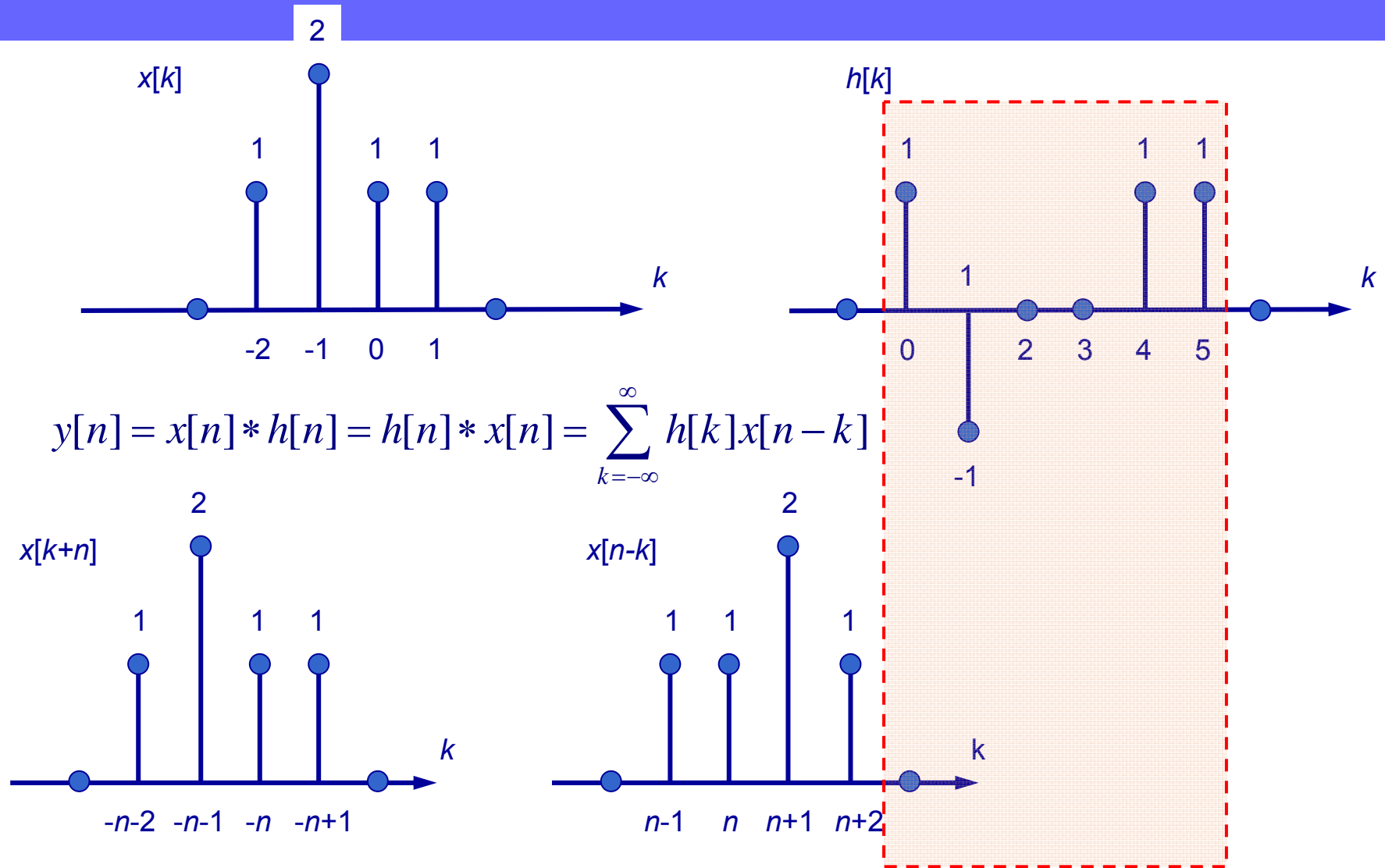


$$n < 2 \quad 2 \leq n \leq 7 \quad n > 10 \quad n > 12 \quad n > 16 \quad n : n \geq 22$$





# Ejemplo V de Convolución gráfica TD

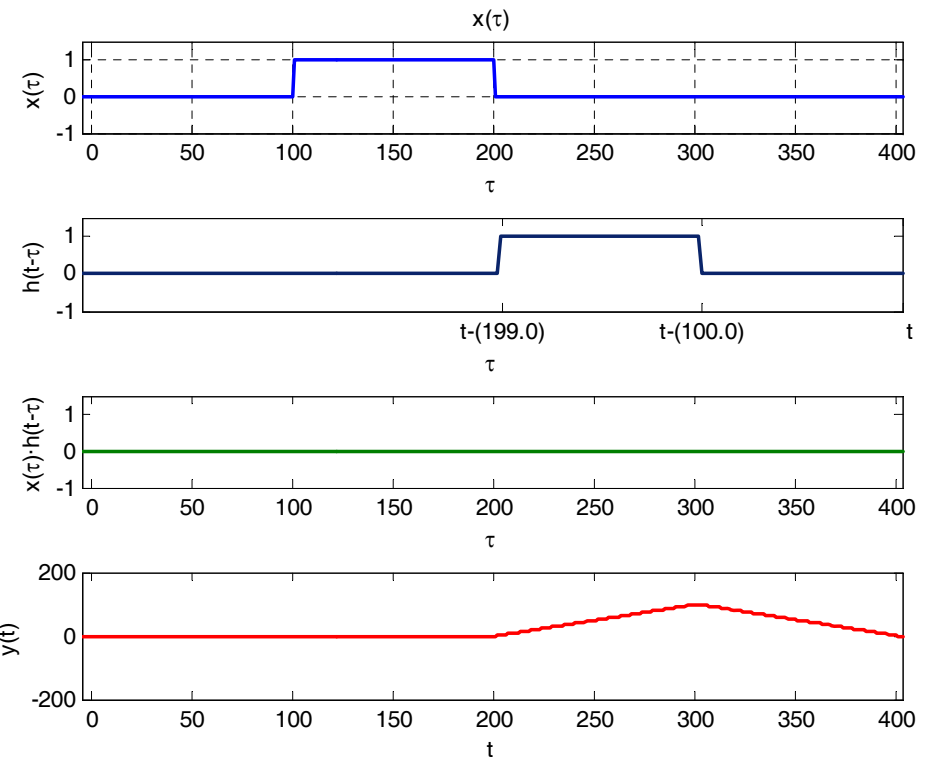
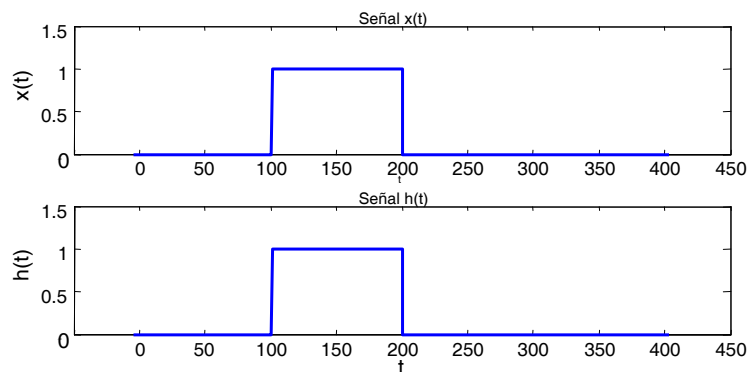


$$n < -n = n = n = n = n = n = n = n = n = n > 6$$



# Ejemplo de convolución

- Convolución de dos pulsos rectangulares de igual duración
- $y(t) = x(t) * h(t)$

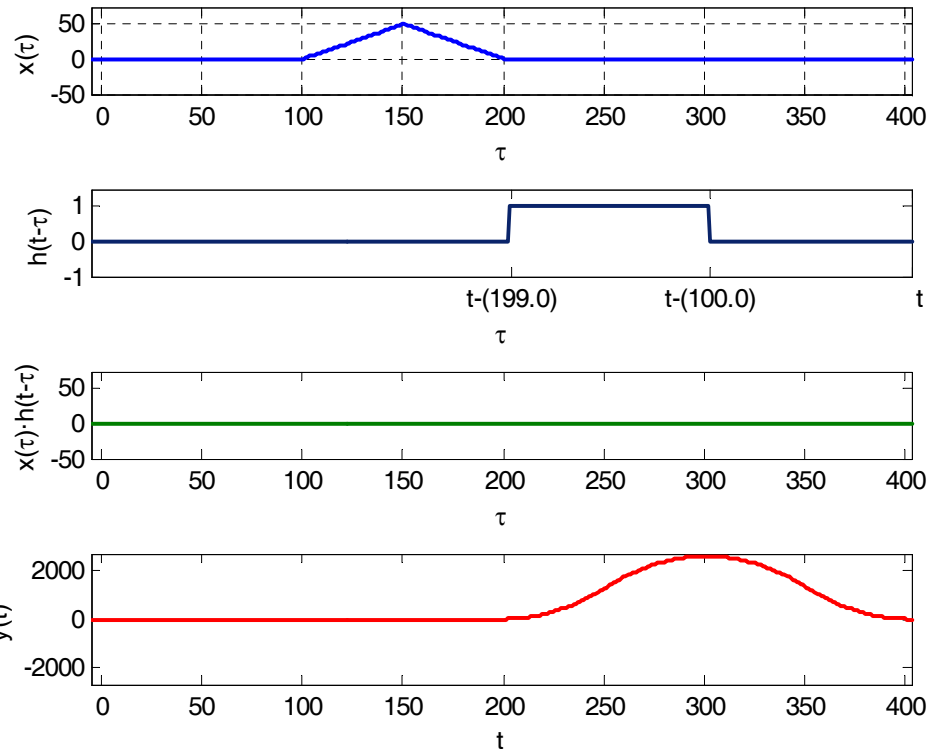
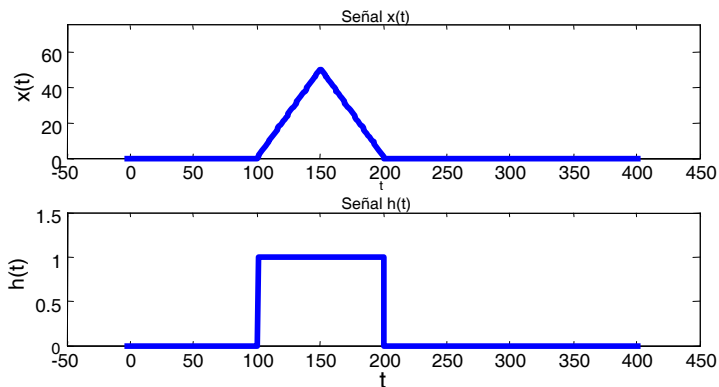


Se duplica la longitud de  $y(t)$



# Ejemplo de convolución

- Convolución de un **pulso rectangular** y una **señal triangular** de igual duración
- $y(t) = x(t) * h(t)$

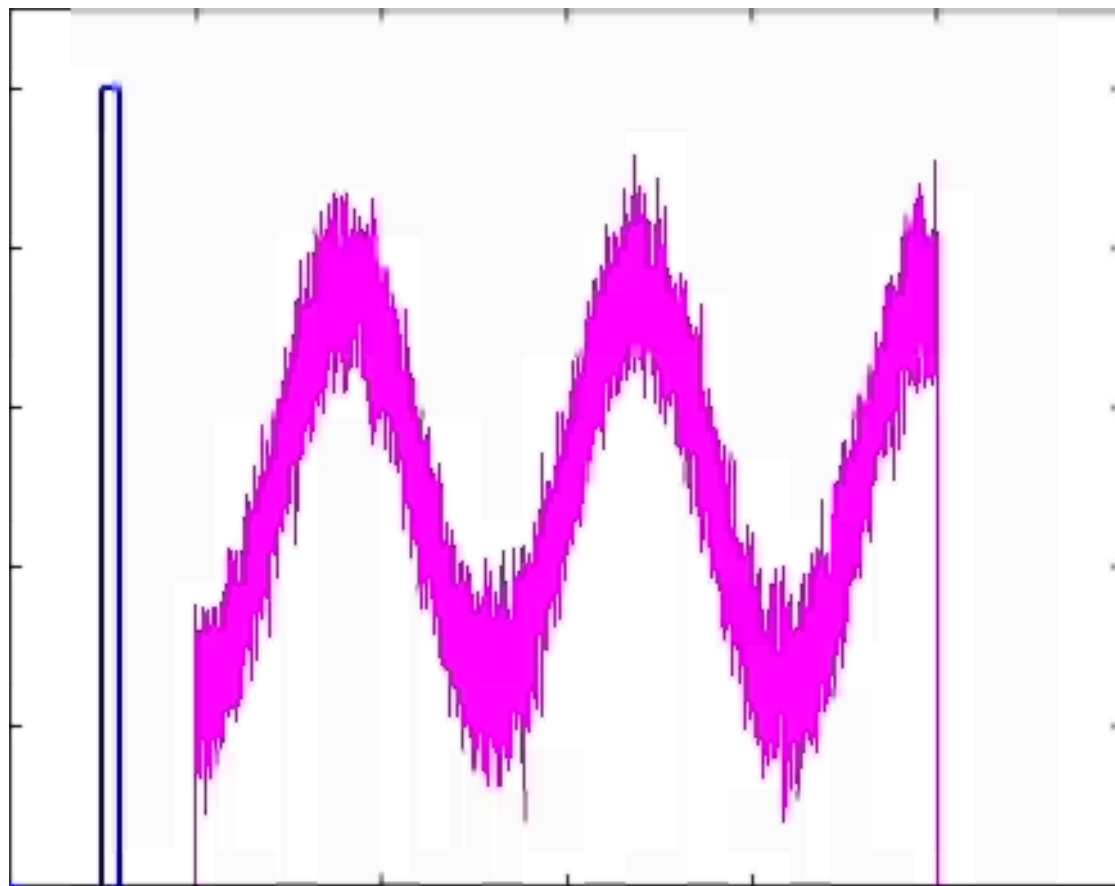


Se duplica la longitud de  $y(t)$





# Ejemplo de convolución



# Sistemas particulares

- ❑ Algunos sistemas que están caracterizados por una respuesta al impulso particular:
  - ❖ Sistema **identidad**  $\rightarrow h(t)=\delta(t); h[n]=\delta[n]$
  - ❖ **Retardador**  $\rightarrow h(t)=\delta(t-t_0); h[n]=\delta[n-n_0]; t_0$  y  $n_0$  positivos
  - ❖ **Integrador**  $\rightarrow h(t)=u(t)$
  - ❖ **Derivador discreto**  $\rightarrow h[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$
  - ❖ **Media móvil:**  $\rightarrow h[n]=\frac{1}{M_1+M_2+1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} \delta[n-k]=\begin{cases} \frac{1}{M_1+M_2+1} & -M_1 \leq n \leq M_2 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$
  - ❖ **Acumulador:**  $\rightarrow h[n]=u[n]=\sum_{k=-\infty}^n \delta[k]=\begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$

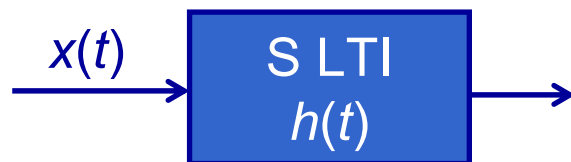


## 6. Propiedades de los sistemas LTI

- Por definición son **lineales e invariantes**
- Caracterizaremos las siguientes propiedades
  - ❖ Memoria
  - ❖ Invertibilidad
  - ❖ Causalidad
  - ❖ Estabilidad
- Para ello, sabemos que:



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$



$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = x(t) * h(t)$$



# Memoria

Para que un sistema LTI sea **sin memoria**, la relación entrada salida no puede depender más que del **instante actual**.

Como en el caso de los sistemas LTI, la relación entrada salida se puede expresar mediante una convolución,

Dicha suma (integral) de convolución no puede depender de instantes  $k \neq 0$  ( $t \neq 0$ ), con lo que la respuesta al impulso  $h[n]$  ( $h(t)$ ) deberá ser:

$$\text{Sistema LTI sin memoria} \Leftrightarrow \begin{cases} h[n] = A \cdot \delta[n] , & \text{para TD} \\ h(t) = A \cdot \delta(t) , & \text{para TC} \end{cases}$$



# Causalidad

En sistemas LTI, la relación E/S se puede expresar mediante convolución. Dicha suma (integral) de convolución **no** puede  **depender de instantes futuros**  para que el sistema sea **causal**.

Es decir, la suma (integral) de convolución no puede depender de instantes  $k > 0$  ( $t > 0$ ), con lo que la respuesta al impulso  $h[n]$  ( $h(t)$ ) deberá ser:

$$\text{a) TD: } y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^0 x[k]h[n-k], \quad \text{para ser causal} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h[n-k] = 0 \quad \forall k > n \Leftrightarrow h[n] = 0 \quad \forall n < 0$$

$$\text{b) TC: } \text{Causal} \Leftrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^0 x(\tau)h(t-\tau)d\tau \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h(t-\tau) = 0 \quad \forall \tau > t \Leftrightarrow h(t) = 0 \quad \forall t < 0$$

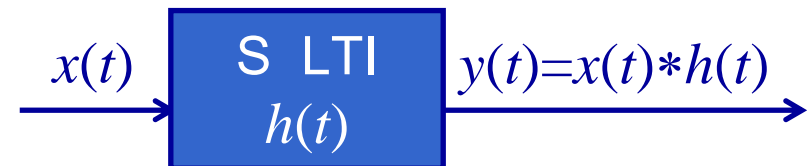
$$\text{Sistema LTI causal} \Leftrightarrow \begin{cases} h[n] = 0, & \forall n < 0, & \text{TD} \\ h(t) = 0, & \forall t < 0, & \text{TC} \end{cases}$$



# Estabilidad (I)

Un sistema es **estable**  $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall x(t)$  t.q.  $|x(t)| < A \Rightarrow |y(t)| < B$ , ( $\forall x[n]$  t.q.  $|x[n]| < A \Rightarrow |y[n]| < B$ )  
con  $A$  y  $B$  finitos



a) TC:

Supongamos que:  $|x(t)| < A$ . Tomando valores absolutos a la salida:

$$|y(t)| = |x(t) * h(t)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)h(t-\tau)|d\tau \Rightarrow$$

$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)||h(t-\tau)|d\tau < \int_{-\infty}^{\infty} A|h(t-\tau)|d\tau = A \int_{-\infty}^{\infty} |h(t-\tau)|d\tau \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( \text{Si } \int_{-\infty}^{\infty} |h(t-\tau)|d\tau < \infty \Rightarrow |y(t)| < B \right)$$

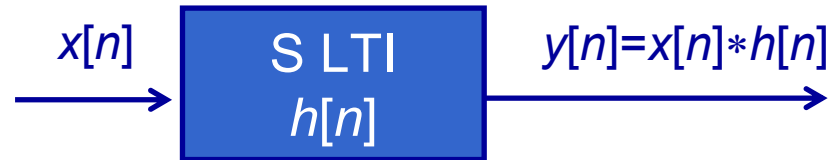
$\Rightarrow$  Si  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty \Rightarrow$  *el sistema es estable*

Se puede comprobar el recíproco



# Estabilidad (II)

b) TD:



Supongamos que:  $|x[n]| < A$ . Tomando valores absolutos a la salida:

$$|y[n]| = |x[n] * h[n]| = \left| \sum_{-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \right| \leq \sum_{-\infty}^{\infty} |x[k]h[n-k]| \Rightarrow$$

$$|y[n]| \leq \sum_{-\infty}^{\infty} |x[k]| |h[n-k]| < \sum_{-\infty}^{\infty} A |h[n-k]| = A \sum_{-\infty}^{\infty} |h[n-k]| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left( \text{Si } \sum_{-\infty}^{\infty} |h[n-k]| < \infty \Rightarrow |y[n]| < B \right)$$

$$\Rightarrow \text{Si } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \Rightarrow \text{el sistema es estable}$$

Se puede comprobar el recíproco



# Estabilidad (III)

- En resumen:

- ❖ Un sistema LTI de **TC** es **estable** si y solo si su respuesta al impulso es **absolutamente integrable**
- ❖ Un sistema LTI de **TD** es **estable** si y solo si su respuesta al impulso es **absolutamente sumable**

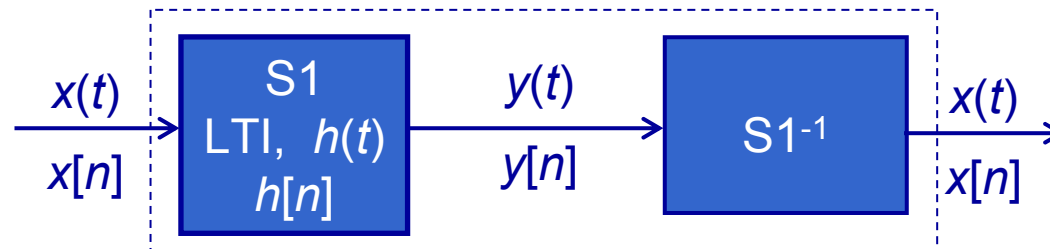
$$\text{Sistema LTI estable} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{TC: } \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \\ \text{TD: } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \end{cases}$$





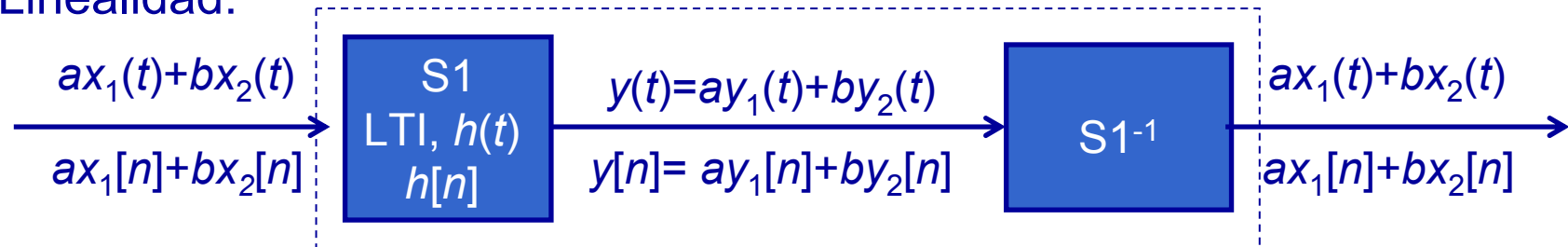
# Invertibilidad (I)

Para que un sistema sea invertible debe existir su  $S^{-1}$  de modo que asociados en serie el resultado de la asociación sea la identidad:

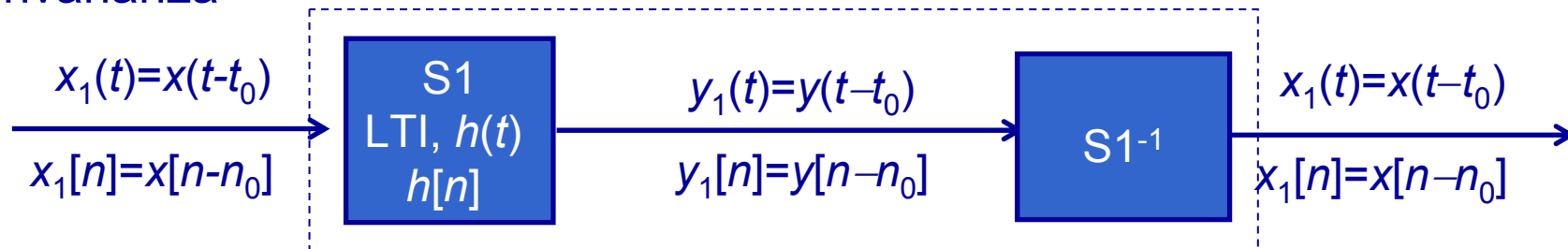


Si  $S1$  es LTI, su inverso, si existe, también debe ser LTI.

• Linealidad:

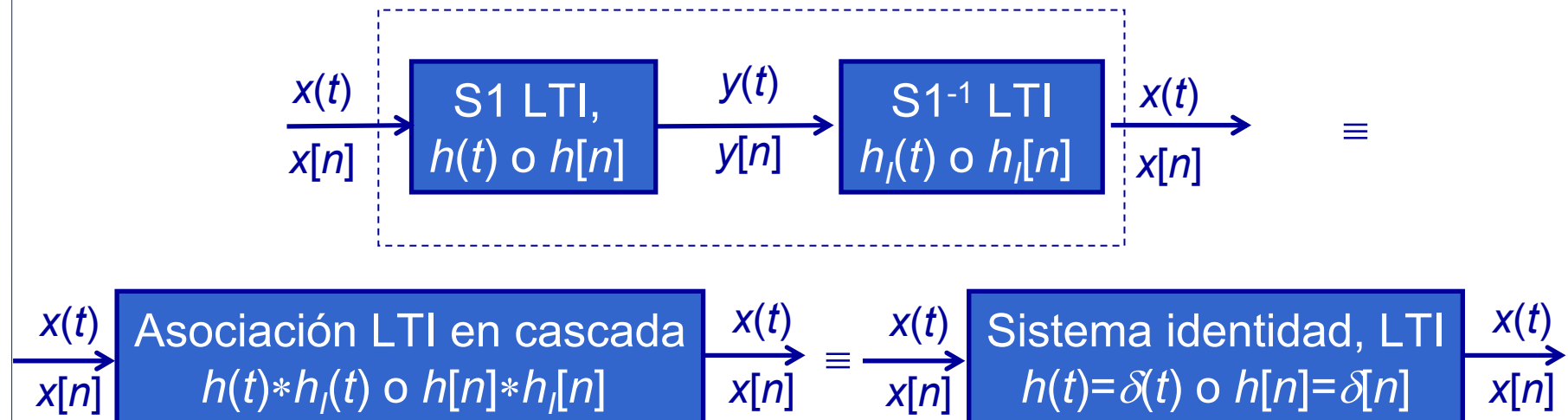


• Invarianza



# Invertibilidad (II)

Como el sistema inverso es LTI, puede ser caracterizado por su respuesta al impulso,  $h_I(t)$  o  $h_I[n]$ , y la asociación es equivalente a la identidad (sistema LTI con respuesta al impulso  $\delta(t)$  o  $\delta[n]$ ):



Un sistema LTI es **invertible**  $\Leftrightarrow \exists$  otro sistema LTI tal que:

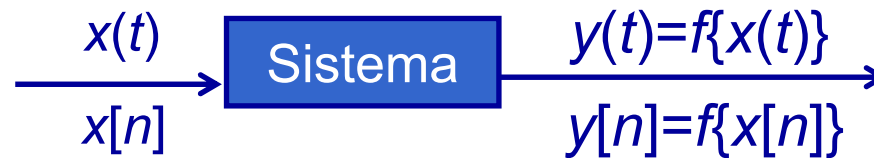
TC:  $h(t)*h_I(t)=\delta(t)$

TD:  $h[n]*h_I[n]=\delta[n]$



# Síntesis

1. Definición de sistema y de sus propiedades:  
Relación entrada salida



## Propiedades

- Linealidad
- Invarianza en el tiempo
- Memoria
- Causalidad
- Estabilidad
- Invertibilidad

2. Sistemas LTI



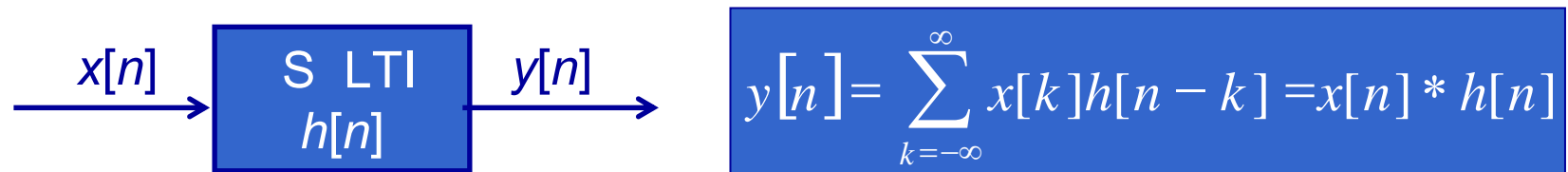
# Síntesis

## 3. Representación de señales:

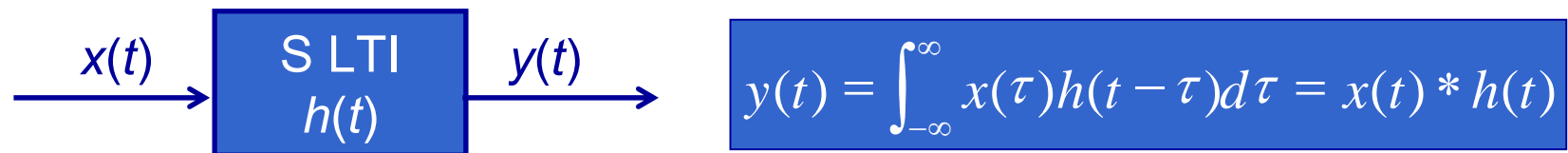
$$TD: x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] = x[n] * \delta[n]$$

$$TC: x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = x(t) * \delta(t)$$

## 4. Sistemas LTI de tiempo discreto:



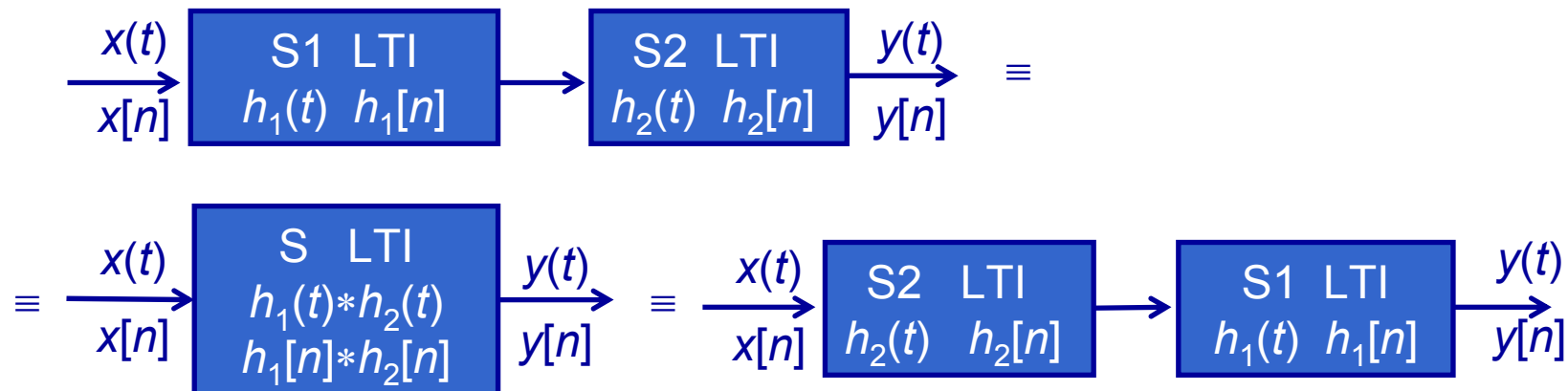
## 5. Sistemas LTI de tiempo continuo:



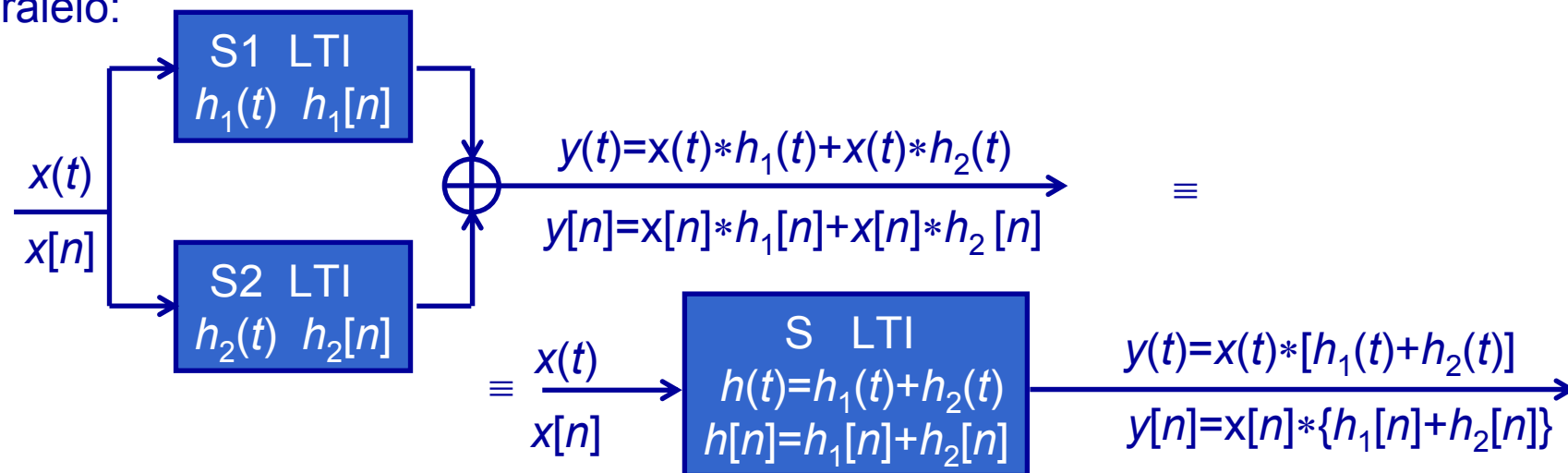
# Síntesis

Asociaciones:

Serie:



Paralelo:



# Síntesis

## 6. Propiedades de los sistemas LTI:

$$\text{Sistema LTI sin memoria} \Leftrightarrow \begin{cases} h[n] = A \cdot \delta[n] , & \text{para TD} \\ h(t) = A \cdot \delta(t) , & \text{para TC} \end{cases}$$

$$\text{Sistema LTI causal} \Leftrightarrow \begin{cases} h[n] = 0 , \quad \forall n < 0 , & \text{para TD} \\ h(t) = 0 , \quad \forall t < 0 , & \text{para TC} \end{cases}$$

$$\text{Sistema LTI estable} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{TC: } \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty \\ \text{TD: } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty \end{cases}$$

*Sistema LTI invertible*  $\Leftrightarrow \exists$  otro sistema LTI tal que:

$$\text{TC: } h(t) * h_i(t) = \delta(t)$$

$$\text{TD: } h[n] * h_i[n] = \delta[n]$$

