

Análisis de Fourier para señales y sistemas de tiempo continuo

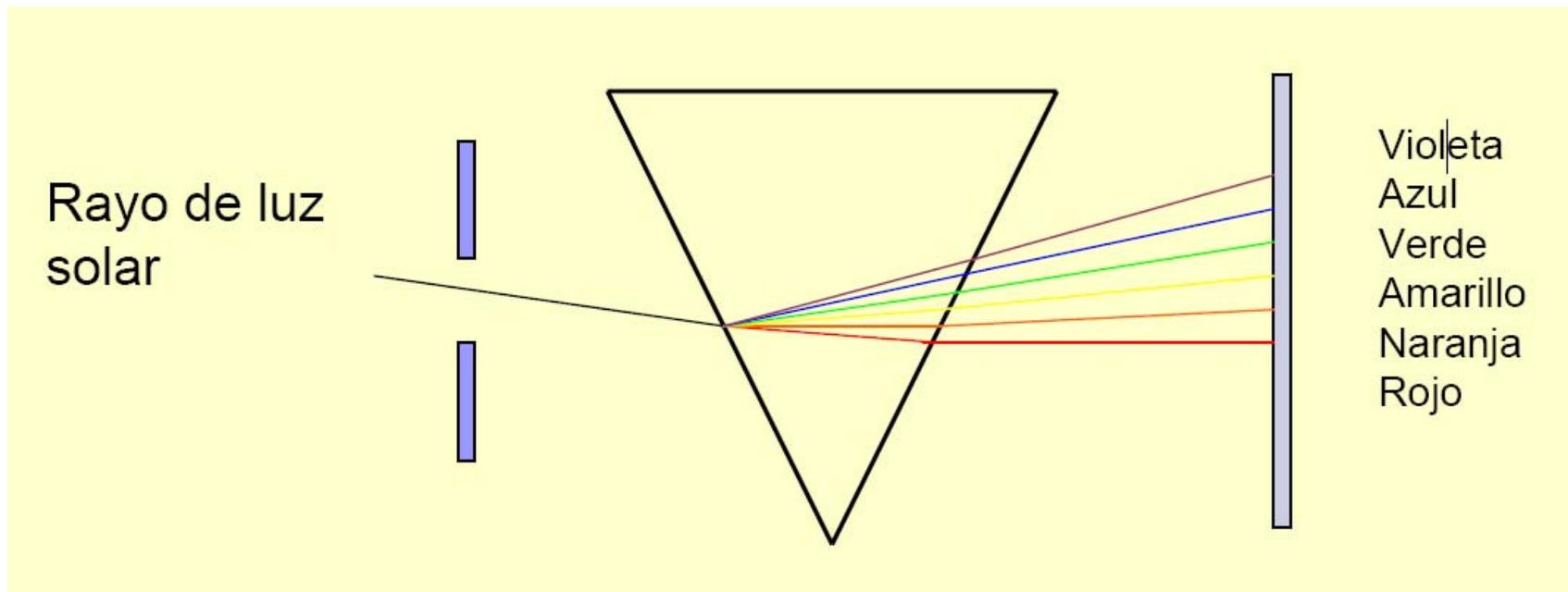
1. Introducción
2. Respuesta de sistemas continuos LTI a señales exponenciales complejas.
3. Desarrollo en series de Fourier de señales periódicas
4. Transformada de Fourier para señales no periódicas
- ~~5. Transformada de Fourier para señales periódicas~~
6. Respuesta en frecuencia de sistemas continuos
7. Muestreo ideal
8. Aplicación de la Transformada de Laplace a los sistemas LTI
9. La función del sistema de sistemas continuos
10. Sistemas descritos por ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes
11. Introducción al filtrado

TRANSFORMADA
DE FOURIER
GENERALIZADA !!!!

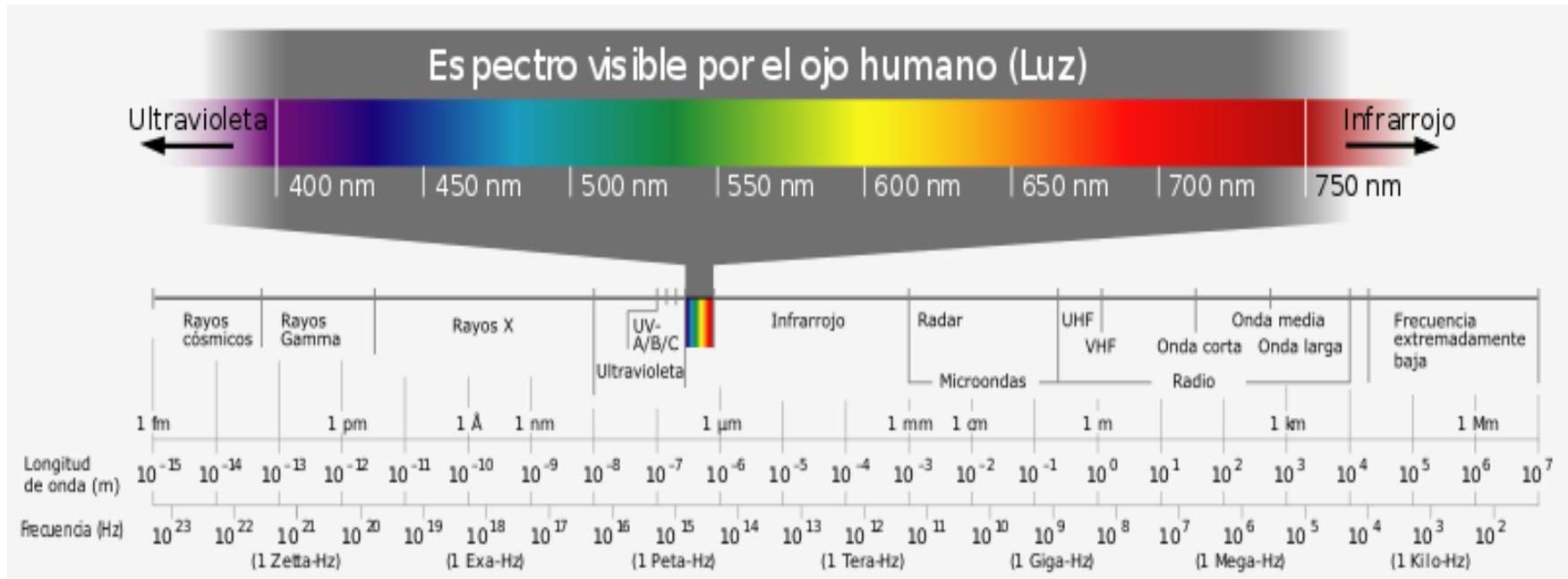


1. Introducción (I)

- Ejemplo de descomposición de Fourier:
 - ❖ Luz blanca que atraviesa un prisma

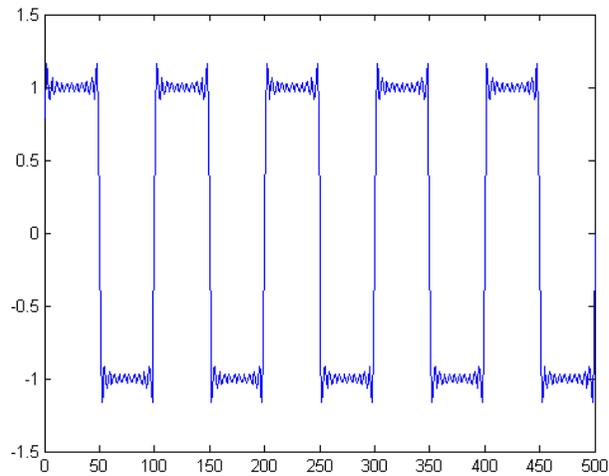


Espectro Electromagnético

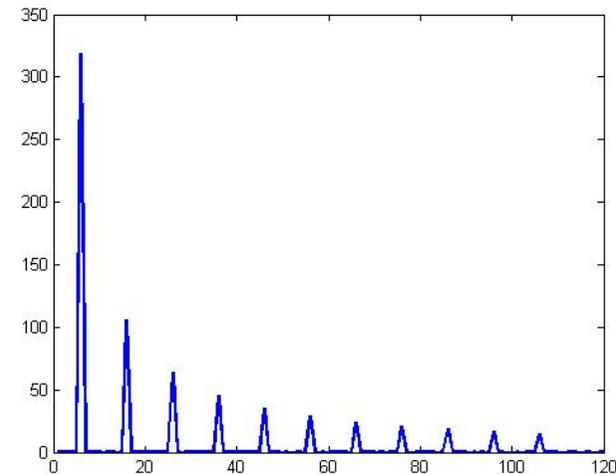


Introducción (II)

- ¿Qué hay detrás de una señal? ...
 - ❖ Diversas componentes de frecuencia y amplitud



Dominio del tiempo
(continuo o discreto)



Dominio de la frecuencia

¿Cómo se realiza este análisis en frecuencia?

Introducción (III)

- El análisis de Fourier es una de las herramientas más útiles en procesamiento de señal.
- Se basa en la descomposición de una señal en términos de un conjunto de funciones base (sinusoides de diferente frecuencia).
- Señales continuas (analógicas):
 - ❖ Periódicas: Series de Fourier (CTFS).
 - ❖ No periódicas: Transformada de Fourier (CTFT).
- Señales discretas (digitales):
 - ❖ Periódicas: Series de Fourier en tiempo discreto (DTFS)
 - ❖ No periódicas: Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT)



2. Respuesta de sistemas continuos LTI a señales exponenciales complejas

- La salida de un sistema LTI ante una entrada de tipo exponencial compleja es otra exponencial compleja

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{j\omega_0(t-\tau)} d\tau = e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau = e^{j\omega_0 t} H(s) \Big|_{s=j\omega_0}$$

$$y(t) = e^{j\omega_0 t} H(j\omega_0)$$

- Donde
 - $H(j\omega_0) \equiv H(\omega_0) \equiv \text{AUTOVALOR} \in \phi$
 - $e^{j\omega_0 t} \equiv \text{AUTOFUNCIÓN}$



Respuesta de sistemas LTI a una combinación lineal de exponenciales complejas (I)

- Supongamos que la entrada es una combinación lineal de exponenciales:

$$x(t) = \sum_{k=1}^N a_k e^{j\omega_k t} \Rightarrow$$

$$y(t) = h(t) * x(t) = \sum_{k=1}^N a_k h(t) * e^{j\omega_k t}$$

$$y(t) = \sum_{k=1}^N a_k H(j\omega_k) e^{j\omega_k t} = \sum_{k=1}^N b_k e^{j\omega_k t}$$

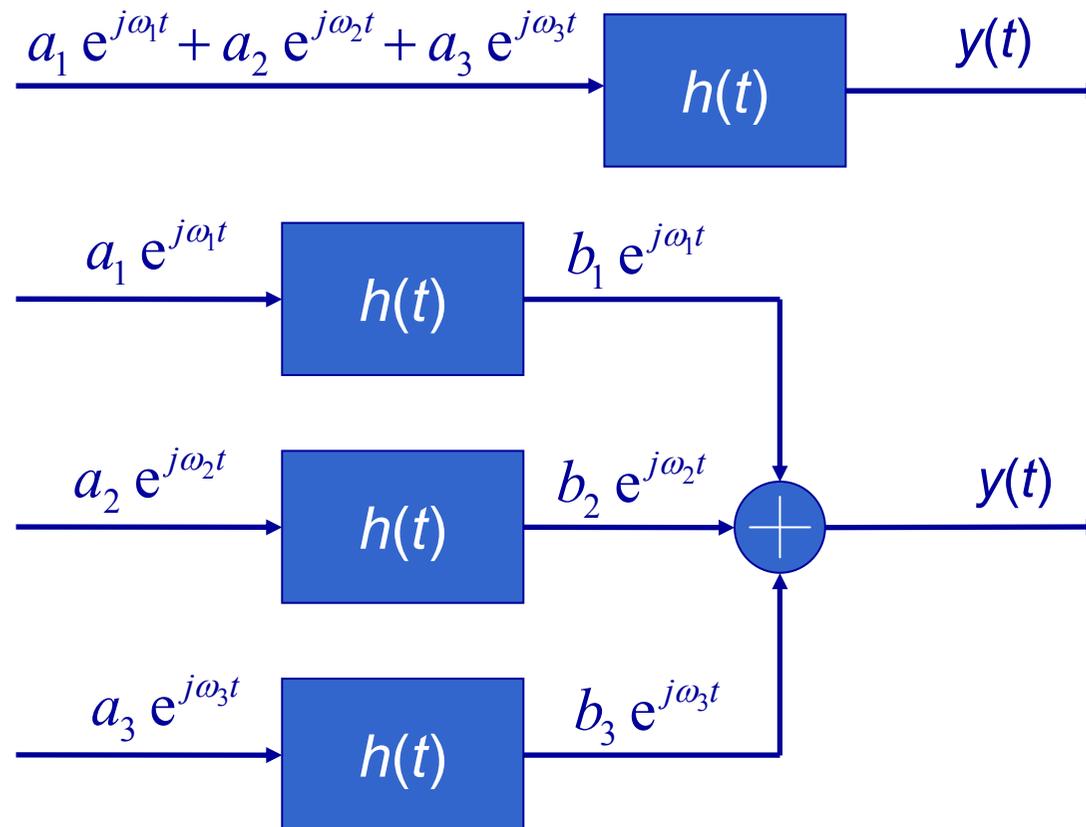
$$H(j\omega_k) \equiv H(\omega_k) \in \mathcal{C}$$
$$a_k, b_k \in \mathcal{C}$$

- La respuesta es otra combinación lineal de las mismas exponenciales.
- Esto es considerablemente más sencillo que realizar la convolución.
- Por ello vamos a estudiar qué tipo de señales se pueden representar mediante combinación lineal de exponenciales complejas.



Respuesta de sistemas LTI a una combinación lineal de exponenciales complejas (II)

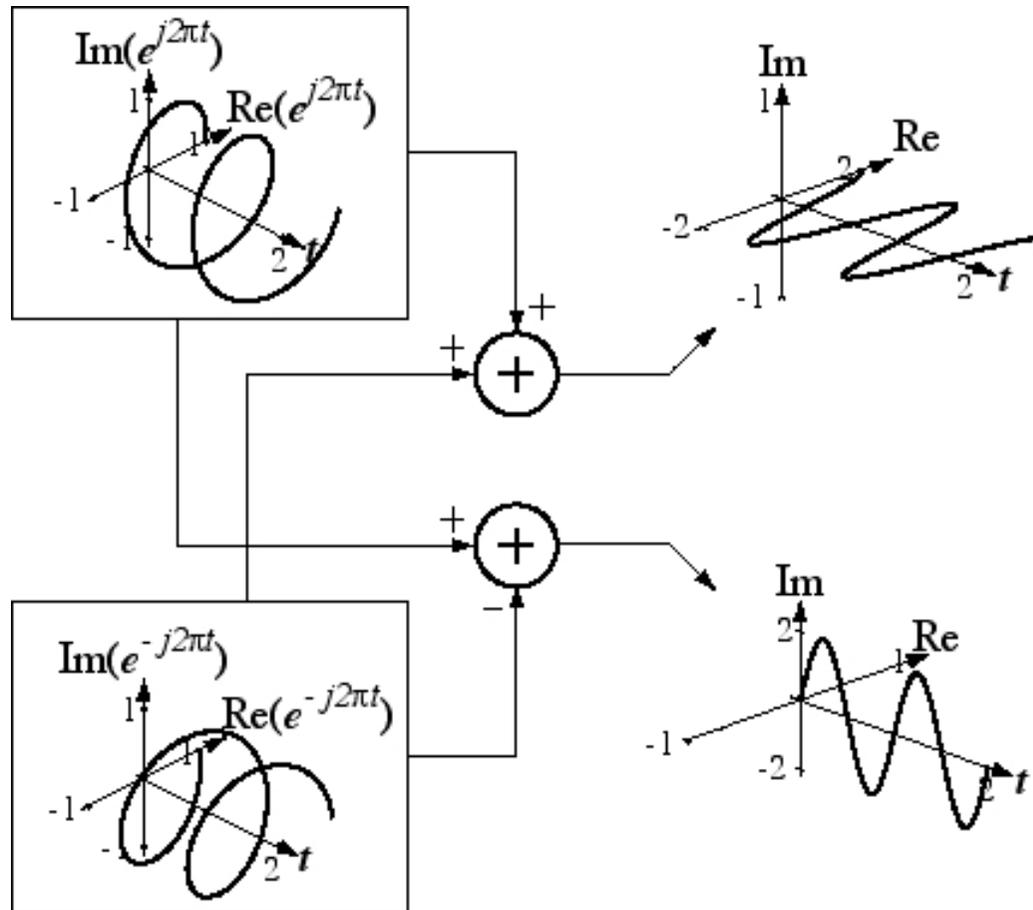
- De forma más gráfica, y aplicando la propiedad de linealidad...



- Hablaremos de frecuencia (f) y pulsación (ω) indistintamente:
 $\omega = 2\pi f$



Sinusoides complejas y reales



$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\text{sen}(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{j2}$$

3. Desarrollo en serie de Fourier de señales periódicas (CTFS)

- Una señal $x(t)$ es periódica $\Leftrightarrow \exists T>0 / x(t)=x(t+T), \forall t$
 - ❖ El periodo fundamental T_0 es el mínimo $T>0$ con el que se cumple la condición de periodicidad.
 - ❖ Su inverso es la frecuencia fundamental $f_0=1/T_0$
 - ❖ La pulsación fundamental es $\omega_0=2\pi f_0$.
 - ❖ La señal $e^{jk\omega_0 t}$ es periódica de periodo fundamental T_0
 - ❖ Los armónicos $\Phi = e^{jk\omega_0 t}$ con k entero tienen periodo fundamental $T_0/|k|$.
 - ❖ Por ello T_0 es periodo común a todos los armónicos.
 - ❖ Por lo tanto la señal $\sum_k a_k e^{jk\omega_0 t}$ es periódica de periodo T_0
- Vamos a comprobar que la señal $x(t)$ periódica de periodo fundamental T_0 se puede expresar como el siguiente CTFS:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Ecuación de síntesis, CTFS⁻¹



CTFS. Cálculo de los coeficientes

- Necesitamos conocer los coeficientes a_k .
- En la ecuación de síntesis, multiplicamos ambos lados por $e^{-jn\omega_0 t}$ e integramos en un periodo y obtenemos:

$$\int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} dt$$

$$\text{Como } \int_{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \begin{cases} \int_{T_0} 1 dt = T_0 & , \text{ si } k = n \\ \int_{T_0} \cos(k-n)\omega_0 t + j \text{sen}(k-n)\omega_0 t dt = 0, & \text{ si } k \neq n \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k T_0 \delta[k-n] = a_n T_0 \Rightarrow$$

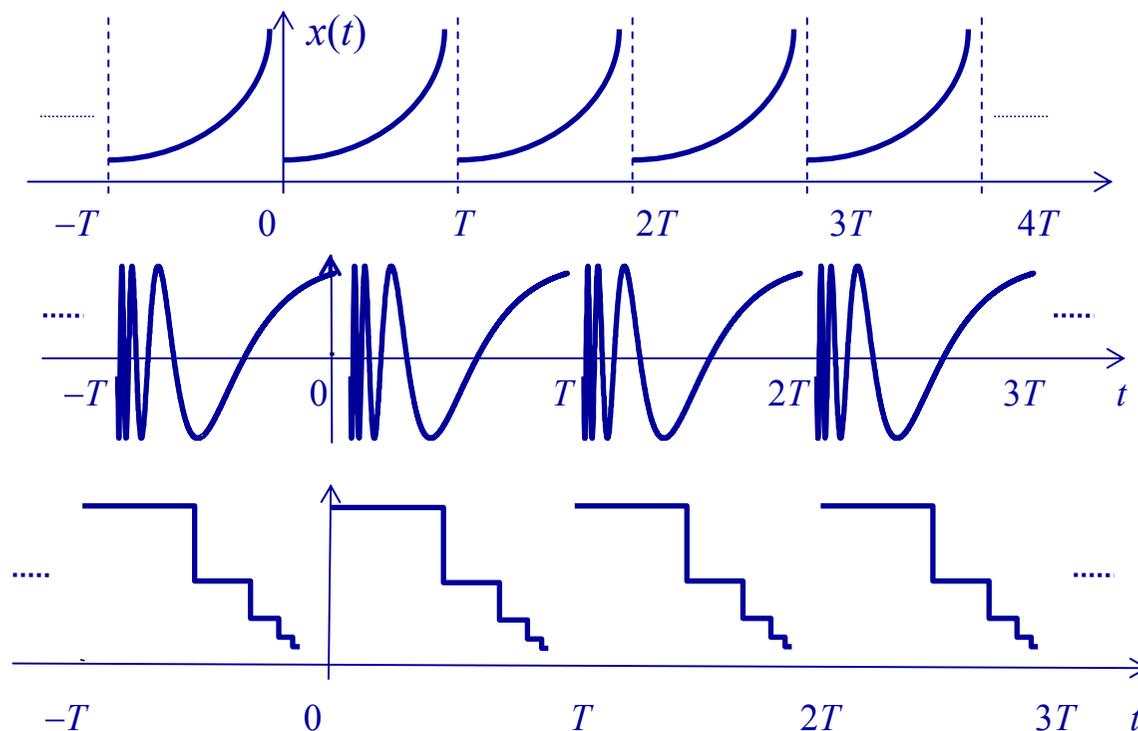
$$a_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Ecuación de análisis, CTFS



Condiciones de existencia del CTFS

- El cálculo de los coeficientes mediante la ecuación de análisis es posible siempre que **no** ocurra alguna de las situaciones siguientes:
 - ★ Señal no absolutamente integrable sobre un periodo
 - ★ Señal con infinitas oscilaciones en un periodo
 - ★ Señal con infinitas discontinuidades en un periodo

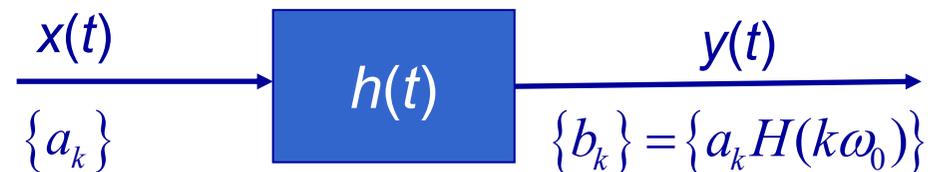


Consideraciones sobre el CTFS

- El CTFS es una combinación lineal de sinusoides complejas armónicamente relacionadas
- En el caso de *señales periódicas reales* a veces se usan otras expresiones para la serie de Fourier. Por ej.:

$$x(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\alpha_k \cos(k\omega_0 t) + \beta_k \text{sen}(k\omega_0 t)]$$

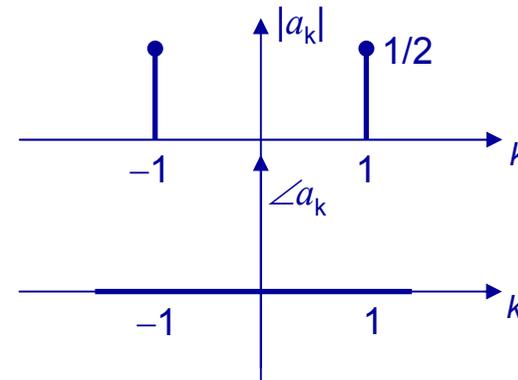
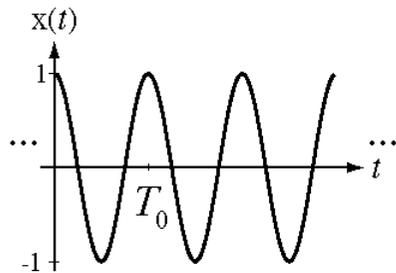
- Para un sistema LTI, la respuesta a una señal periódica es otra señal periódica con los mismos armónicos que la señal de excitación, pero cambiando sus amplitudes y fases



CTFS de las funciones seno y coseno

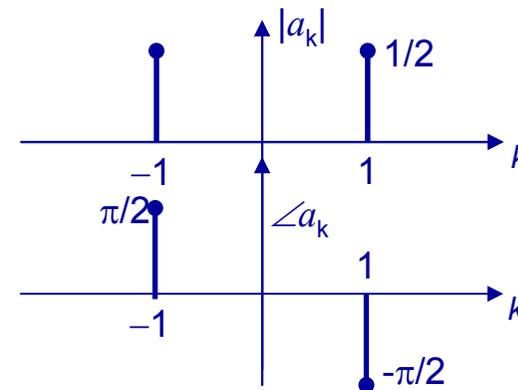
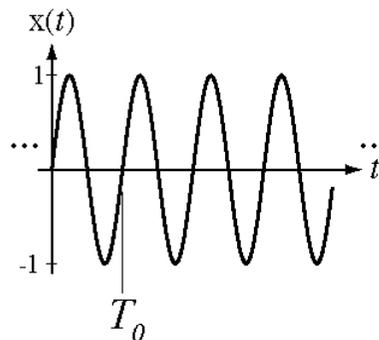
$$x(t) = \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_{-1} = \frac{1}{2}$$



$$x(t) = \text{sen}(\omega_0 t) = \frac{1}{2j} e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j} e^{-j\omega_0 t}$$

$$a_1 = \frac{1}{2j}; \quad a_{-1} = \frac{-1}{2j}$$



Propiedad

- Supongamos que $x(t)$ es real $\rightarrow x(t)=x^*(t)$

Recordar
que es w_k

$$x(t) = \sum_k a_k e^{j\omega_k t} = \left(\sum_k a_k e^{j\omega_k t} \right)^* = x^*(t) = \sum_k a_k^* e^{-j\omega_k t} = \sum_k a_{-k}^* e^{j\omega_k t}$$

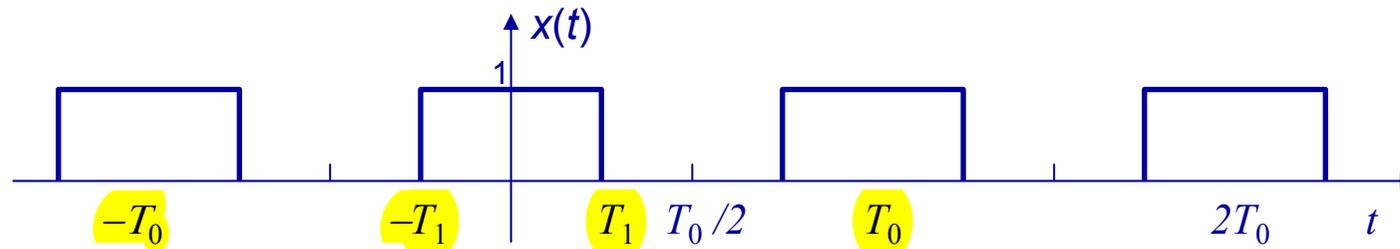
- Luego, si la señal es real, los coeficientes de la serie de Fourier verifican:

$$a_k = a_{-k}^*$$

- Los coeficientes poseen **antisimetría conjugada**, o lo que es lo mismo, son **hermíticos**



CTFS. Ejemplo (I)



$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & T_1 < |t| < T_0/2 \end{cases}; \quad x(t + T_0) = x(t)$$

Los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier son:

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt \Rightarrow$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \left(\frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0} \right) \Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{2}{k\omega_0 T_0} \left(\frac{e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}}{-2j} \right) \Rightarrow$$

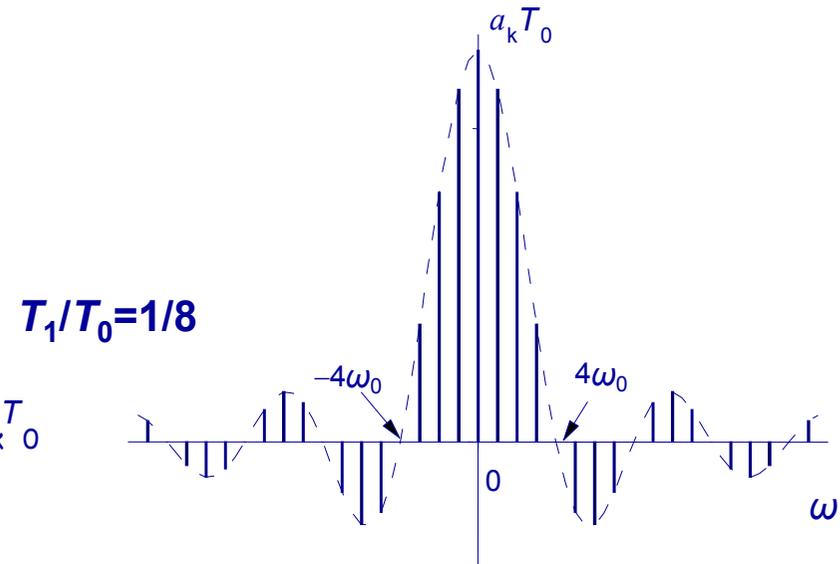
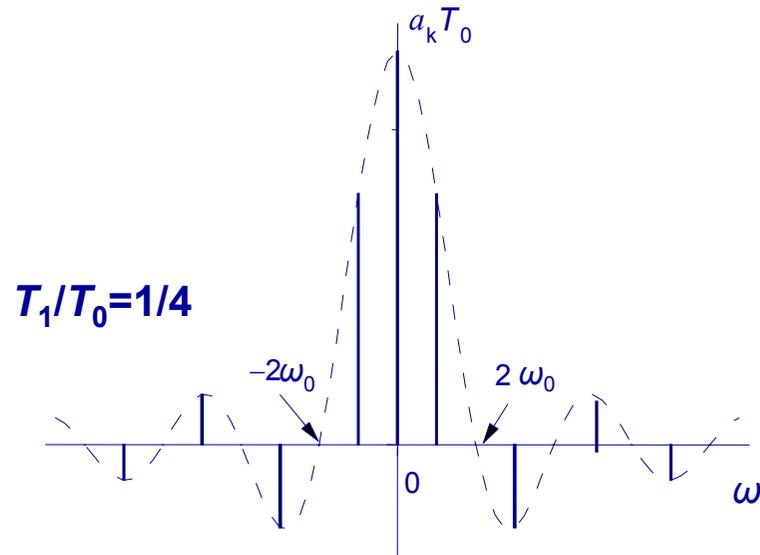
$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_1}^{T_1} 1 dt = \frac{2T_1}{T_0};$$

$$a_{k \neq 0} = \frac{\text{sen}(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$

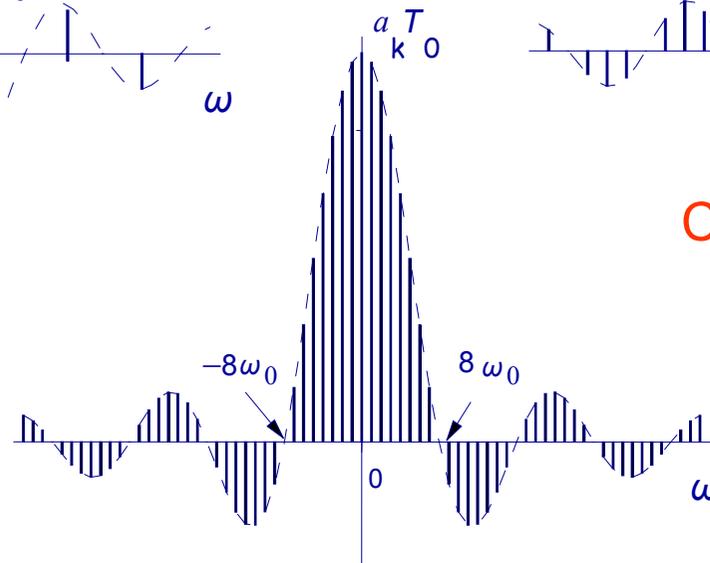


CTFS. Ejemplo (I)

- Representamos $T_0 a_k$ para ver la CTFS de un tren de pulsos de distinto periodo:



$T_1/T_0=1/16$

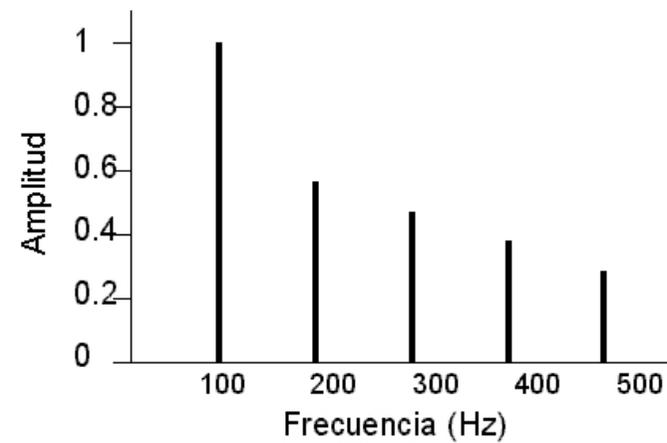
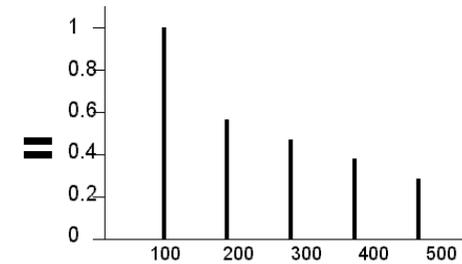
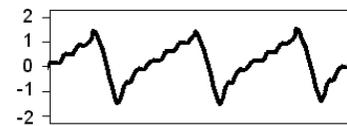
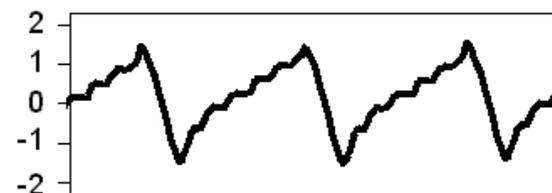
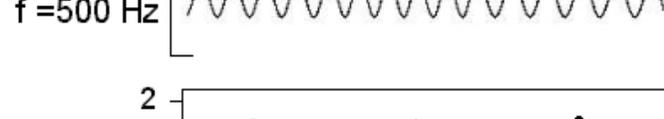
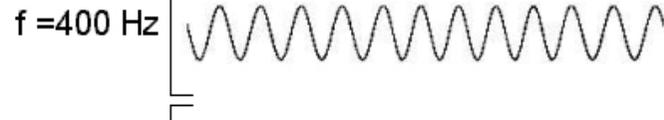
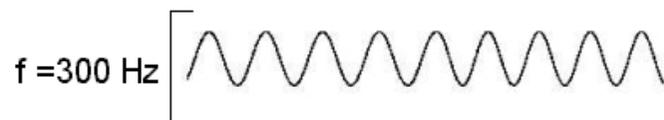
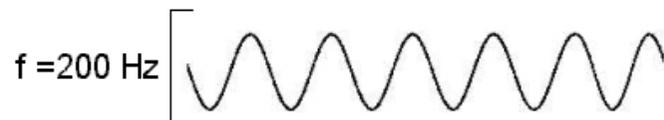


Conforme aumenta T_0 ,
aumenta el número
de componentes
espectrales

Que pasa cuando
 T_0 va a infinito?

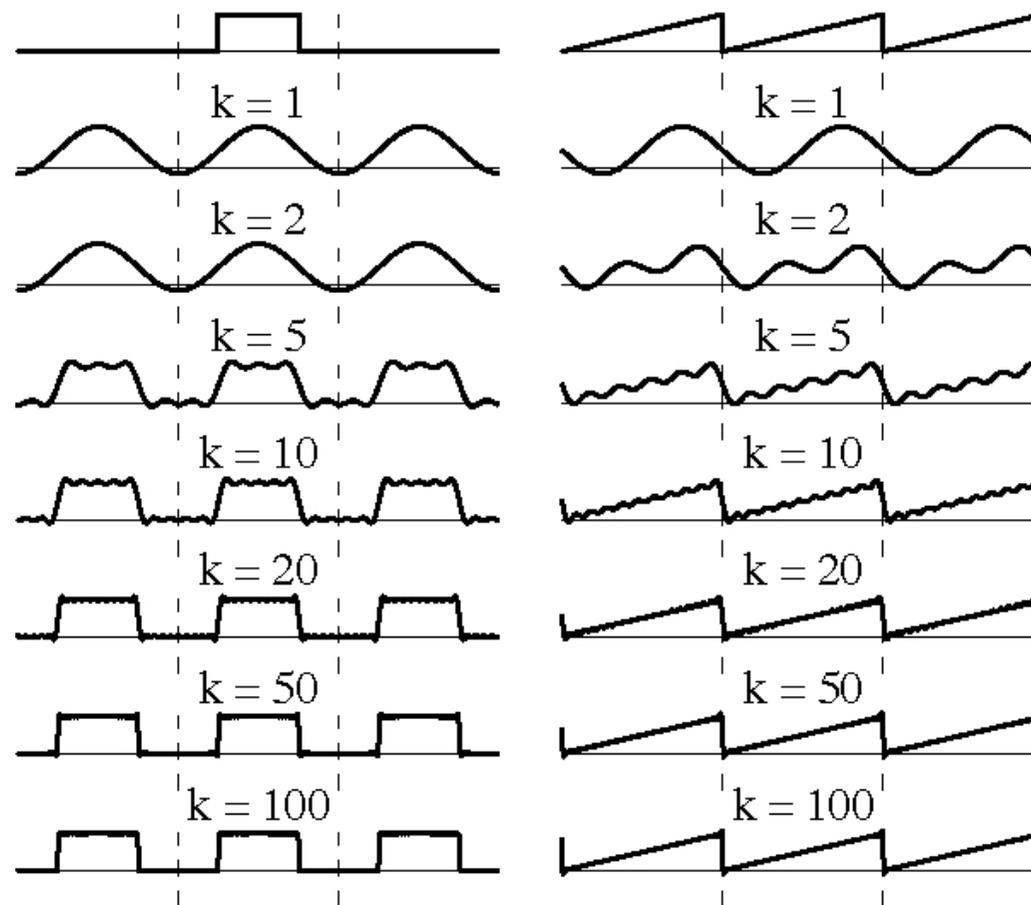


Interpretación del CTFS (I)



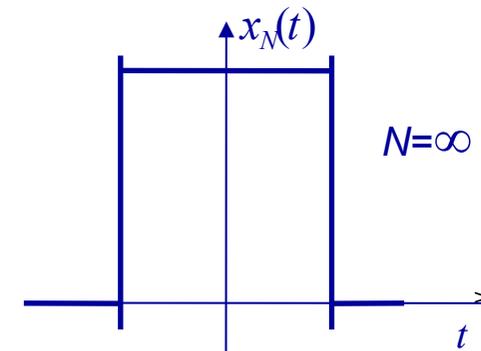
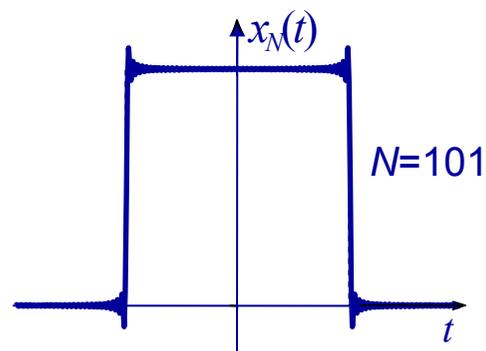
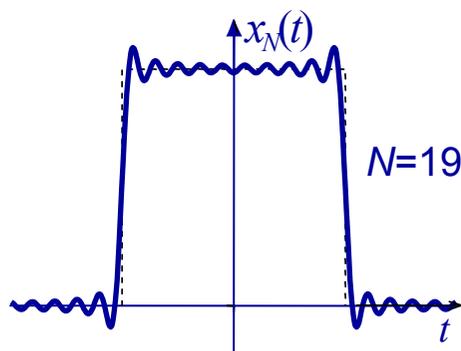
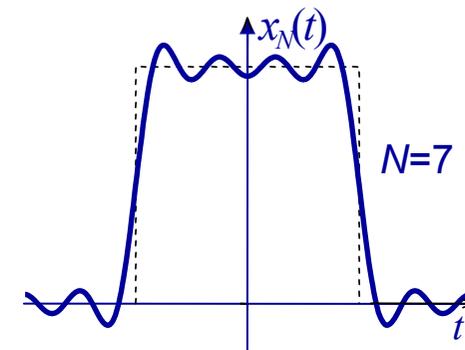
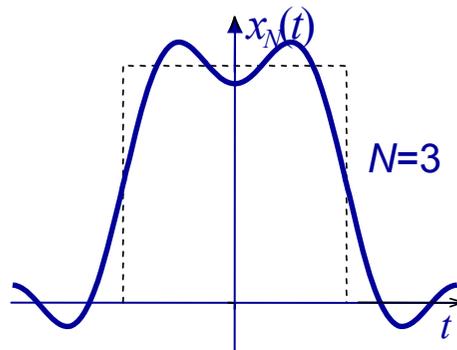
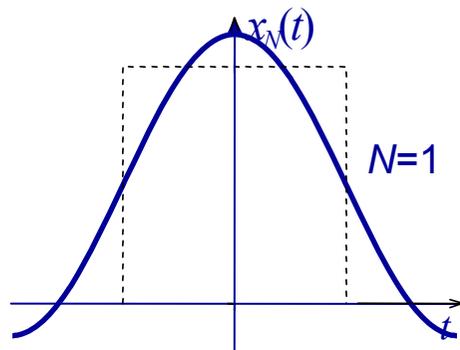
Interpretación del CTFS (II)

- Cualquier función periódica puede ser representada por la suma de senos y cosenos de diferentes amplitudes y frecuencias



CTFS. Fenómeno de Gibbs

- Fenómeno de Gibbs



4. Transformada de Fourier (CTFT) de señales no periódicas.

- Dada una señal $x(t)$ se define su transformada de Fourier como:

$$X(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

- Es una particularización de la TL en el eje $s=j\omega$
- Para que exista, $\mathbf{s=j\omega}$ tiene que estar **dentro de la ROC_x**

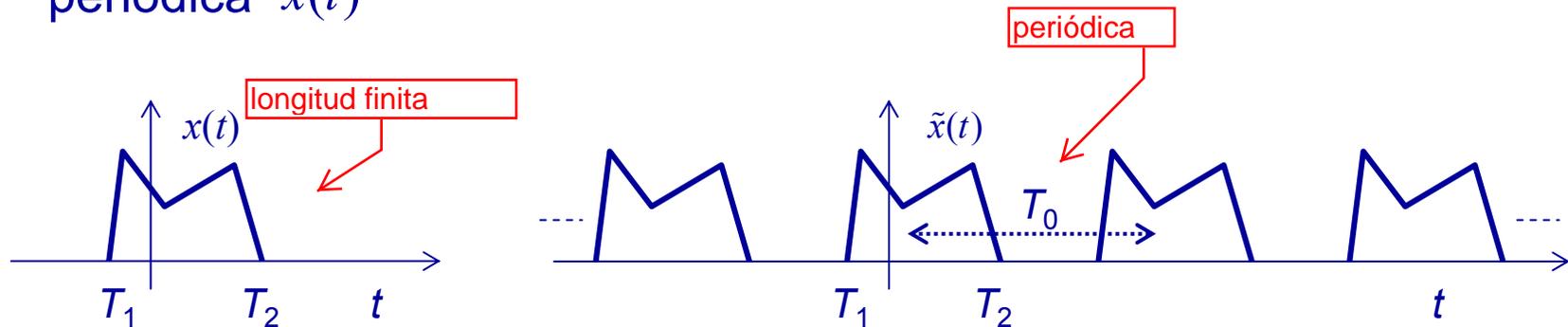
$$X(\omega) = TL \{x(t)\} \Big|_{s=j\omega}$$

- La CTFT de la señal $x(t)$ existirá siempre que se cumplan unas condiciones similares a las de existencia de la CTFS:
 - $x(t)$ debe ser absolutamente integrable
 - $x(t)$ debe tener un n° finito de oscilaciones en cualquier intervalo finito
 - $x(t)$ debe tener un n° finito de discontinuidades en cualquier intervalo finito



Relación de la CTFT con los coeficientes del CTFS (I)

- Dada una **señal de duración finita $x(t)$** , realizamos una extensión periódica $\tilde{x}(t)$



- Expresamos la señal periódica $\tilde{x}(t)$ mediante su CTFS

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{con}$$

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_T \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad \text{y} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Relación de la CTFT con los coeficientes del CTFS (II)

- En el intervalo $T_1 \leq t \leq T_2$, se cumple $\tilde{x}(t) = x(t)$ de modo que

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

Como

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ X(\omega) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \Rightarrow \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{a_k = \frac{1}{T_0} X(\omega) \Big|_{\omega = k\omega_0}}$$

- Los coeficientes a_k de la extensión periódica son **muestras equiespaciadas de la función $X(\omega)$**



Transformada inversa de Fourier

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_0} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

- Si hacemos $T_0 \rightarrow \infty$, $\omega_0 \rightarrow 0$, \Rightarrow
 - ❖ la suma tiende a una integral
 - ❖ $\omega_0 \rightarrow d\omega$, $k\omega_0 \rightarrow \omega$,
 - ❖ y la extensión periódica tiende a la señal original:

$$\tilde{x}(t) = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

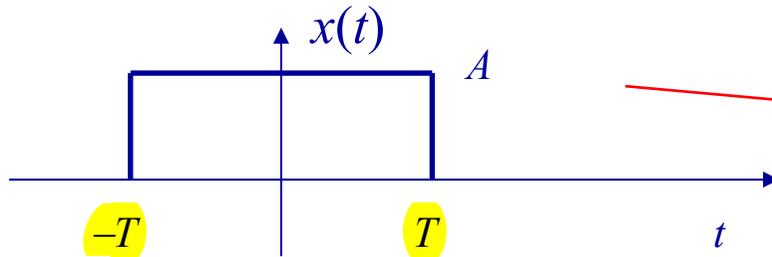
Ec. de síntesis, CTFT⁻¹

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Ec. de análisis, CTFT



Ejemplo



$$x(t) = \begin{cases} A, & \text{si } |t| < T \\ 0, & \text{si } |t| > T \end{cases}$$

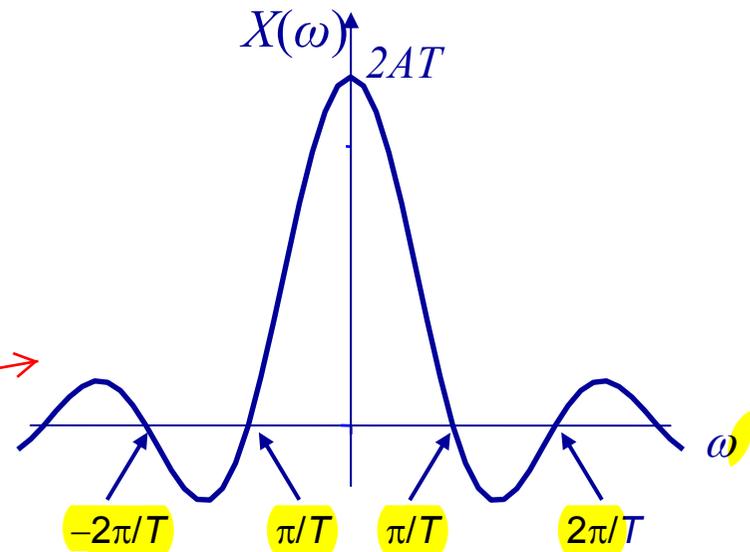
cuidado T
no es un
periodo!

Si realizamos una extensión periódica de periodo T_0 , los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la extensión periódica son los calculados anteriormente para una onda cuadrada:

$$a_k = A \frac{\text{sen}(k\omega_0 T)}{k\pi} = 2A \frac{\text{sen}(k\omega_0 T)}{k\omega_0 T_0}$$

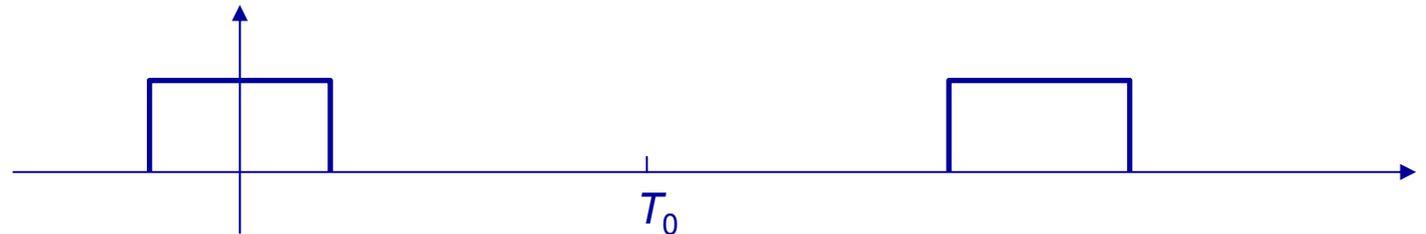
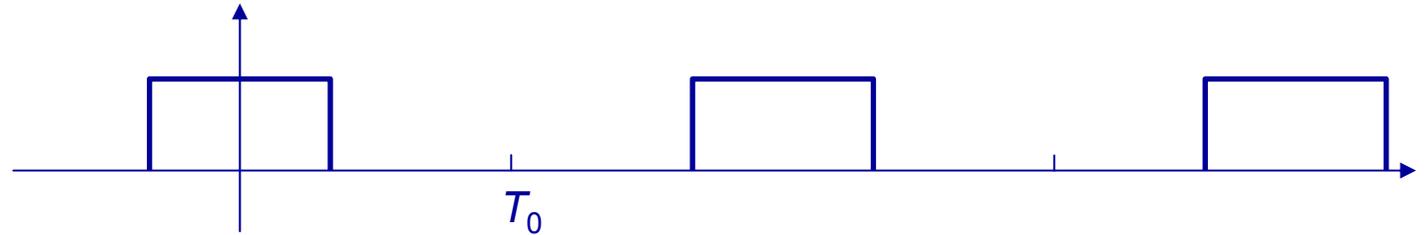
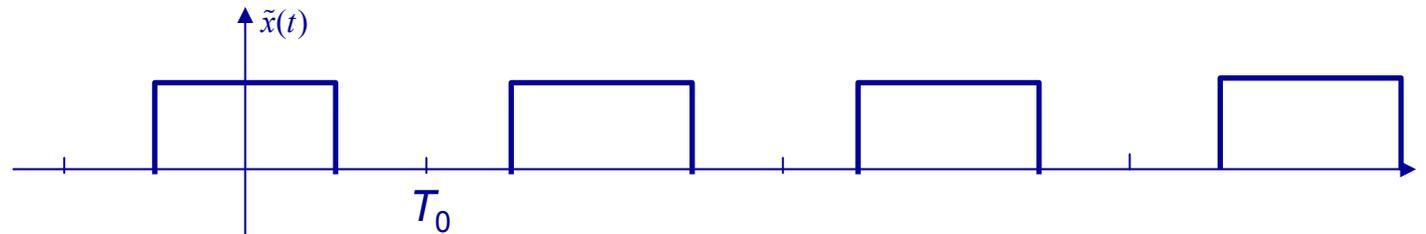
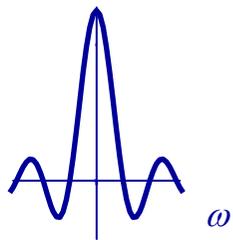
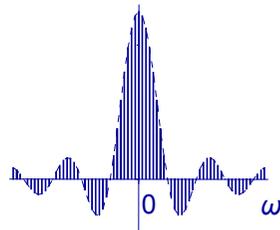
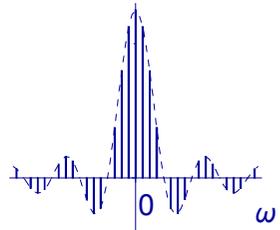
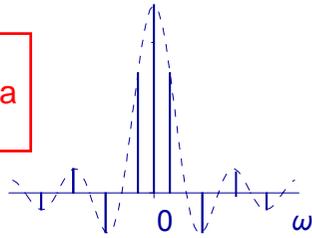
$$a_k = \frac{A}{T_0} X(\omega) \Big|_{\omega = k\omega_0} \Rightarrow$$

$$X(\omega) = 2A \frac{\text{sen}(\omega T)}{\omega}$$



Interpretación gráfica de la relación CTFS-CTFT

continuación de otra transparencia anterior...



Frecuencias negativas

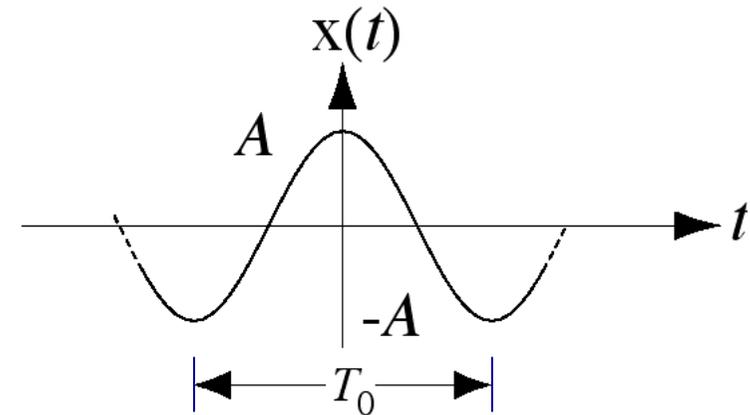
Una senoide puede describirse matemáticamente de varias formas:

$$x(t) = A \cos\left(\frac{2\pi t}{T_0}\right) = A \cos(\omega_0 t)$$

$$x(t) = A \cos(-\omega_0 t)$$

$$x(t) = A \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

$$x(t) = A_1 \cos(\omega_0 t) + A_2 \cos(-\omega_0 t) \quad , \quad A_1 + A_2 = A$$



Y se puede representar de otras formas distintas ...

Así pues, podríamos considerar que la frecuencia sea positiva o negativa.

Desde el punto de vista del análisis de señal, no importa



Propiedades de la CTFT (I)

Señal	Transformada
$x(t)$	$X(\omega)$
$ax(t)+by(t)$	$aX(\omega)+bY(\omega)$
$x(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(\omega)$
$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
$x(-t)$	$X(-\omega)$
$x(at)$	$\frac{1}{ a } X(\omega/a)$
$x(t) * y(t)$	$X(\omega)Y(\omega)$
$x(t)y(t)$	$X(\omega) * Y(\omega) \frac{1}{2\pi}$
$dx(t)/dt$	$j\omega X(\omega)$

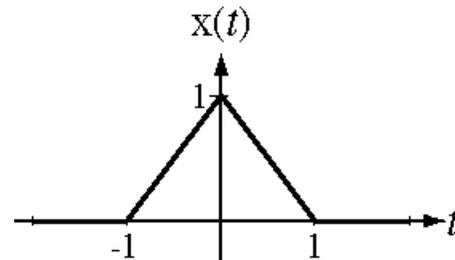


Propiedades de la CTFT (I)

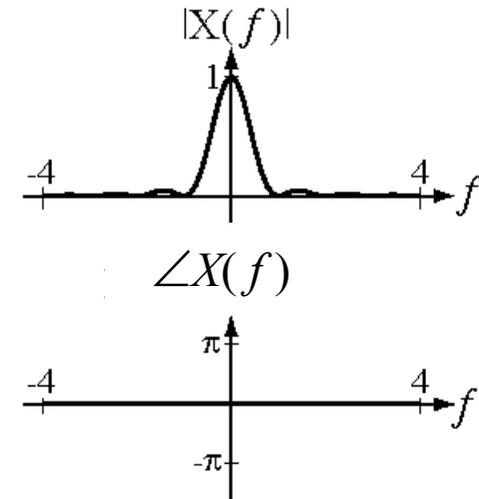
Señal	Transformada
$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$
$tx(t)$	$j dX(\omega)/d\omega$
$x(t)$ real	$\left\{ \begin{array}{l} X(\omega) = X^*(-\omega) \\ \operatorname{Re}\{X(\omega)\} = \operatorname{Re}\{X(-\omega)\} \\ \operatorname{Im}\{X(\omega)\} = -\operatorname{Im}\{X(-\omega)\} \\ X(\omega) = X(-\omega) \\ \angle X(\omega) = -\angle X(-\omega) \end{array} \right.$
Relación de Parseval para señales no periódicas	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) ^2 d\omega$
Dualidad:	$\left\{ \begin{array}{l} g(t) \xrightarrow{TF} f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt \\ f(t) \xrightarrow{TF} 2\pi g(-\omega) \end{array} \right.$



Desplazamiento en t



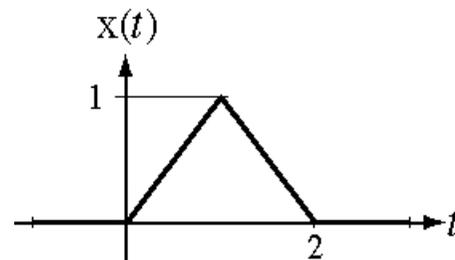
\mathcal{F}



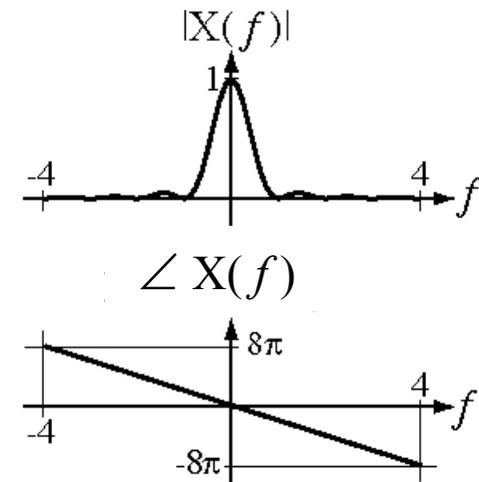
Desplazamiento en el tiempo

$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{TF} X(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

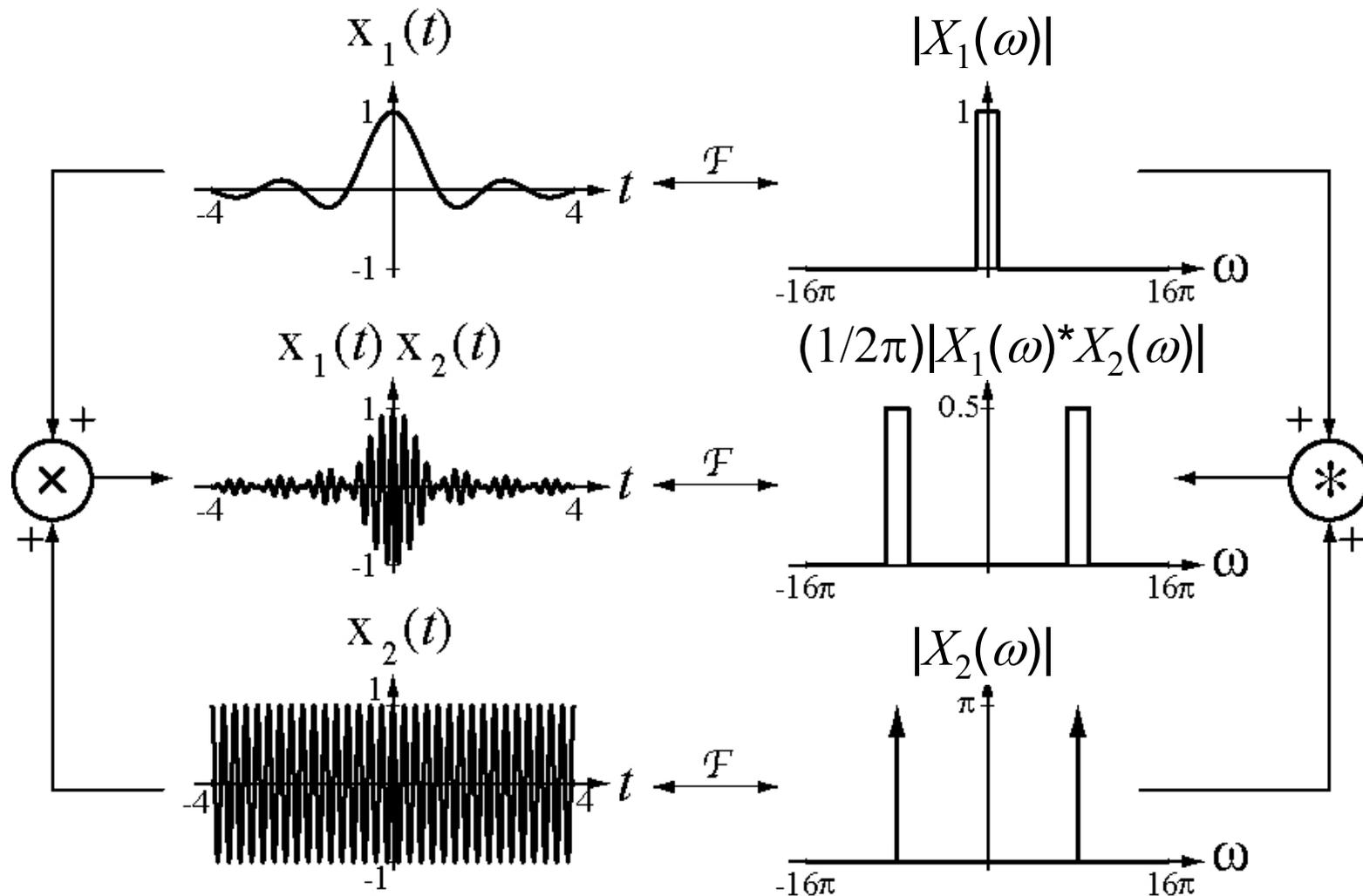
$$x(t-t_0) \xleftrightarrow{TF} X(\omega) e^{-j\omega t_0}$$



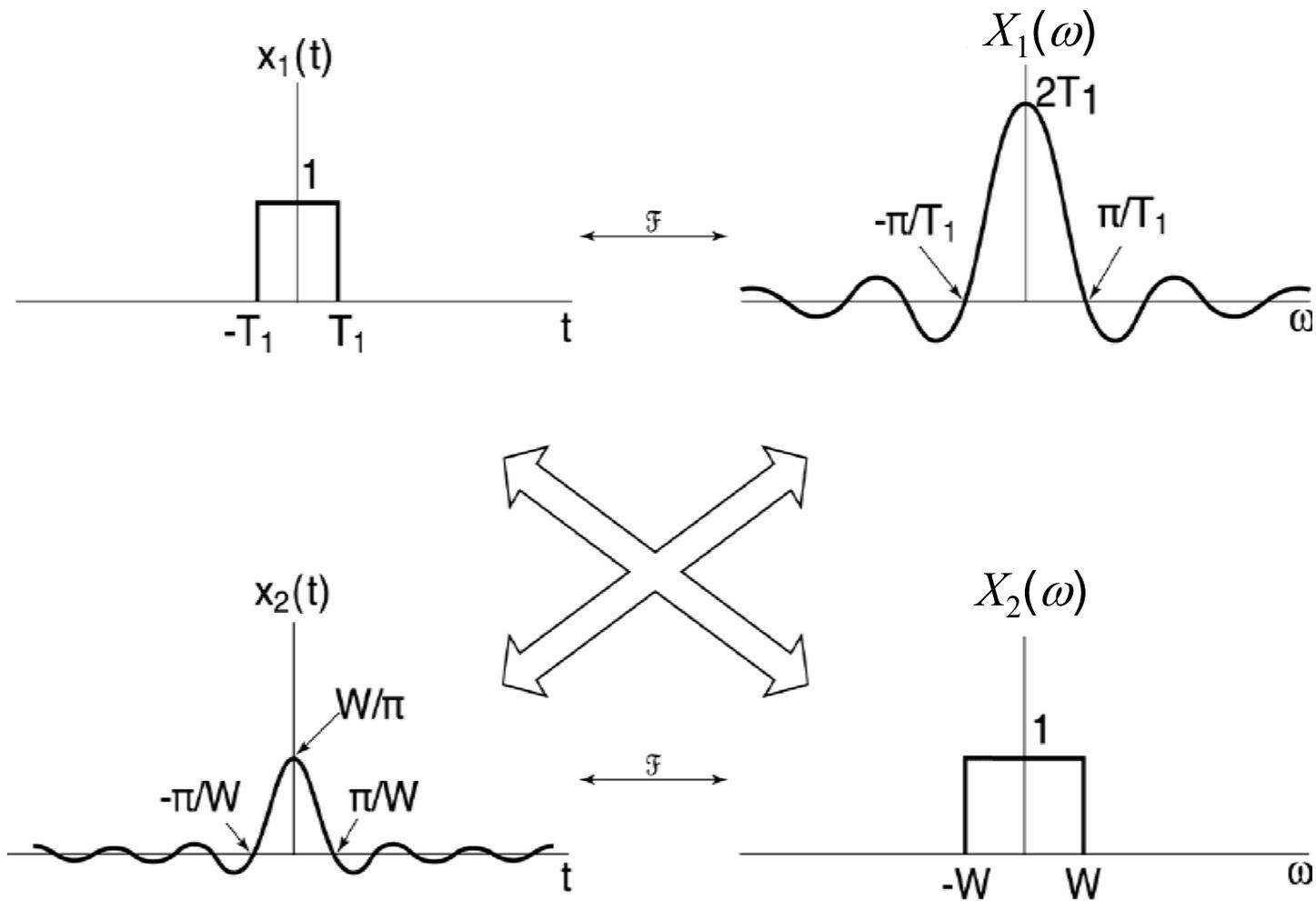
\mathcal{F}



Modulación



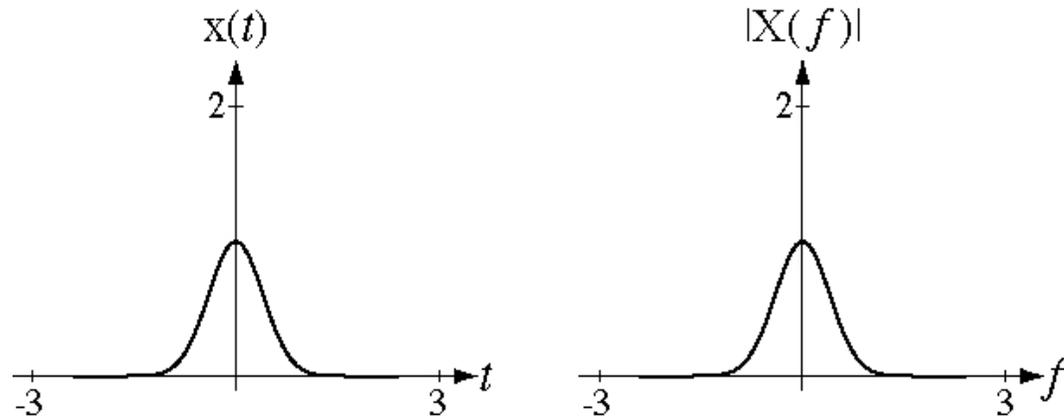
Dualidad



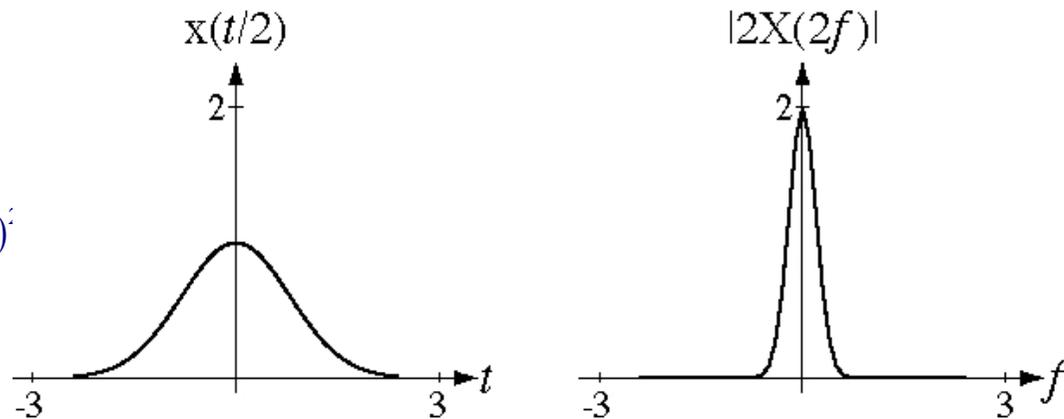
El principio de "incertidumbre"

- Las propiedades de escalado en el tiempo y en frecuencia nos indican que **si una señal se expande en uno cualquiera de los dominios, t o ω (f), inevitablemente se comprime en el dominio complementario.**

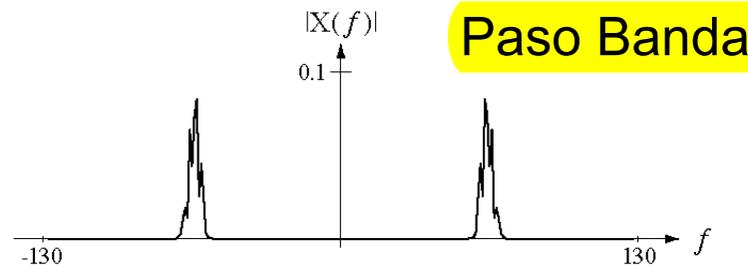
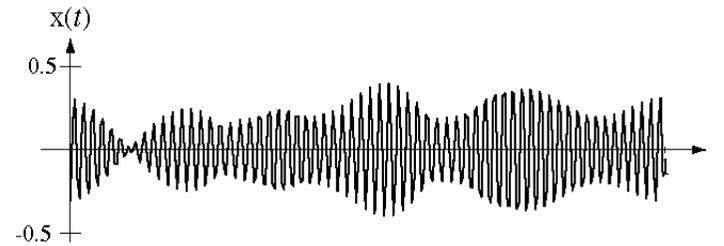
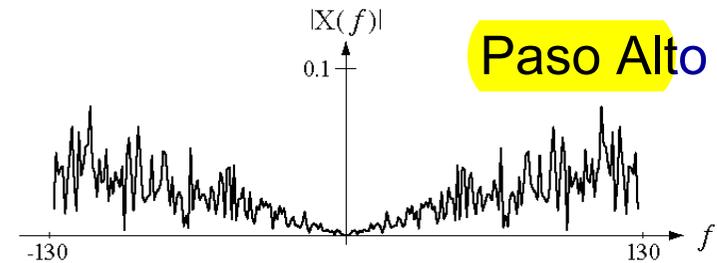
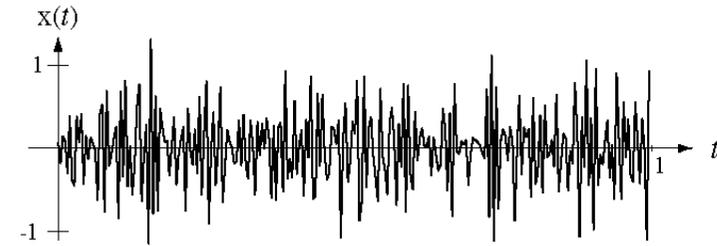
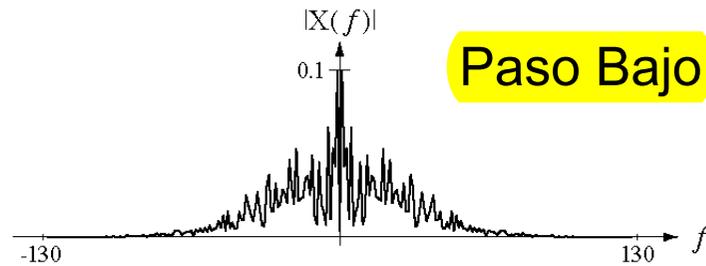
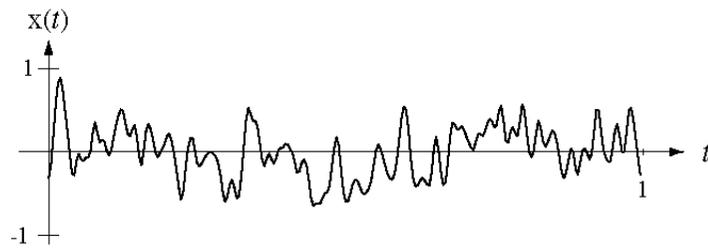
$$e^{-\pi t^2} \xleftrightarrow{\text{TF}} e^{-\pi f^2}$$



$$e^{-\pi \left(\frac{t}{2}\right)^2} \xleftrightarrow{\text{TF}} 2e^{-\pi (2f)^2}$$



Contenido en frecuencia



5. Transformada de Fourier para señales periódicas (I)

TRANSFORMADA DE FOURIER GENERALIZADA!!!!

- Calculamos la transformada de un impulso y de una exponencial:

$$TF \{ \delta(t) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^0 dt = 1$$

$$\text{Como } \delta(t) \xleftrightarrow{TF} 1 \Rightarrow$$

cuidado, con la dualidad aqui

$$\text{Por desplazamiento } \delta(t - t_0) \xleftrightarrow{TF} e^{-j\omega t_0} \Rightarrow$$

$$\text{Por dualidad } e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{TF} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

cuidado, es poco mas delicado

- Como cualquier señal periódica la podemos desarrollar en serie de Fourier

$$\text{Por linealidad } x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{TF} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

Donde $\omega_0 = 2\pi/T_0$, siendo T_0 el periodo fundamental de $x(t)$

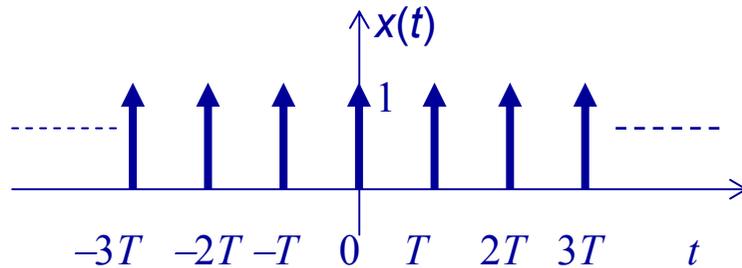
TRANSFORMADA DE FOURIER GENERALIZADA!!!!

TRANSFORMADA DE FOURIER GENERALIZADA!!!!



CTFT para señales periódicas (II)

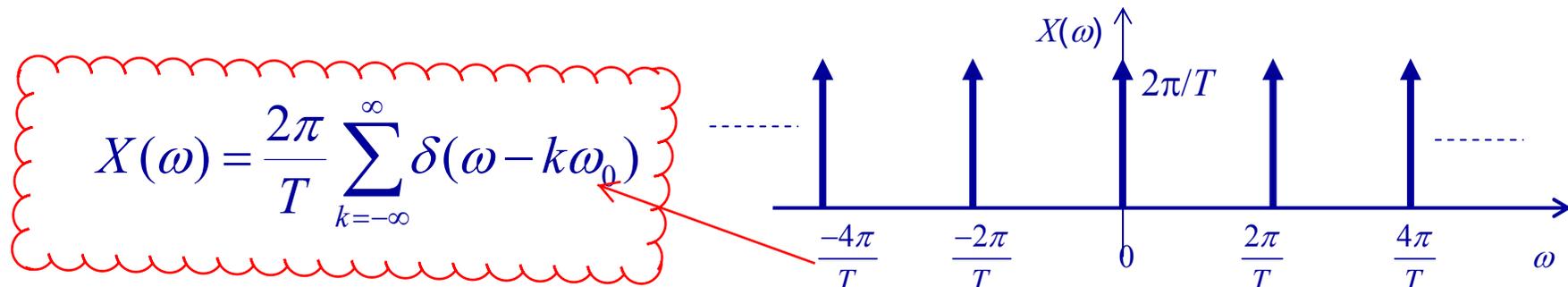
- Para su demostración partimos de un tren de impulsos:



$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

- La CTFS del tren de impulsos tiene como coeficientes:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) dt = \frac{1}{T} \Rightarrow$$



$$X(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$

Pares transformados (señales no periódicas)

TRANSFORMADA DE FOURIER GENERALIZADA!!!!

TRANSFORMADA DE FOURIER GENERALIZADA!!!!

Señal	Transformada
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
$e^{-at} u(t); \operatorname{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$
$t e^{-at} u(t); \operatorname{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t); \operatorname{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$
$x(t) = \begin{cases} 1, & t \leq T_1 \\ 0, & t > T_1 \end{cases}$	$\frac{2 \operatorname{sen}(\omega T_1)}{\omega}$
$\frac{\operatorname{sen} Wt}{\pi t}$	$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega < W \\ 0, & \omega > W \end{cases}$



Pares transformados (señales periódicas)

Señal

Transformada

TRANSFORMADA DE FOURIER GENERALIZADA!!!!

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

TRANSFORMADA DE FOURIER GENERALIZADA!!!!

$$e^{jk\omega_0 t}$$

$$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$

TRANSFORMADAS DE FOURIER GENERALIZADAS !!!!

$$\cos(\omega_0 t)$$

$$\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$\text{sen}(\omega_0 t)$$

$$\frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$

TRANSFORMADAS DE FOURIER GENERALIZADAS !!!!

$$x(t) = 1$$

$$2\pi \delta(\omega)$$

TRANSFORMADAS DE FOURIER GENERALIZADAS !!!!

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

$$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$$

TRANSFORMADAS DE FOURIER GENERALIZADAS !!!!

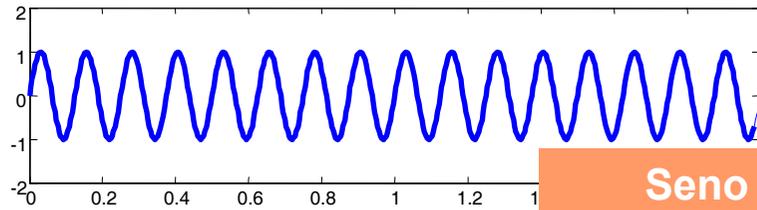
$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| \leq T_0/2 \end{cases}$$

$$x(t + T_0) = x(t)$$

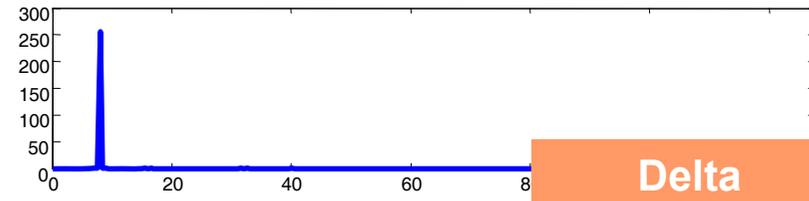
$$\frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T_0}\right)$$



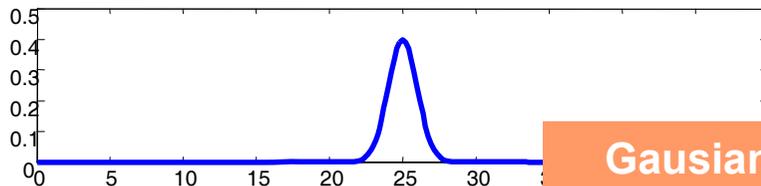
Pares de CTFT de señales típicas



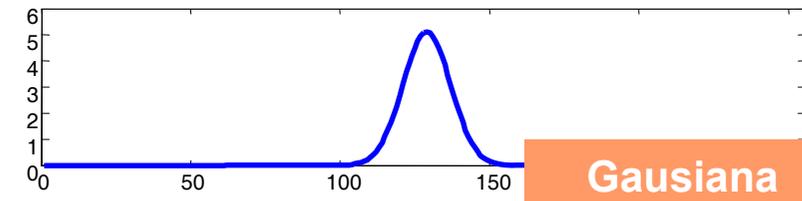
Seno



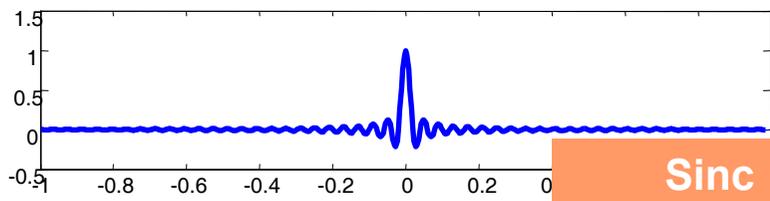
Delta



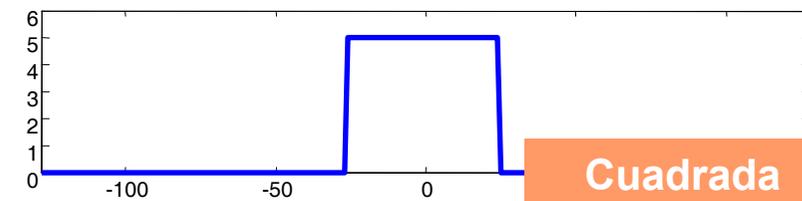
Gausiana



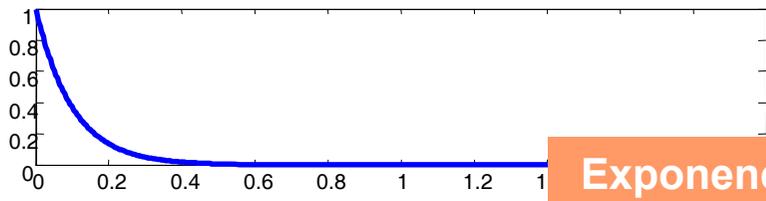
Gausiana



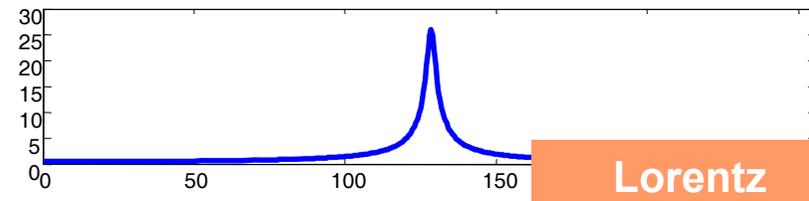
Sinc



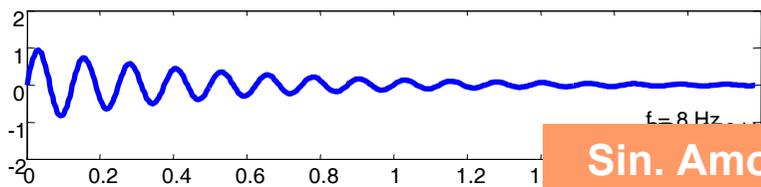
Cuadrada



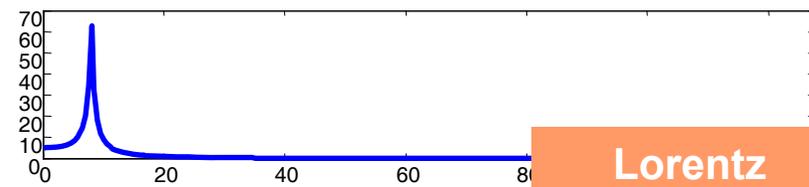
Exponencial



Lorentz



Sin. Amort.
f = 8 Hz



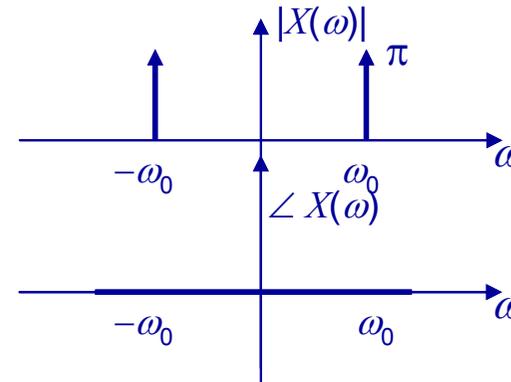
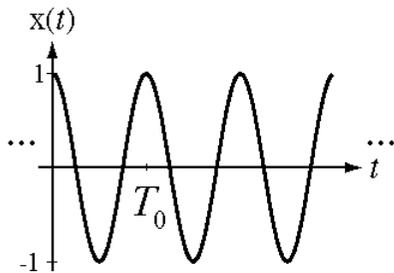
Lorentz



CTFT de las funciones seno y coseno

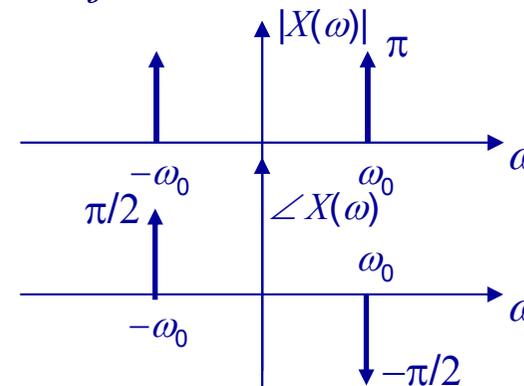
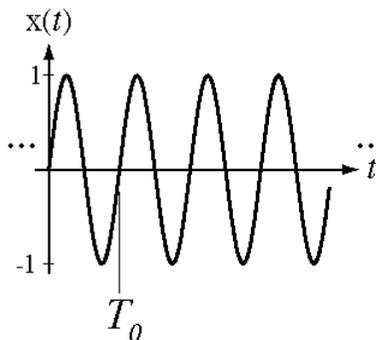
TRANSFORMADA
DE FOURIER
GENERALIZADA !!!!

$$x(t) = \cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t}}{2} + \frac{e^{-j\omega_0 t}}{2} \xleftrightarrow{\text{TF}} X(\omega) = \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$



$$x(t) = \text{sen}(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t}}{2j} - \frac{e^{-j\omega_0 t}}{2j} \xleftrightarrow{\text{TF}} X(\omega) = \frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

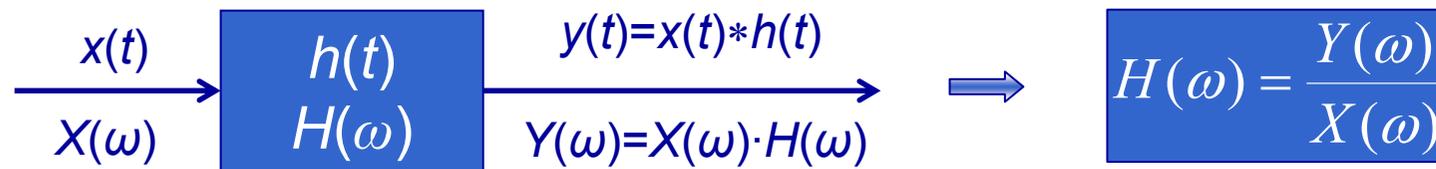
TRANSFORMADA
DE FOURIER
GENERALIZADA !!!!



6. Respuesta en frecuencia de sistemas de tiempo continuo (I)

- Dado un sistema LTI con respuesta al impulso $h(t)$, se define la **respuesta en frecuencia** del sistema $H(\omega)$ como:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$



- La respuesta en frecuencia representa el conjunto de autovalores del sistema para las autofunciones del tipo: $x(t) = e^{-j\omega_0 t}$

$$x(t) = e^{-j\omega_0 t} \Rightarrow y(t) = H(\omega_0) e^{-j\omega_0 t}$$



Respuesta en frecuencia de sistemas de tiempo continuo (II)

- Dado que $H(\omega)$ es una función compleja de variable real, es necesario conocer su módulo y su fase.
- El módulo y la fase de la respuesta en frecuencia serán:

$$|H(\omega)| = \frac{|Y(\omega)|}{|X(\omega)|} \quad \text{y} \quad \angle H(\omega) = \angle Y(\omega) - \angle X(\omega)$$

- El módulo o amplitud de la respuesta en frecuencia (o **respuesta en amplitud**) representa la ganancia del sistema a cada pulsación ω o componente espectral
- La fase de la respuesta en frecuencia (o **respuesta en fase**) representa el desfase introducido por el sistema a cada pulsación ω o componente espectral
- La respuesta en frecuencia de un sistema LTI existirá si y sólo si el sistema es **estable**.



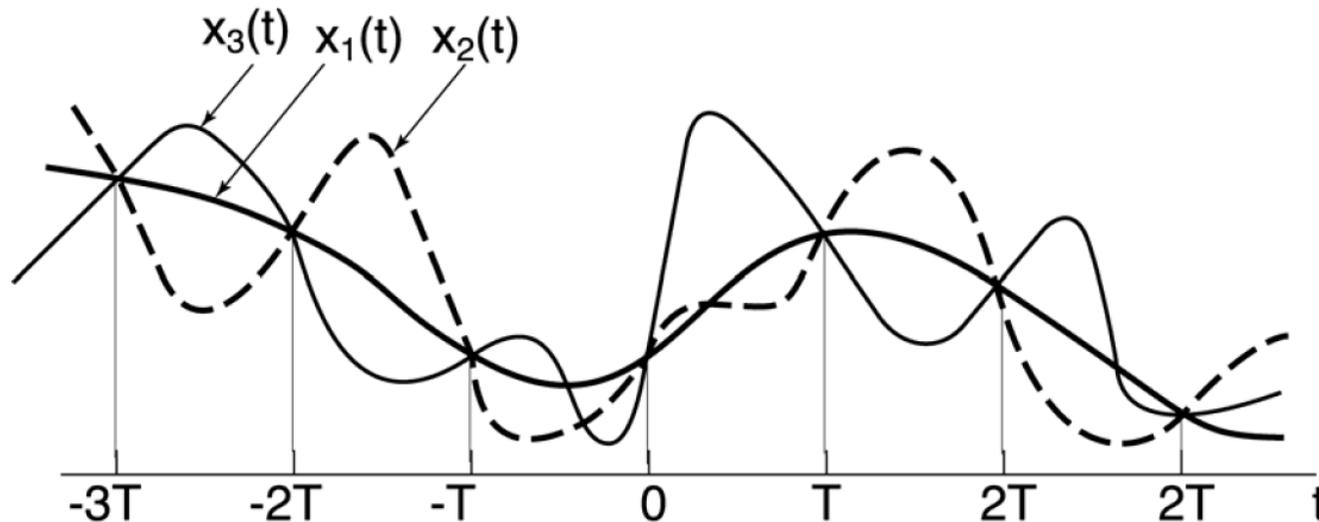
7. Muestreo ideal

- Dada una señal $x(t)$, ¿existe una señal $x[n]$ compuesta por una secuencia de números tal que a partir de ella podamos recuperar $x(t)$?
- ¿Es suficiente la información de una serie de muestras para recomponer la señal $x(t)$?
- ¿Cuál es el nº mínimo de muestras necesarias para reconstruir la señal?
- ¿De qué dependerá el número mínimo de muestras necesarias?
- En general, no podemos esperar que una secuencia de números identifique a una señal concreta sin añadir ninguna condición adicional
- Hay un número infinito de señales que se pueden generar a partir de una secuencia



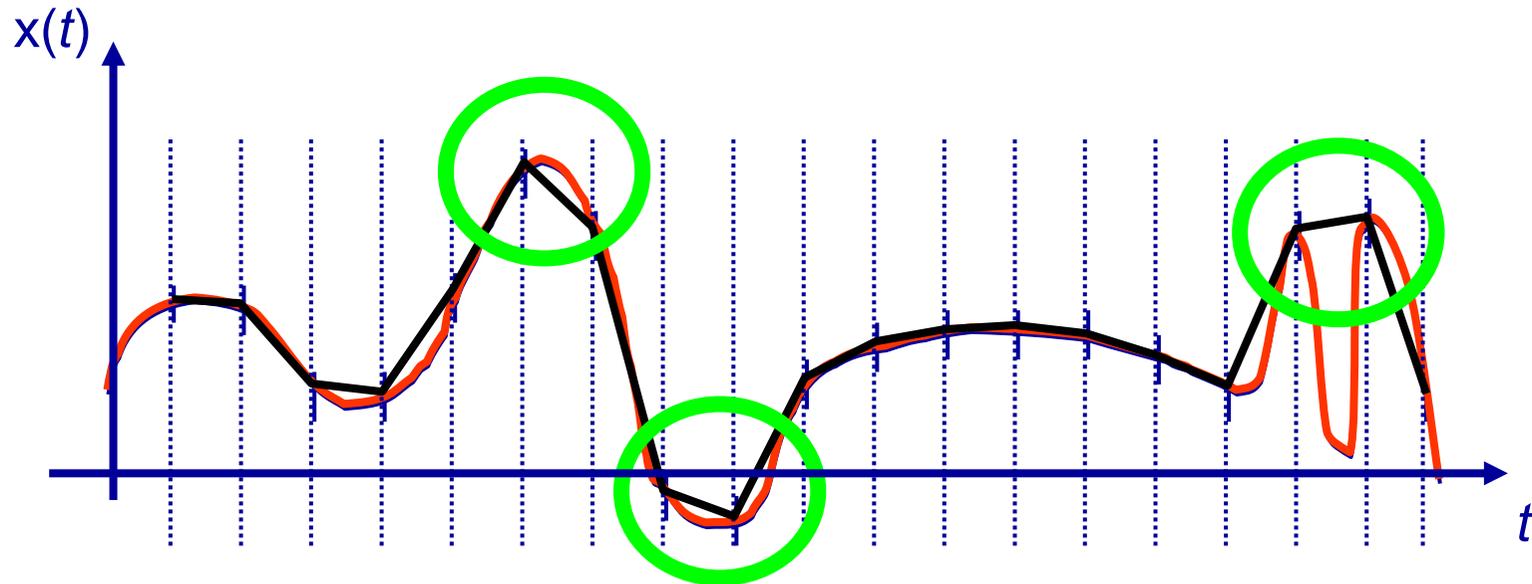
Condiciones de muestreo

- Muchas señales tienen las mismas muestras



- Las técnicas de muestreo pierden la información existente entre las muestras si no se cumplen unas condiciones:
 - ❖ **Señal de banda limitada**
 - ❖ Muestras tomadas “**suficientemente cercanas**” en relación a la máxima frecuencia de la señal

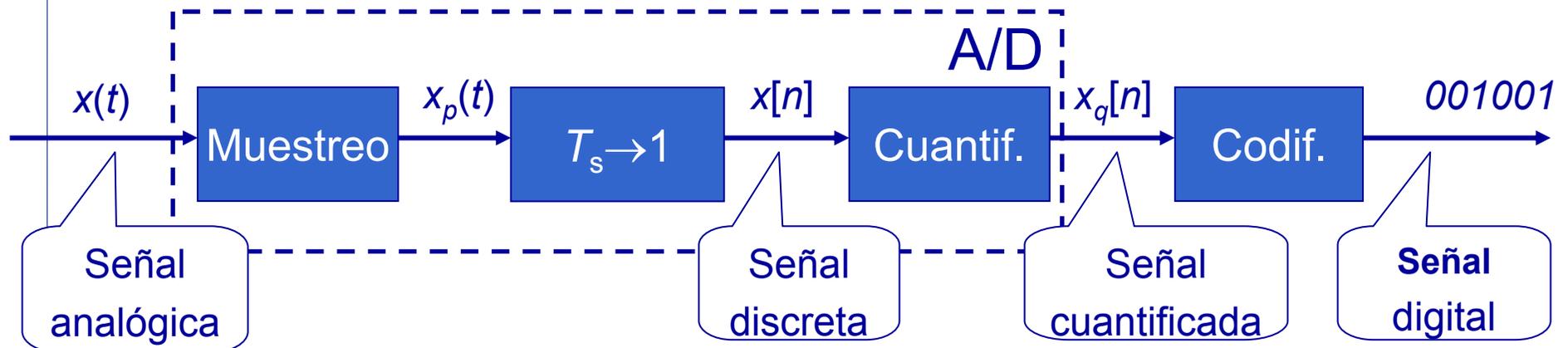
Ejemplo sencillo de muestreo



- ¿Que notamos?
 - ❖ No es suave
 - ❖ !Se pierde información!
- ¿Que podemos hacer?
 - ❖ Reconstrucción de mayor orden
 - ❖ Usar más muestras
 - ❖ *¿Cuántas muestras más?*

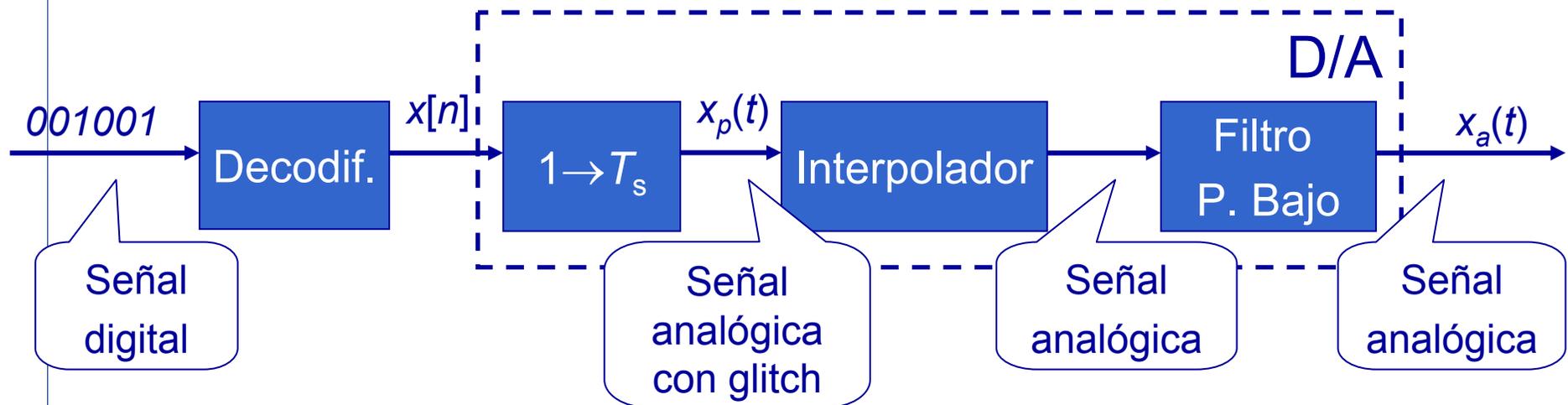
Conversión A/D (I)

- ❑ MUESTREO → Discretización en el tiempo.
 - ❖ Toma de muestras de la señal analógica en instantes determinados de tiempo.
- ❑ CUANTIFICACIÓN → Discretización de amplitud.
 - ❖ Asignación de los valores de las muestras de la señal analógica a valores discretos, predefinidos, de un conjunto finito de valores.
- ❑ CODIFICACIÓN → Representación de los valores cuantificados.
 - ❖ Asignación de un código de N bits a cada uno de los valores de la señal discreta



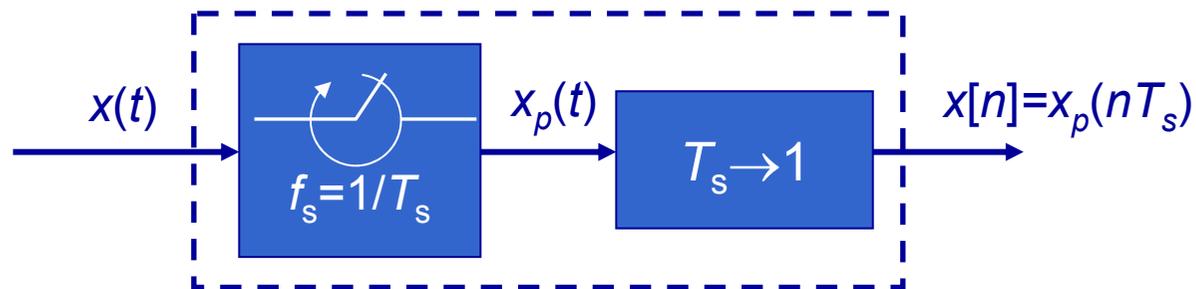
Conversión D/A (I)

- ❑ DECODIFICACIÓN → Conversión de códigos digitales a una secuencia discreta.
 - ❖ Asignación de un valor numérico a cada una de las palabras digitales de N bits
- ❑ INTERPOLADOR → Conversión de una secuencia de impulsos equiespaciados T_s a una señal definida $\forall t$
 - ❖ Se convoluciona cada impulso con una función base
- ❑ FILTRO PASO BAJO → Limita el espectro para igualarlo al de la señal original



Muestreo periódico

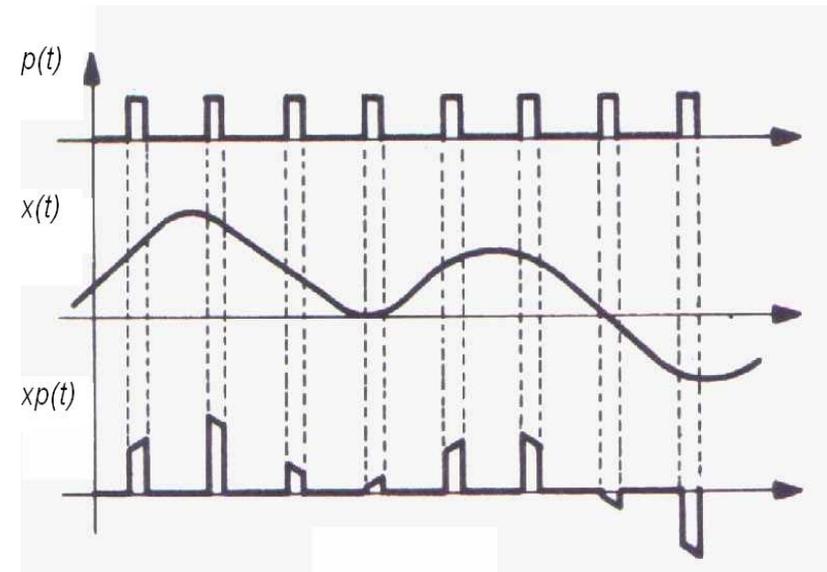
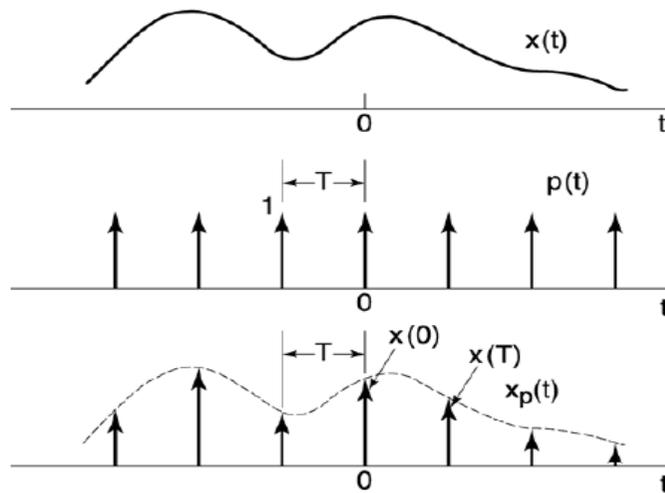
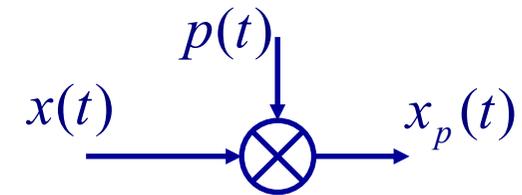
- Un método típico de obtener una señal discreta a partir de una continua es realizar un muestreo de la señal continua en el tiempo y asignar: $x[n]=x(nT_s)$



- Desde el punto de vista matemático, muestrear equivale a multiplicar la señal continua por una señal moduladora $p(t)$

¿Cómo muestreamos?

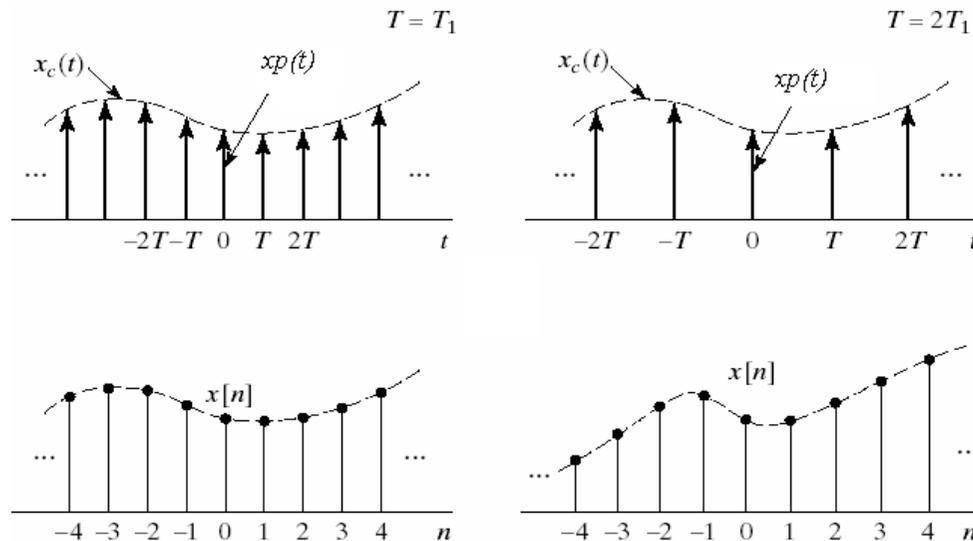
- ❖ $x(t)$ señal a modular o muestrear
- ❖ $p(t)$ señal moduladora o muestreadora
- ❖ $x_p(t)$ señal modulada o muestreada



- $p(t)$ “idealmente” será un tren de deltas. En la práctica un tren de pulsos

Relación entre señales continuas y discretas

Nota: no vamos a realizar una conversión analógica/ digital (A/D) completa en sentido estricto, ya que no se cuantificarán los valores de $x[n]$



- $x_p(t)$ es una señal en el tiempo continuo
- Se puede generar una secuencia de números $x[n]$ a partir de $x_p(t)$
- Para poder recuperar $x_p(t)$ a partir de $x[n]$ necesitamos conocer la **frecuencia de muestreo**

Dada una secuencia de números podemos recomponer $x_p(t)$ si conocemos la frecuencia de muestreo y la señal tiene determinadas características (teorema de Nyquist)



Teorema de muestreo (teorema de Nyquist)

- **El teorema de muestreo** determina cuanta información se requiere cuando se muestrea una señal y se quiere que esté representada por sus muestras.
- *“Una señal de **banda limitada**, puede reconstruirse a partir de un conjunto de muestras equiespaciadas si la **frecuencia** (o pulsación) **de muestreo es igual o superior a dos veces la frecuencia** (o pulsación) **máxima de la señal**”*

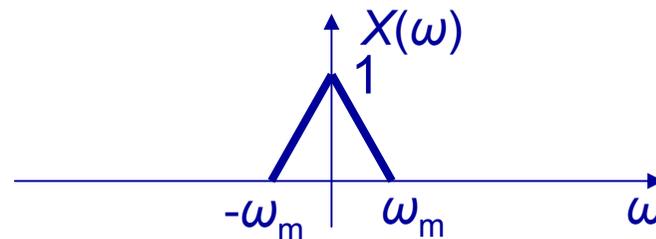
$$\omega_s \geq 2 \cdot \omega_m$$

Siendo $\omega_s = 2\pi/T_s$

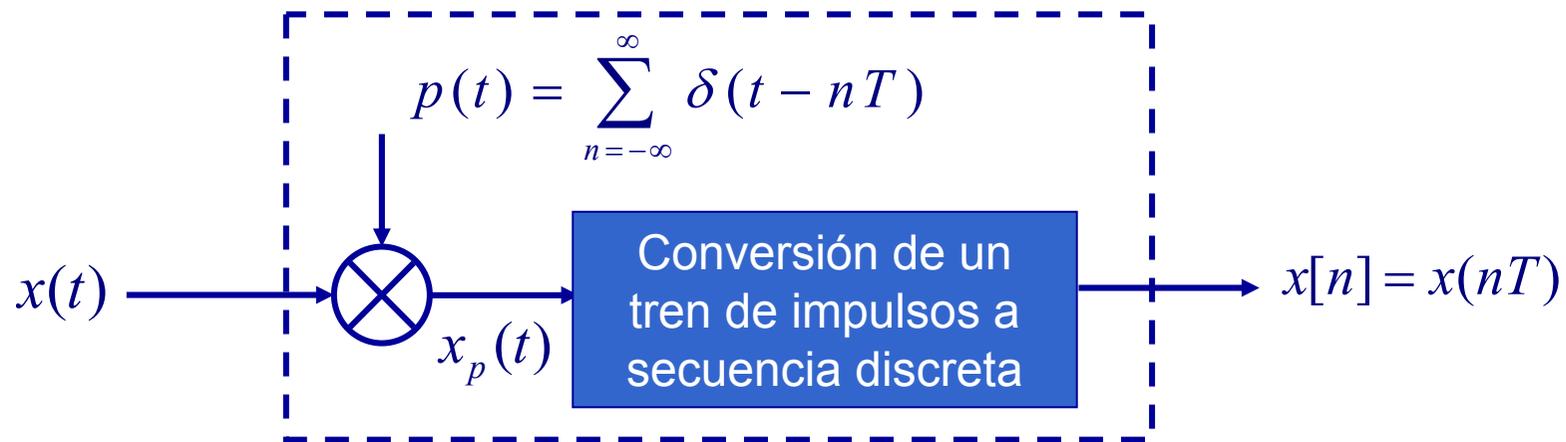


Teorema de muestreo. Comprobación (I)

- Suponiendo que $x(t) \leftrightarrow X(\omega)$ es una señal de banda limitada en el intervalo de frecuencia $[-\omega_m, \omega_m]$. $X(\omega)=0$, para $|\omega|>\omega_m$



Entonces $x(t)$ se puede reconstruir de forma exacta a partir de un conjunto de muestras equidistantes si se cumple $\omega_s \geq 2 \cdot \omega_m$ (rd/seg), o lo que es lo mismo $T_s \leq 2\pi/\omega_m$ (seg)



Teorema de muestreo. Comprobación (II)

- La operación de muestreo equivale a una modulación con un tren de pulsos

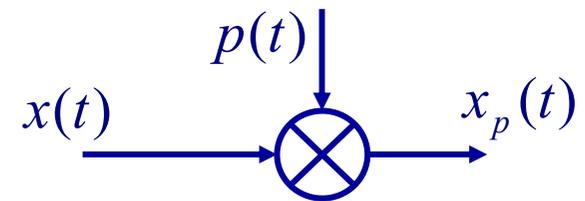
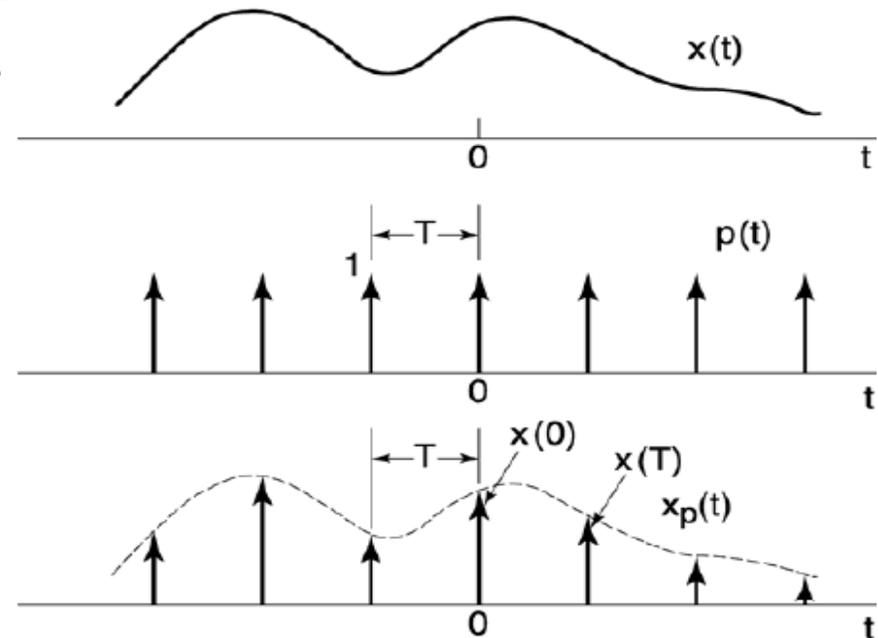
$$x_p(t) = x(t)p(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

$$P(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) , \quad \omega_s = 2\pi / T = \text{pulsación de muestreo}$$

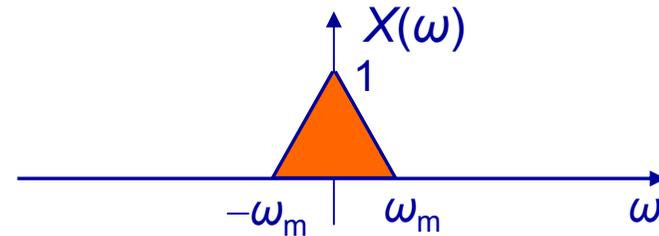
$$X_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * P(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s)$$

$$X_p(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\omega - k \frac{2\pi}{T}\right)$$

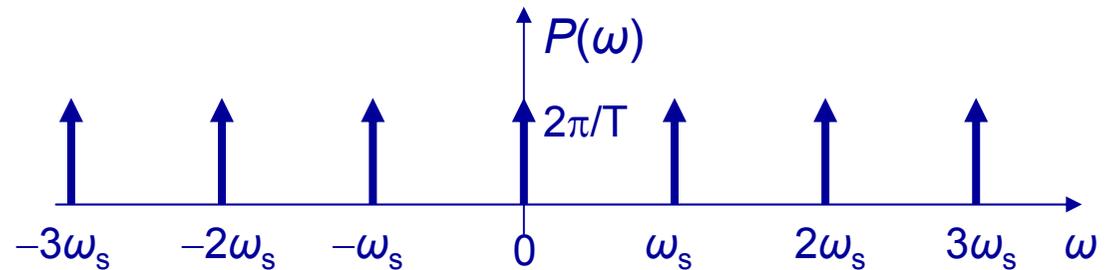


Teorema de muestreo. Comprobación (III)

Espectro de $x(t)$

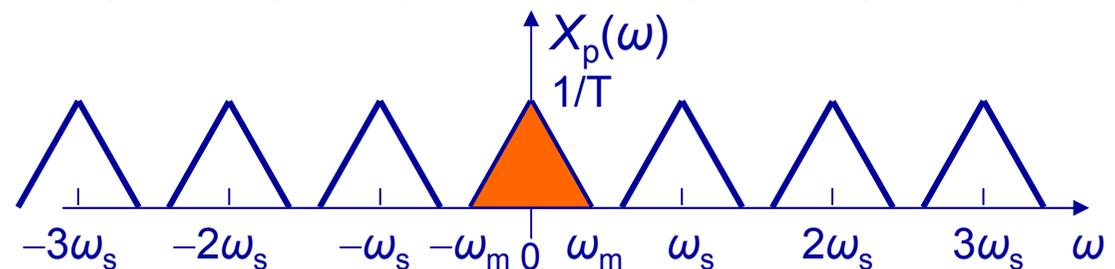


Tren de impulsos en el dominio de la frecuencia



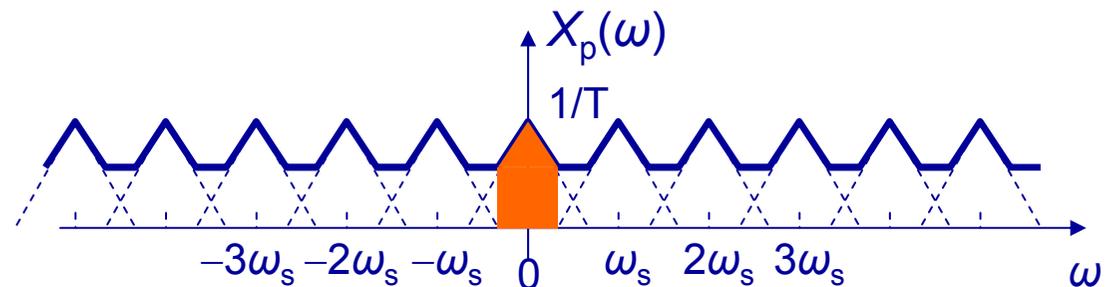
Espectro de la señal muestreada cuando:

$$\omega_s = 2\pi/T > 2\omega_m$$



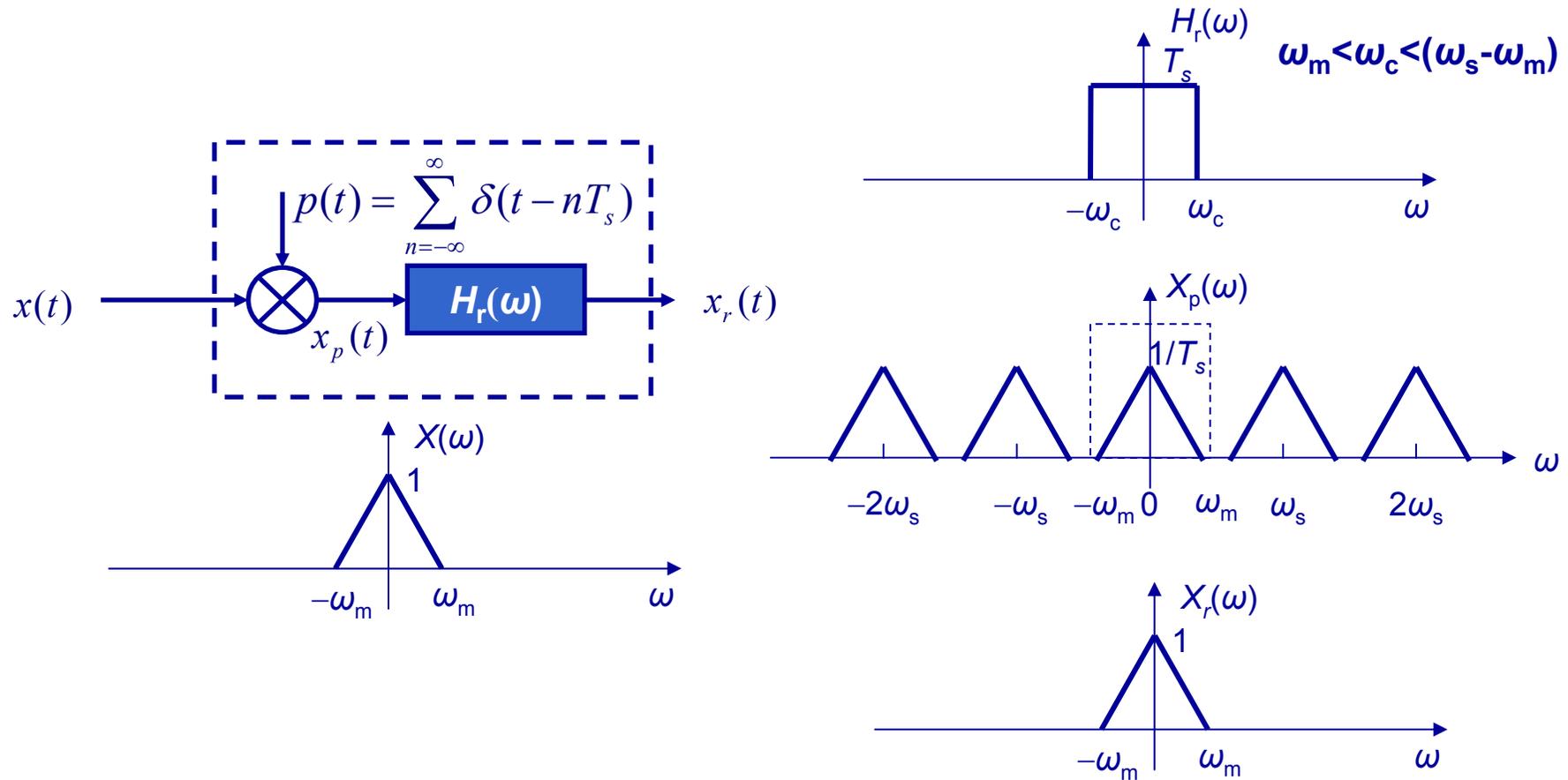
Espectro de la señal muestreada cuando:

$$\omega_s = 2\pi/T < 2\omega_m$$



Reconstrucción muestreo ideal

- Podemos reconstruir la señal original utilizando un **filtro paso bajo**



Reconstrucción muestreo ideal (II)

$$x_p(t) = x(t) \cdot p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT_s] \delta(t - nT_s)$$

$$x(t) = x_p(t) * h_r(t) = \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT_s] \delta(t - nT_s) \right] * h_r(t)$$

$$H_r(\omega) = \begin{cases} T_s & , \quad |\omega| < \omega_c \\ 0 & , \quad |\omega| > \omega_c \end{cases} \longrightarrow h_r(t) = T_s \frac{\text{sen}(\omega_c t)}{\pi t}$$

$$x(t) = x_p(t) * h_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT_s] h_r(t - nT_s)$$

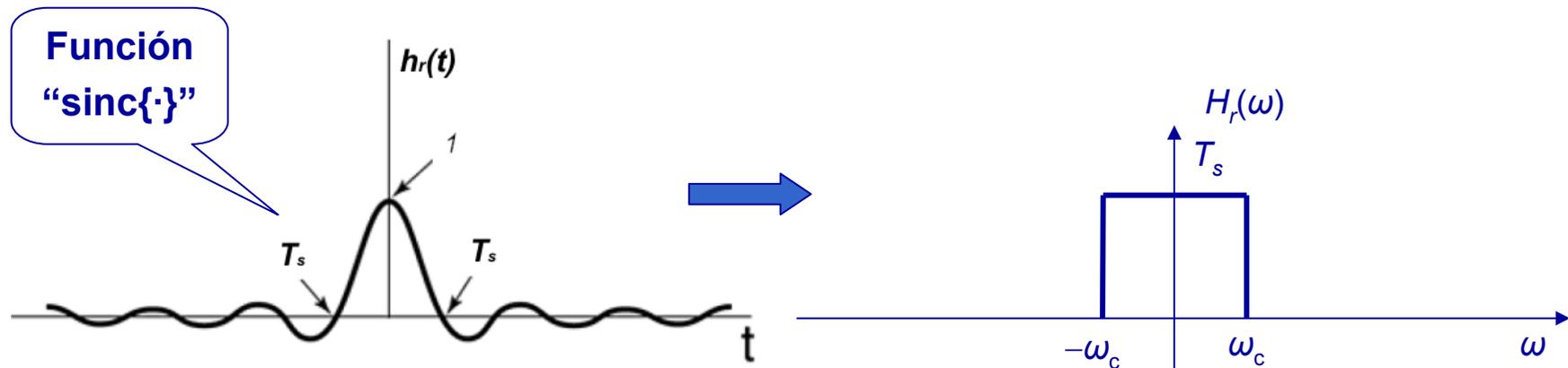
$$x(t) = x_p(t) * h_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT_s] \cdot T_s \cdot \frac{\text{sen}(\omega_c (t - nT_s))}{\pi \cdot (t - nT_s)}$$

Núcleo de interpolación



Reconstrucción de una señal con muestreo ideal (III)

$$H_r(\omega) = \begin{cases} T_s & , \quad |\omega| < \omega_c \\ 0 & , \quad |\omega| > \omega_c \end{cases} \longrightarrow h_r(t) = T_s \frac{\text{sen}(\omega_c t)}{\pi \cdot t}$$



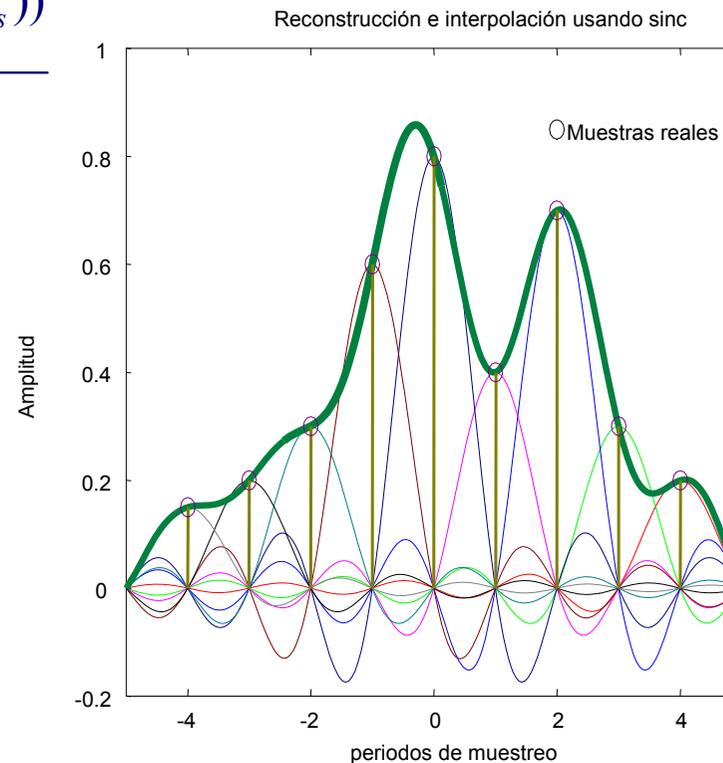
- ❑ El núcleo de **interpolación** es una función de tipo “sinc{·}” desplazada al instante de muestreo
- ❑ Es la respuesta al impulso de un filtro paso bajo ideal con frecuencia de corte igual a la mitad de la frecuencia de muestreo

Reconstrucción de una señal con muestreo ideal (IV)

- Si se satisface la condición $\omega_s > 2 \cdot \omega_m$, y $\omega_c = \omega_s / 2$ entonces la fórmula de reconstrucción viene dada por:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT_s] \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{T_s}(t - nT_s)\right)}{\frac{\pi}{T_s} \cdot (t - nT_s)}$$

- Reconstrucción de una señal $x(t)$ a partir de sus muestras



El submuestreo

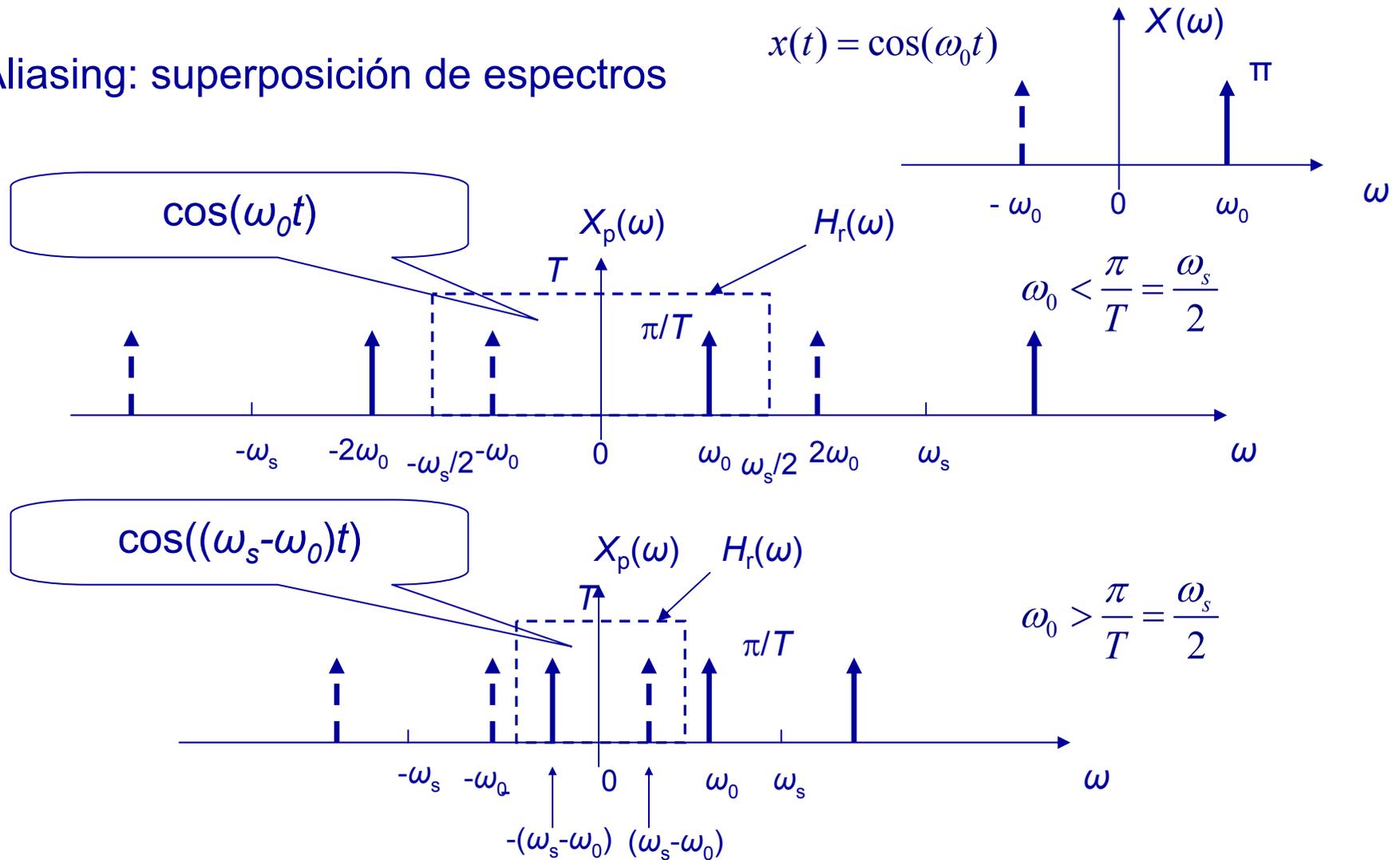
- ❑ Si se produce submuestreo o “aliasing”:
 - ❖ Las frecuencias se solapan sumándose. Este proceso cambia la forma del espectro. No hay proceso que permita discriminar las frecuencias distorsionadas, por lo que el proceso es **irreversible**
 - ❖ La señal original no puede reconstruirse de forma exacta. **Se pierde información** y aparece una serie de información falsa (alias)
 - ❖ Si la señal no está limitada en banda de forma estricta, el muestreo puede hacerse al doble de la banda efectiva.



Aliasing sobre una función coseno

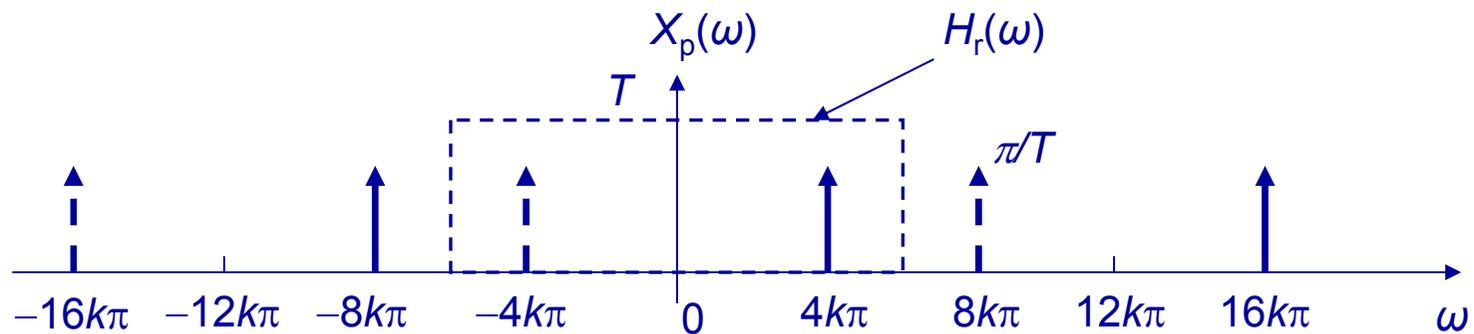
Aliasing: superposición de espectros

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)$$



Ejemplo

Muestreo de una señal continua $x(t)=\cos(4000\pi t)$
con periodo de muestreo $T = 1/6000$
y tasa de muestreo $\omega=2\pi/T$



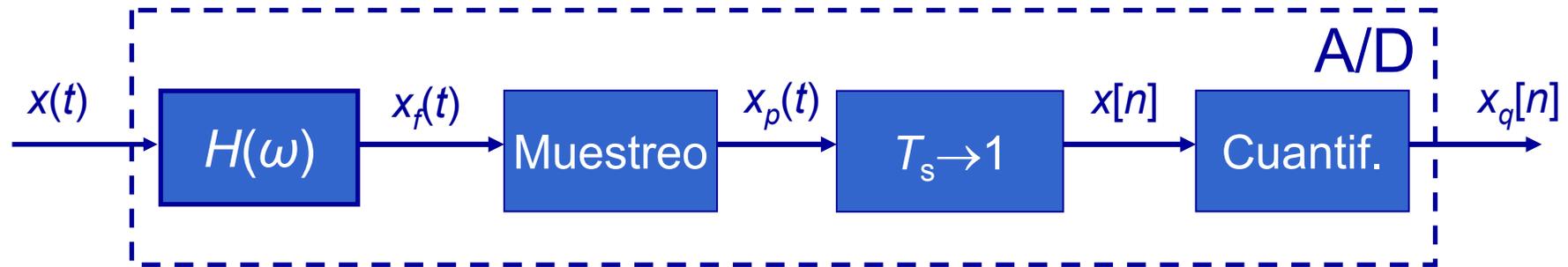
Anti-aliasing. Ideas

- Sólo hay dos posibilidades para evitar el aliasing
 - ❖ Muestrear más rápido – a veces no es posible (¿Por qué?).
 - ❖ Usar un filtro anti-aliasing
- Un filtro **anti-aliasing** es un filtro **paso-bajo** analógico (LPF) que se aplica a la señal antes del muestreo.
 - ❖ La idea es sencilla: quitar las altas frecuencias
 - ❖ La respuesta en frecuencia ideal del filtro anti-aliasing es la de un filtro paso-bajo ideal, donde ω_c es la frecuencia de corte
 - ❖ Incluso cuando el filtro paso bajo destruye información, es preferible al efecto del aliasing.



Filtrado anti-aliasing

- Diagrama de un sistema de conversión analógico/digital

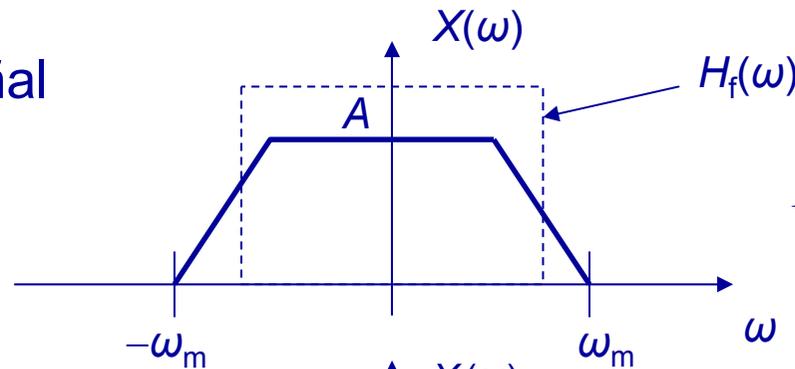


- $H(\omega) \equiv$ **Filtro anti-aliasing** (paso bajo)
- FILTRADO ANTI-ALIASING \rightarrow Filtro paso bajo
 - ❖ Limita en banda la señal de entrada
- MUESTREO \rightarrow Discretización en el tiempo.
 - ❖ Toma de muestras de la señal analógica en instantes determinados de tiempo.
- CUANTIFICACIÓN \rightarrow Discretización de amplitud.
 - ❖ Asignación de los valores de las muestras de la señal analógica a valores discretos, predefinidos, de un conjunto finito de valores.



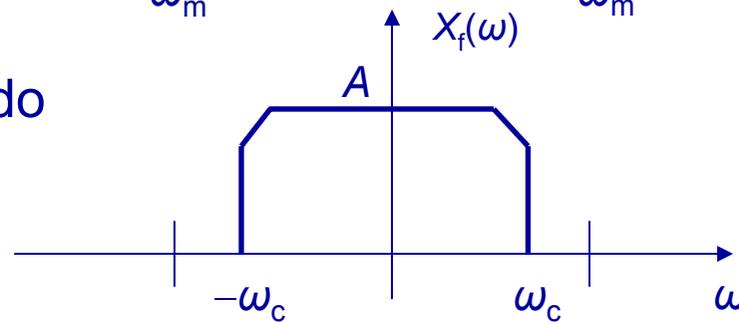
Filtrado anti-aliasing

Espectro de la señal analógica

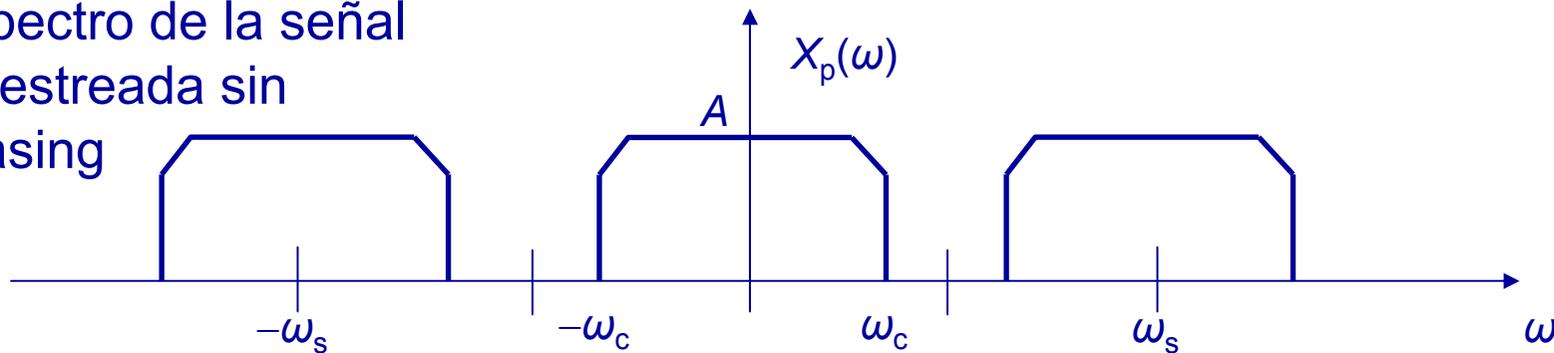


$$H_f(\omega) = \begin{cases} 1 & , \quad |\omega| < \omega_c \\ 0 & , \quad |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

Espectro con filtrado anti-aliasing



Espectro de la señal muestreada sin aliasing



Anti-aliasing. Ejemplo



Imagen original

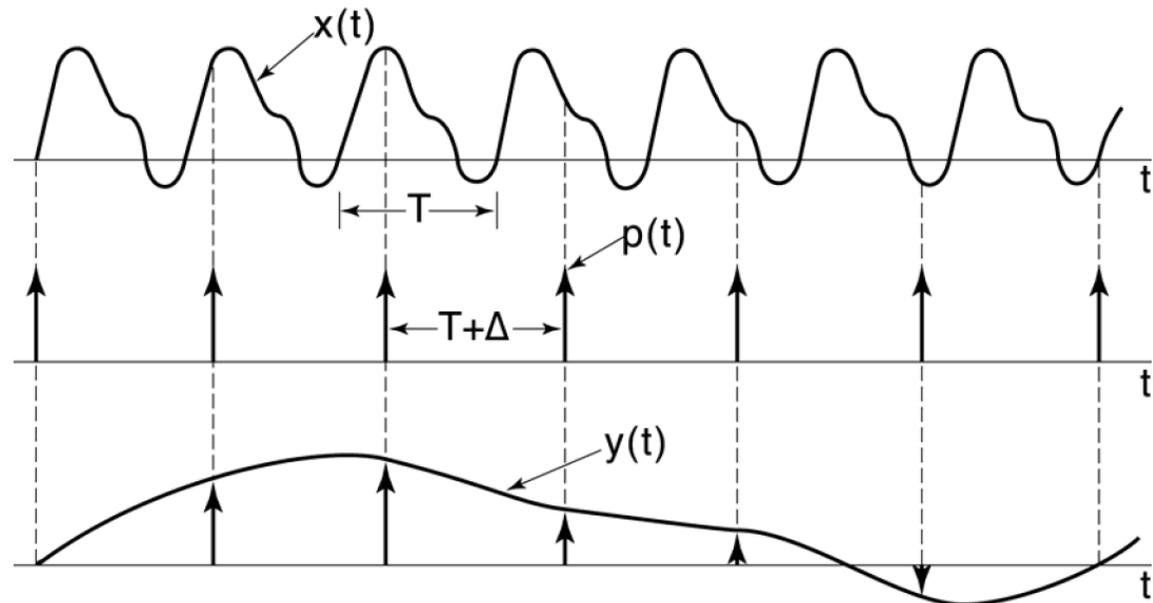
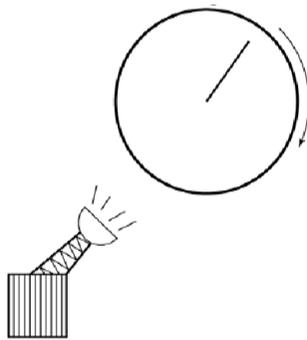


Imagen submuestreada



Imagen con filtrado
Anti-aliasing

Ejemplo de submuestreo: el estroboscopio



- $\Delta > 0$, la imagen estroboscópica se desplaza hacia delante, pero a un ritmo inferior.
- $\Delta = 0$, imagen estroboscópica fija.
- $\Delta < 0$, la imagen estroboscópica se desplaza *hacia atrás*.

9. Aplicación de la Transformada de Laplace a los sistemas LTI (I)

$$X(s) \equiv \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \equiv TL\{x(t)\}$$

$$x(t) \xrightarrow{TL} X(s)$$

$$s \in \mathcal{C}, X(s) \in \mathcal{C}$$

$$s = \sigma + j\omega$$

- ❑ La definición dada tiene sentido únicamente para **funciones causales**
- ❑ ω corresponde a una pulsación
- ❑ Para que la Transformada de Laplace (TL) de $x(t)$ exista deben existir algunos valores de la variable s para los cuales la integral converja.
- ❑ En caso contrario no existe $X(s)$. Al conjunto de valores de s para los cuales la integral converge, se le llama **región de convergencia (ROC)** de $X(s) \equiv ROC_X$.
- ❑ La *ROC* se representa en el plano \mathcal{C} mediante una zona sombreada,
- ❑ Su representación será tridimensional



Diagrama de polos y ceros (I)

- **Ceros:** valores de s que anulan a $X(s)$. Por notación: **CERO** \equiv **o**
- **Polos:** valores de s que hacen ∞ a $X(s)$. Por notación: **POLO** \equiv **x**

- Cuando la TL proviene de:
 - ❖ una combinación lineal de exponenciales complejas,
 - ❖ o de sistemas descritos por ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, entonces:

- La expresión algebraica de la transformada es un cociente de polinomios. En este caso se dice que se trata de una **transformada racional**

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}; \quad \text{donde } N(s) \text{ y } D(s) \text{ son polinomios en } s$$

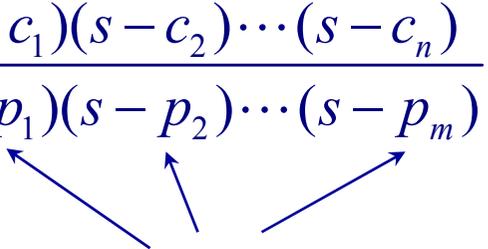
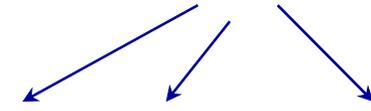


Diagrama de polos y ceros (II)

Si $H(s)$ es cociente de polinomios en s :

$$H(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad H(s) = k \frac{(s - c_1)(s - c_2) \dots (s - c_n)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_m)}$$

c_i : ceros del sistema



p_i : polos del sistema

Salvo un factor, cualquier polinomio queda definido por sus raíces

$$X(s) = \frac{(s - 2)^2}{(s + 1)(s + 2)};$$

$$\text{Ceros: } c_1 = c_2 = 2$$

$$\text{Polos: } p_1 = -1; \quad p_2 = -2$$

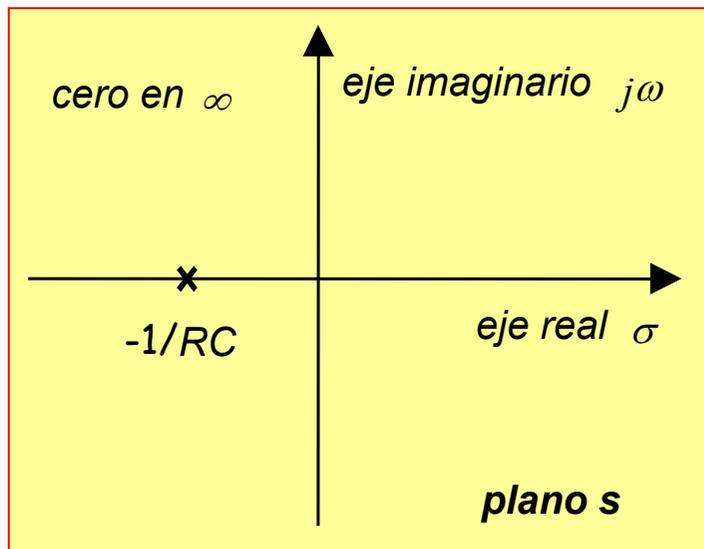


Diagrama de polos y ceros (III)

Coeficientes de $H(s)$ reales \rightarrow ceros y polos reales o complejos conjugados

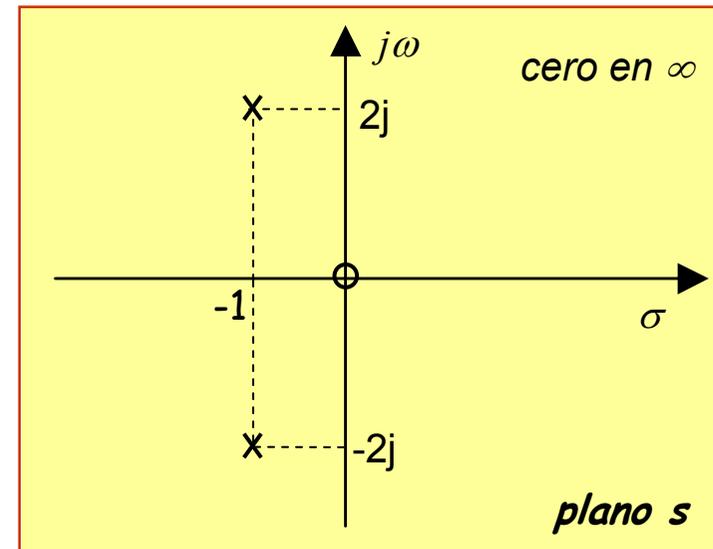
Ejemplo 1:

$$H(s) = \frac{1}{RC} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$



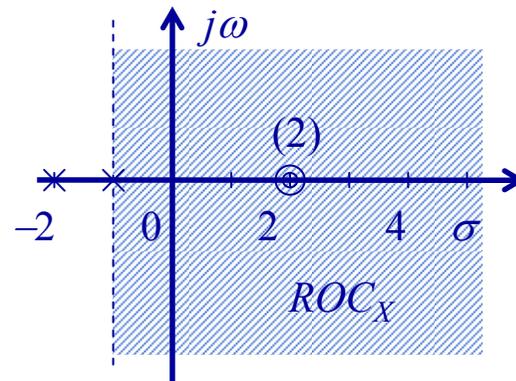
Ejemplo 2:

$$H(s) = 2 \frac{s}{(s+1-2j)(s+1+2j)}$$



Propiedades de la ROC (I)

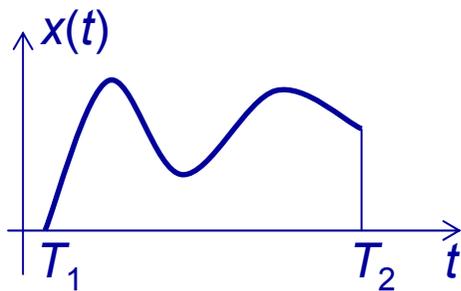
- La ROC de $X(s)$ es un semiplano que se extiende hacia la izquierda del plano s



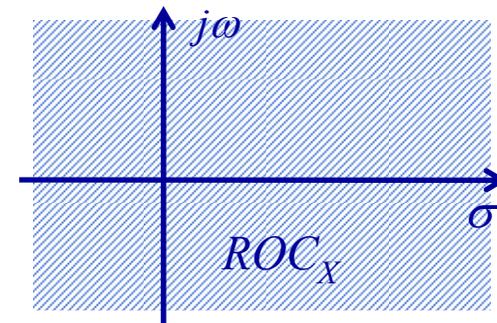
- Para TL racionales, la ROC_X **no contiene ningún polo**: por definición de ROC , en todos los puntos de la misma, la integral debe converger

Propiedades de la ROC (II)

- Si $x(t)$ es de **duración finita** y existe al menos un punto s_0 para el cual $X(s)$ converge, entonces la ROC_X es todo el plano s



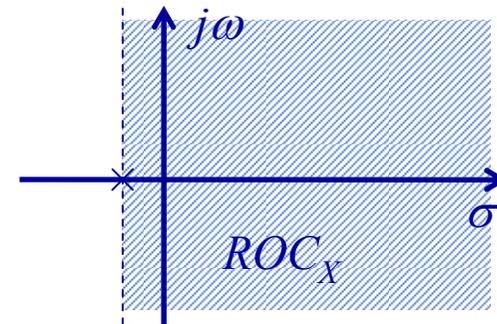
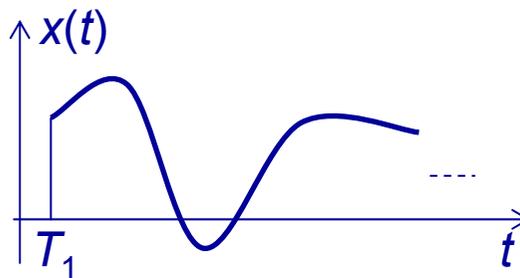
Señal de duración finita $\Rightarrow ROC_X = \forall s$



Propiedades de la *ROC* (III)

- Si $x(t)$ es señal **derecha** y existe al menos un punto s_0 para el cual $X(s)$ converge, entonces todos los valores $\text{Re}\{s\} > \text{Re}\{s_0\}$ pertenecen a la ROC_x

Señal derecha:
 $x(t)=0, \forall t < T_1$



Señal $x(t)$ derecha $\Rightarrow ROC_x$ a la derecha del polo de mayor parte real

9. La Función de Sistema (I)

Sea un sistema LTI de tiempo continuo con respuesta al impulso $h(t)$



Si $x(t)$, $h(t)$ e $y(t)$ tienen TL, y aplicando la propiedad de convolución, obtenemos en el dominio transformado:



$H(s) \equiv$ **Función de sistema**

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}; \text{ ROC}_H$$

$$H(s) \equiv \int_0^{\infty} h(t)e^{-st} dt = TL \{h(t)\}$$



La función de sistema (II)

- La expresión algebraica de la **función de sistema**, $H(s)$, se puede obtener como la relación entre TL de la salida y la entrada.
- No es necesario que la entrada sea un impulso unidad.
- A esta función también se le llama **función de transferencia** del sistema



Función de sistema vs. respuesta en frecuencia (I)

Si la expresión algebraica de la función de sistema es de tipo racional, podemos expresar $H(s)$ en función de los polos p_i y los ceros c_i
Suponiendo raíces simples:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = k \frac{\prod_i (s - c_i)}{\prod_i (s - p_i)} \Rightarrow H(s) = k \frac{(s - c_1)(s - c_2) \cdots (s - c_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

La respuesta en frecuencia equivale a la función de sistema particularizada en $s = j\omega$

$$H(\omega) = H(s) \Big|_{s = j\omega}, \quad j\omega \in \text{ROC}_H$$

$|H(\omega)|$: Amplitud de la respuesta en frecuencia (o **respuesta en amplitud**)

$\angle\{H(\omega)\}$: Fase de la respuesta en frecuencia (o **respuesta en fase**)



Función de sistema vs. respuesta en frecuencia (II)

- La respuesta en frecuencia se puede evaluar a partir del diagrama de polos y ceros
 - Eje $j\omega$ del plano \mathcal{C} : “eje de frecuencias”.

Distancias de los c_i al eje $j\omega$

$$|H(\omega)| = k \frac{|j\omega - c_1| |j\omega - c_2| \cdots |j\omega - c_m|}{|j\omega - p_1| |j\omega - p_2| \cdots |j\omega - p_n|}$$

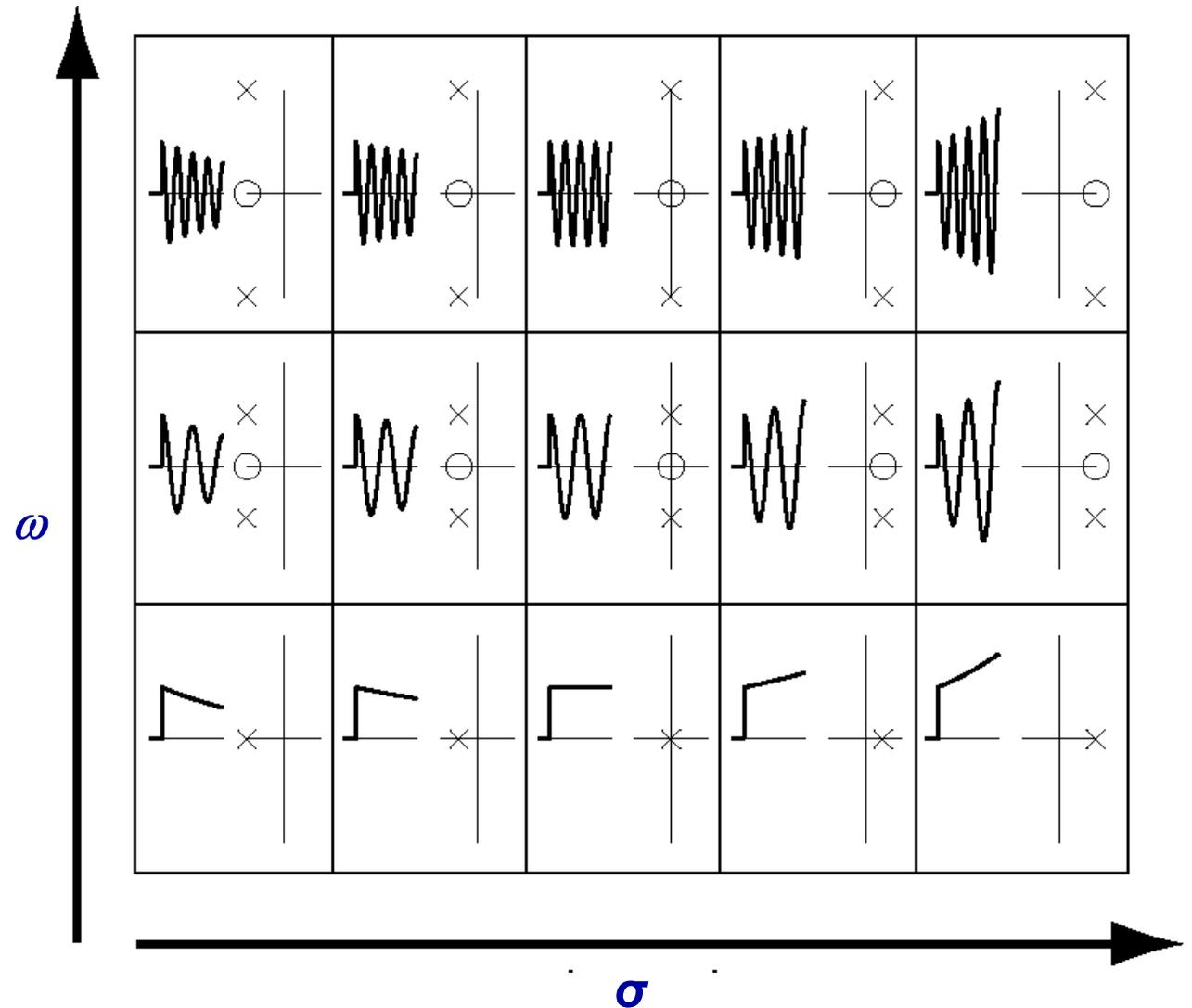
Distancias de los p_i al eje $j\omega$

- El módulo se puede calcular como el producto de distancias desde el punto sobre el eje $j\omega$ hasta cada uno de los ceros, dividido por el producto de distancias desde el punto sobre el eje $j\omega$ hasta cada uno de los polos (salvo una constante):



Algo más sobre polos y ceros...

- Los polos y los ceros de la expresión de la TL caracterizan la función en el dominio del tiempo casi completamente



10. Respuesta en frecuencia de sistemas caracterizados por e.d.l.c.c. (I)

- Consideramos la forma general de una e.d.l.c.c. (N y $M \geq 0$):

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

❖ Dos soluciones

- ★ Solución homogénea (régimen libre o transitorio)

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0 \Rightarrow y_h(t) = \sum_{k=1}^N c_k e^{\lambda_i t}$$

λ_i son soluciones de $\sum_{k=0}^N a_k s^k = 0$ Soluciones del pol. característico

Para hallar c_k es necesario conocer las condiciones iniciales:

$$y(0), \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0}, \left. \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \right|_{t=0}, \dots, \left. \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} \right|_{t=0}$$

- ★ Solución completa (régimen forzado o permanente)



10. Respuesta en frecuencia de sistemas caracterizados por e.d.l.c.c. (II)

- Para un sistema lineal, si la entrada $x(t)$ es nula, la salida $y(t)$ también.

$$\text{Si } x(t) = 0 \Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \dots = \frac{d^M x(t)}{dt^M} = 0$$

y la ecuación queda reducida al caso homogéneo.

- Para que la solución homogénea sea nula, todas las constantes c_k deben ser nulas, y para ello es necesario que todas las condiciones iniciales sean nulas \Rightarrow

Para que un sistema descrito por una e.d.l.c.c. sea lineal, es necesario que todas las condiciones iniciales sean nulas



10. Respuesta en frecuencia de sistemas caracterizados por e.d.l.c.c. (III)

- Supongamos que todas las condiciones iniciales de la siguiente e.d.l.c.c. son nulas

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) \\ = b_m x^{(m)}(t) + b_{m-1} x^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 x'(t) + b_0 x(t) \end{aligned}$$

- Supongamos que la entrada $x_1(t)$ da lugar a la solución particular $y_1(t)$ y que la entrada $x_2(t)$ da lugar a la solución particular $y_2(t)$.
- Si tomamos una entrada $x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$ se cumplirá:



10. Respuesta en frecuencia de sistemas caracterizados por e.d.l.c.c. (IV)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x_3(t)}{dt^k} &= \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k (\alpha x_1(t) + \beta x_2(t))}{dt^k} = \\ &= \alpha \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x_1(t)}{dt^k} + \beta \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x_2(t)}{dt^k} = \alpha \sum_{k=0}^M a_k \frac{d^k y_1(t)}{dt^k} + \beta \sum_{k=0}^M a_k \frac{d^k y_2(t)}{dt^k} \Rightarrow \\ \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x_3(t)}{dt^k} &= \sum_{k=0}^M a_k \frac{d^k (\alpha y_1(t) + \beta y_2(t))}{dt^k}\end{aligned}$$

- Observamos que la entrada $x_3(t) = \alpha x_1(t) + \beta x_2(t)$ da lugar a la solución $y_3(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ si se cumple que todas las condiciones iniciales son nulas.
- Si alguna condición inicial fuera no nula habría que añadir la solución homogénea $y_h(t) \neq 0$ a $y_3(t)$ y el sistema sería no lineal



10. Respuesta en frecuencia de sistemas caracterizados por e.d.l.c.c. (V)

- **Invarianza** en el tiempo de un sistema descrito por una e.d.l.c.c.
 - ❖ Como todos los coeficientes son constantes y la derivada es invariante en el tiempo, un sistema descrito por una e.d.l.c.c. será invariante si las condiciones iniciales son invariantes en el tiempo, es decir, si al retrasar o adelantar la señal de entrada, las “condiciones iniciales” se desplazan en el tiempo en la misma cantidad que la señal de entrada
- **Linealidad** de un sistema descrito por una e.d.l.c.c.
 - ❖ Un sistema descrito por una e.d.l.c.c. será LTI si y sólo si las condiciones iniciales son nulas y trasladables en el tiempo. A esa situación se le llama reposo inicial. Por tanto:

**Un sistema descrito por una e.d.l.c.c. será LTI
si y sólo si parte del reposo inicial**



10. Respuesta en frecuencia de sistemas caracterizados por e.d.l.c.c. (VI)

- Sea un sistema descrito por una e.d.l.c.c. que parte de reposo inicial (LTI):

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \Rightarrow \sum_{k=0}^N a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^M b_k x^{(k)}(t)$$

- Consideramos que N y M son positivos (sólo aparecen derivadas)
- Suponemos que a_0 es no nulo (aparece $y(t)$)
- Aplicamos TF a ambos lados de la ecuación

$$\sum_{k=0}^N a_k TF \{y^{(k)}(t)\} = \sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k Y(\omega) = \sum_{k=0}^M b_k TF \{x^{(k)}(t)\} = \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k X(\omega)$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k}$$



10. Respuesta en frecuencia de sistemas caracterizados por e.d.l.c.c. (VII)

- Sea un sistema definido por e.d.l.c.c. que parte del reposo inicial

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \Rightarrow \sum_{k=0}^N a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^M b_k x^{(k)}(t)$$

- Aplicando TL se tiene:

$$TL \left\{ \sum_{k=0}^N a_k y^{(k)}(t) \right\} = \sum_{k=0}^N a_k TL \{ y^{(k)}(t) \} = \sum_{k=0}^N a_k s^k TL \{ y(t) \} = \sum_{k=0}^N a_k s^k Y(s)$$

$$TL \left\{ \sum_{k=0}^M b_k x^{(k)}(t) \right\} = \sum_{k=0}^M b_k TL \{ x^{(k)}(t) \} = \sum_{k=0}^M b_k s^k TL \{ x(t) \} = \sum_{k=0}^M b_k s^k X(s)$$

Igualando ambos términos se tiene: $Y(s) \sum_{k=0}^N a_k s^k = X(s) \sum_{k=0}^M b_k s^k \Rightarrow$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k}$$

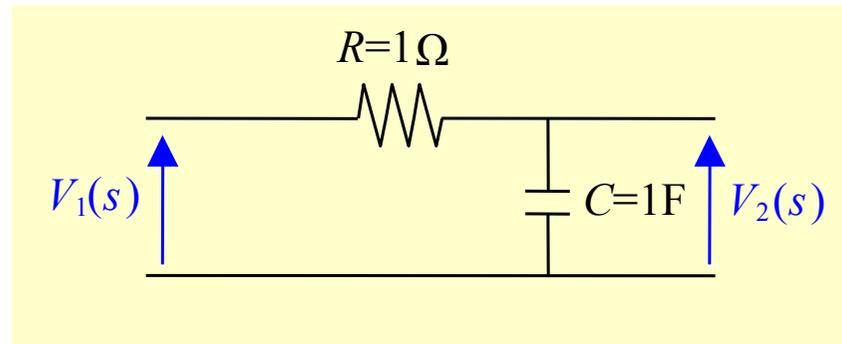
Sistema causal $\Rightarrow ROC_H$ está a la derecha del polo de mayor parte real



$H(s)$. Ejemplo (I)

Ejemplo 1:

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$$

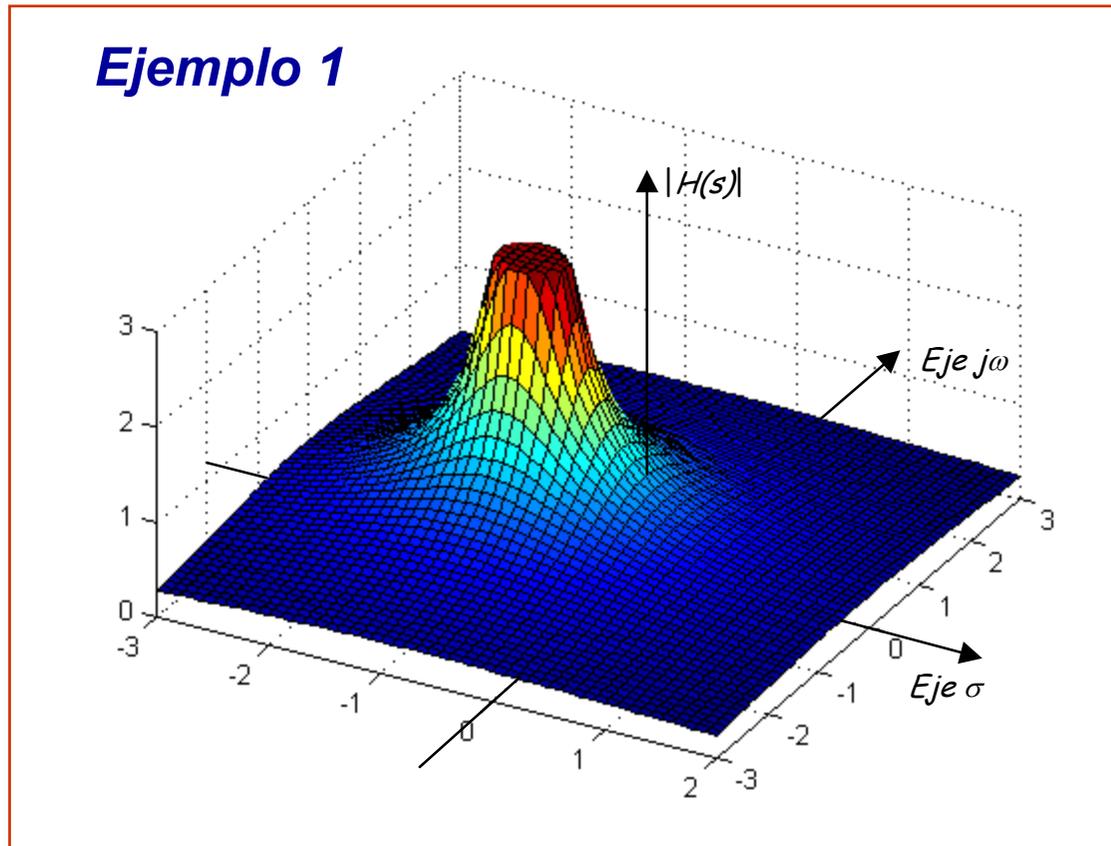


$$V_2(s) = \frac{V_1(s) \frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}}$$

$$H(s) = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{RC} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

Módulo de $H(s)$. Ejemplo (I)

Ejemplo 1

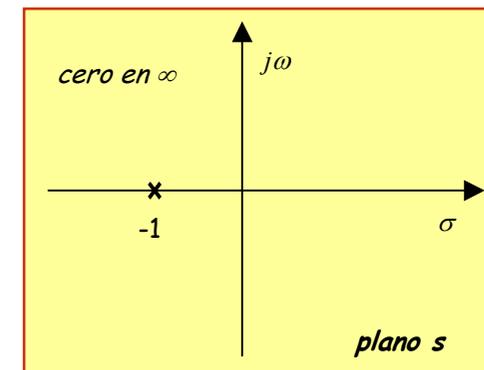


$$H(s) = \frac{1}{RC} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

Si damos valores:

$$C=1 \text{ F}, \quad R=1 \text{ } \Omega$$

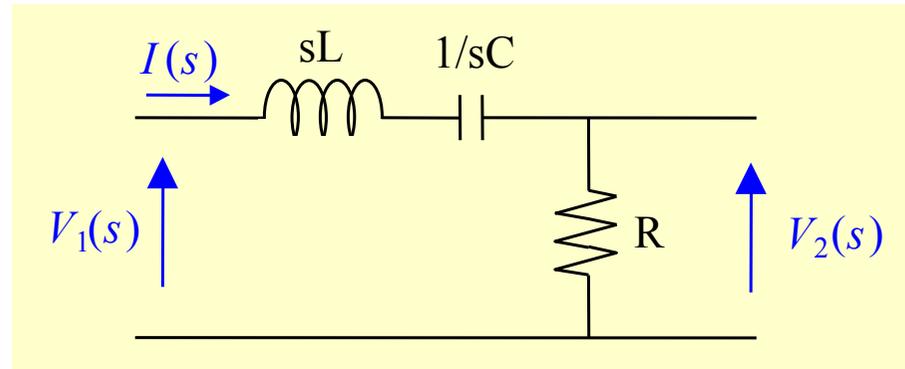
$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$



$H(s)$. Ejemplo (II)

Ejemplo 2:

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$$



$$H(s) = \frac{I(s)R}{I(s)\left(sL + \frac{1}{sC} + R\right)} = \frac{Rs}{s^2L + Rs + 1/C} = \frac{R}{L} \frac{s}{s^2 + s\frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$$

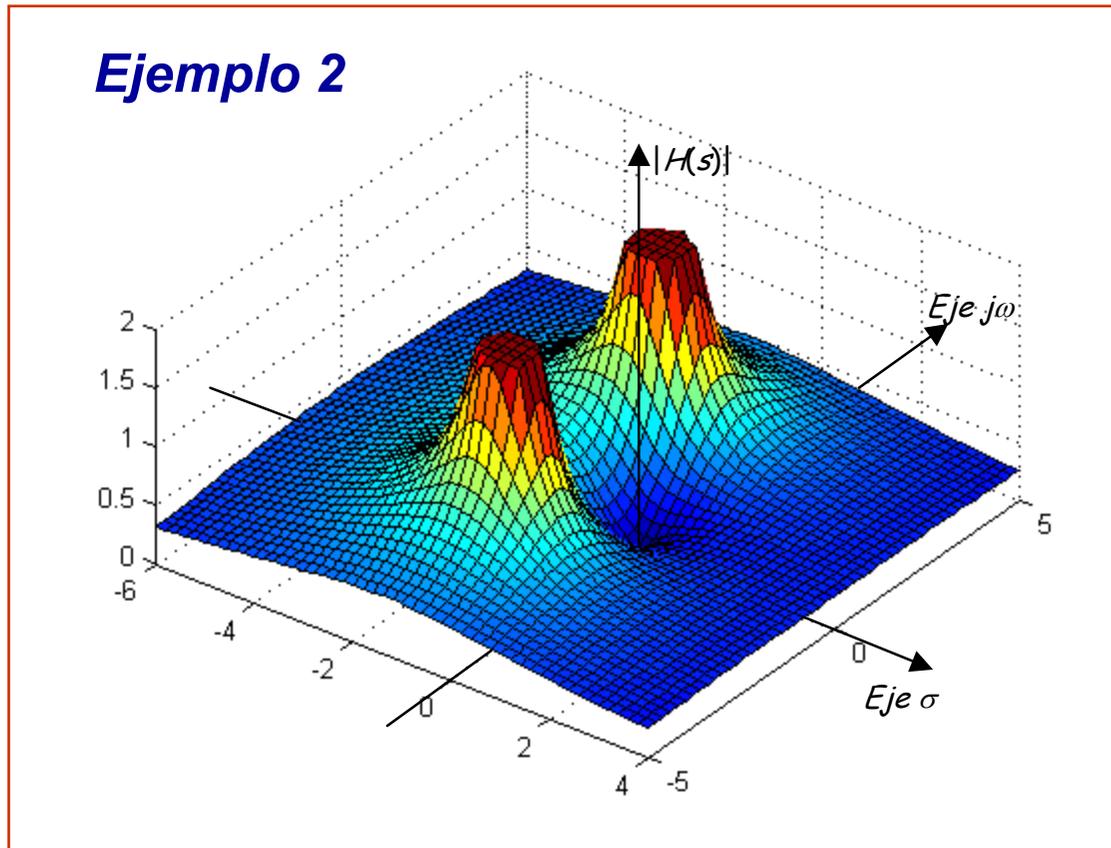
Si damos valores: $L=1$ H, $C=1/5$ F, $R=2$ Ω

$$H(s) = 2 \frac{s}{s^2 + 2s + 5} = 2 \frac{s}{(s+1+2j)(s+1-2j)}$$

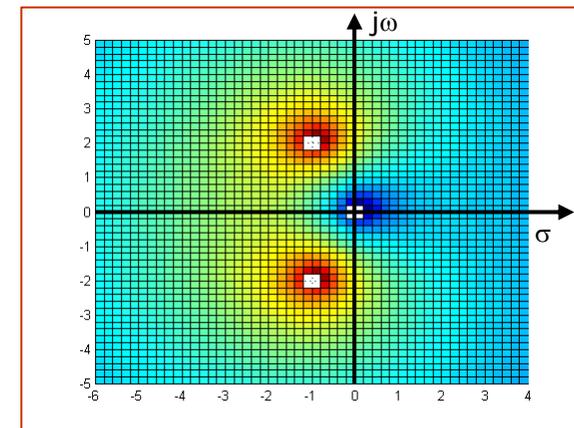
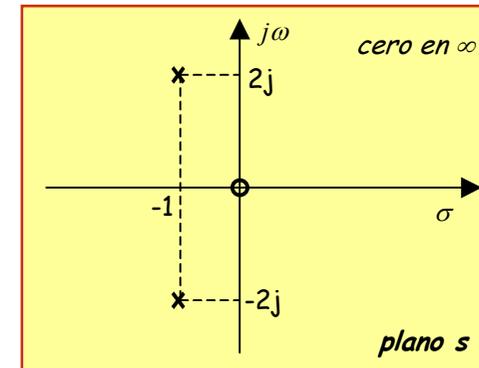


Módulo de $H(s)$. Ejemplo (II)

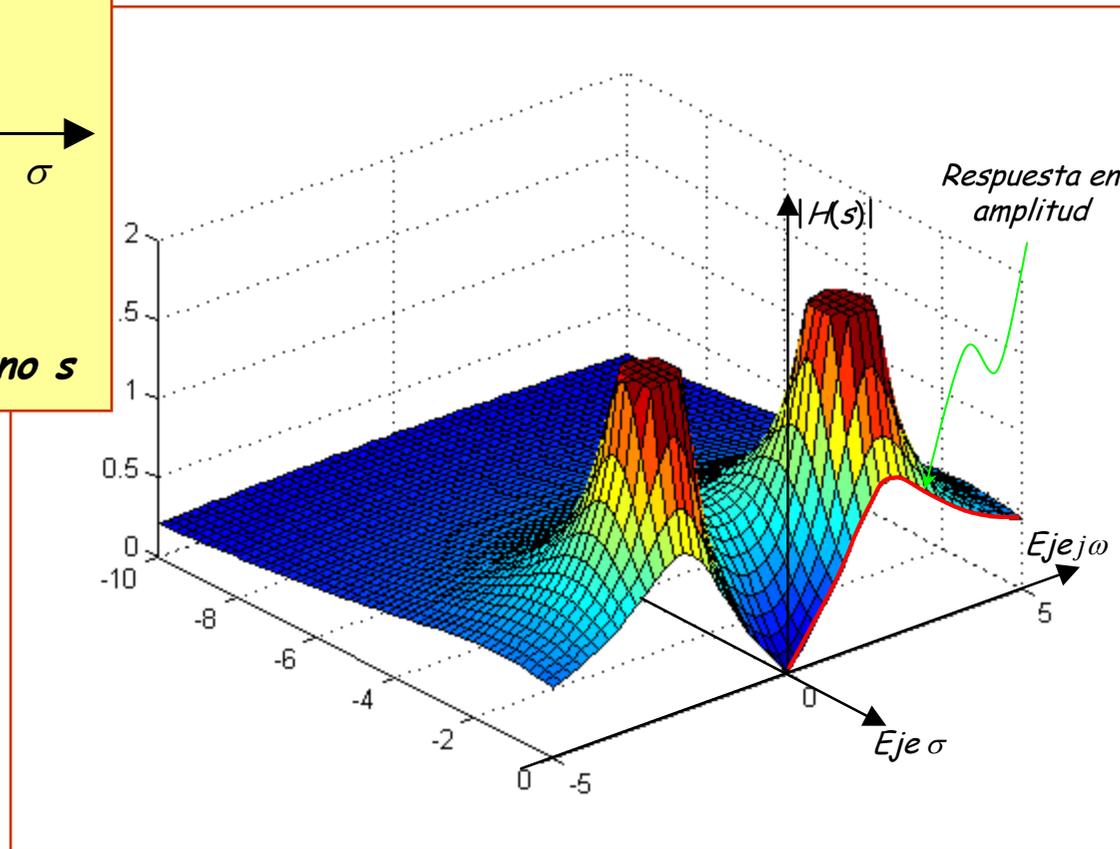
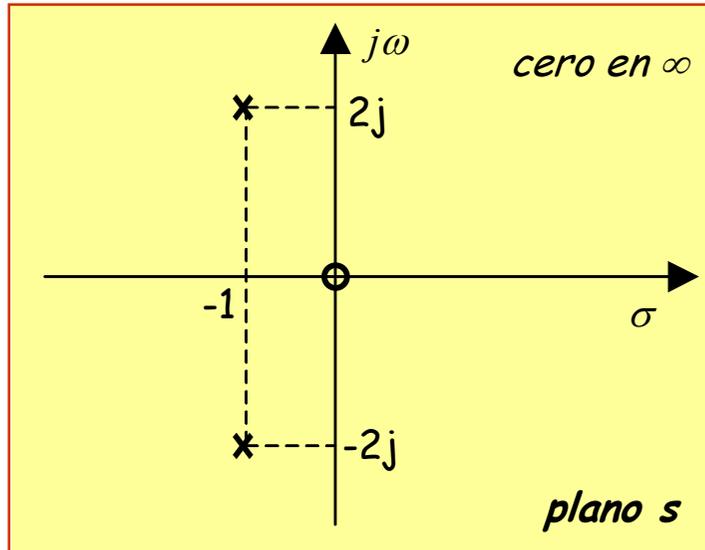
Ejemplo 2



$$H(s) = 2 \frac{s}{(s+1-2j)(s+1+2j)}$$



Amplitud de la respuesta en frecuencia

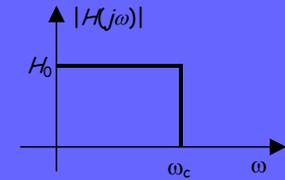


10. Introducción al filtrado

- Filtro paso bajo
 - ❖ Primer orden
 - ❖ Segundo orden
- Filtro paso alto
 - ❖ Primer orden
 - ❖ Segundo orden
- Filtro paso banda

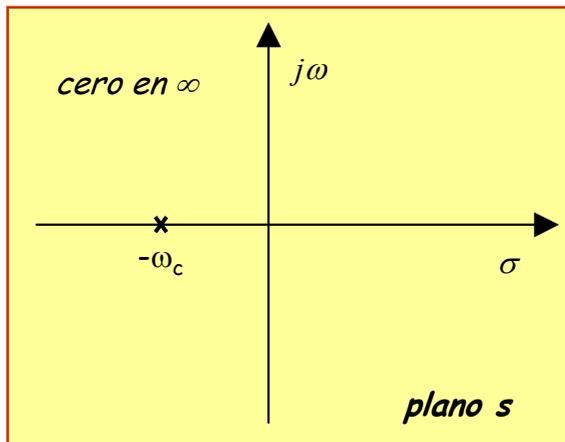


Filtro paso bajo de 1^{er} orden (I)



Un polo y un cero

Diagrama de polos y ceros



Función de transferencia

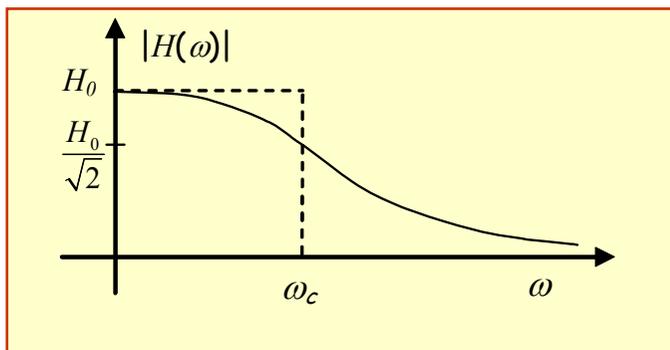
$$H(s) = \frac{H_0}{\frac{s}{\omega_c} + 1}$$

Respuesta en frecuencia

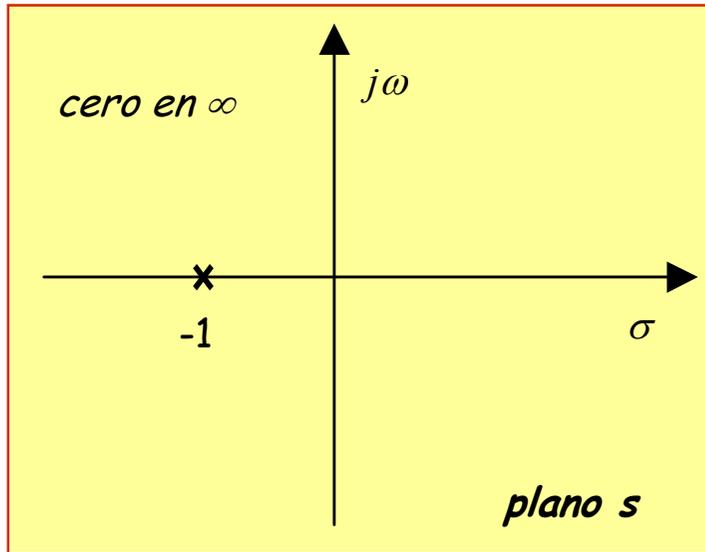
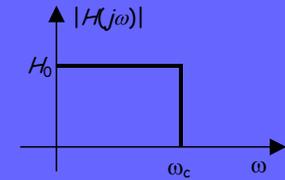
$$H(\omega) = \frac{H_0}{\frac{j\omega}{\omega_c} + 1}$$

Respuesta en amplitud

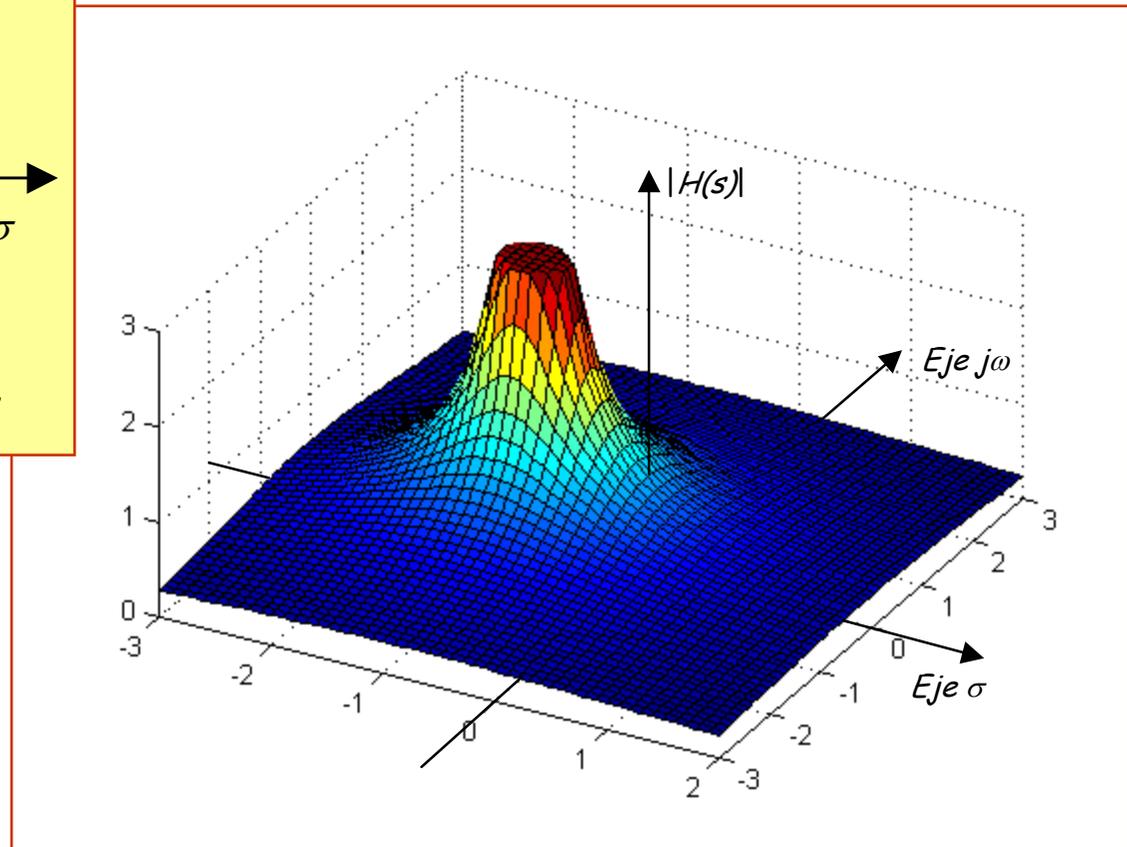
$$|H(\omega)| = \frac{H_0}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + 1}}$$



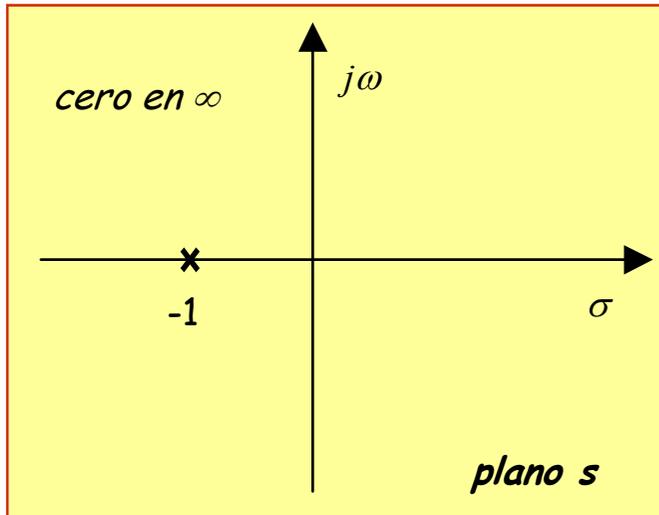
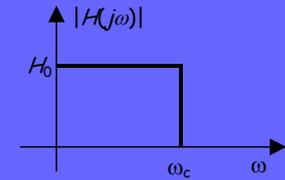
Filtro paso bajo de 1^{er} orden (II)



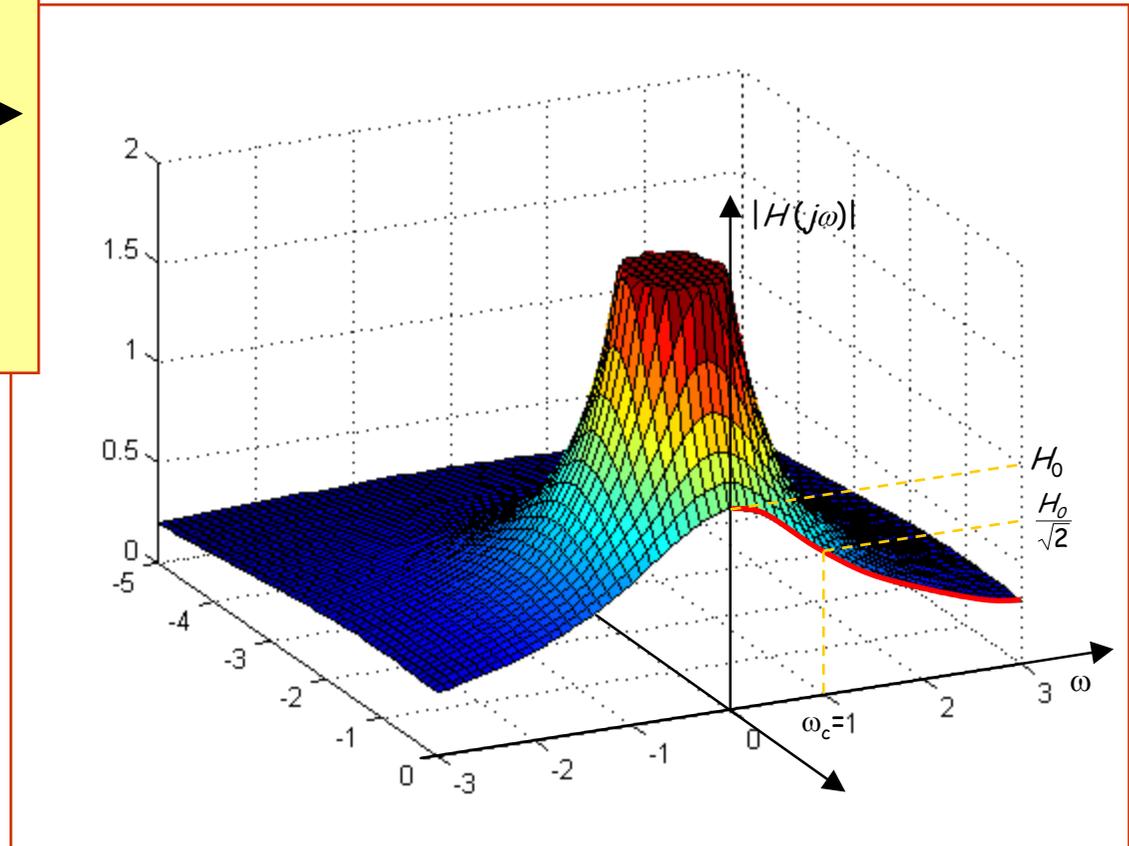
$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$



Filtro paso bajo de 1^{er} orden (III)



$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$



Filtro paso bajo de 2º orden (I)

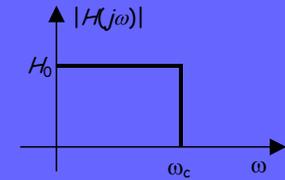
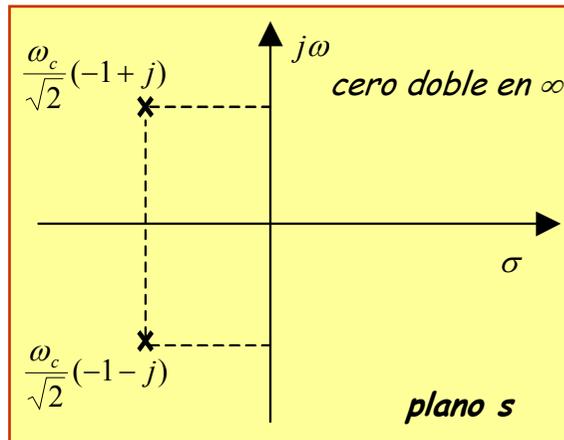
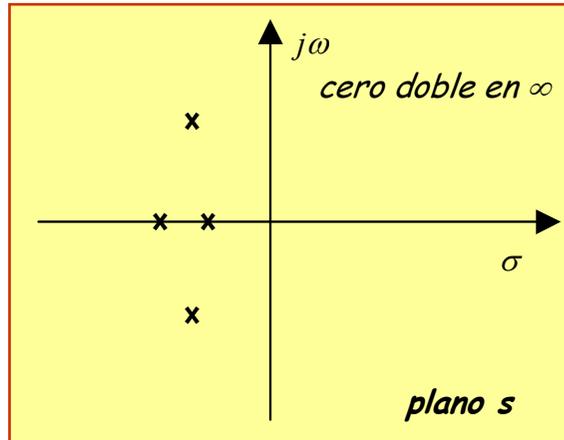


Diagrama de polos y ceros



Dos polos y dos ceros

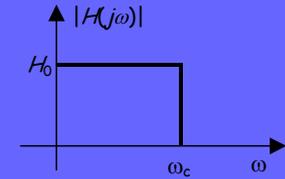
Función de transferencia

$$H(s) = \frac{H_0}{s^2 + as + b}$$

Posible aproximación

$$H(s) = H_0 \frac{\omega_c^2}{s^2 + s\sqrt{2}\omega_c + \omega_c^2}$$

Filtro paso bajo de 2º orden (II)



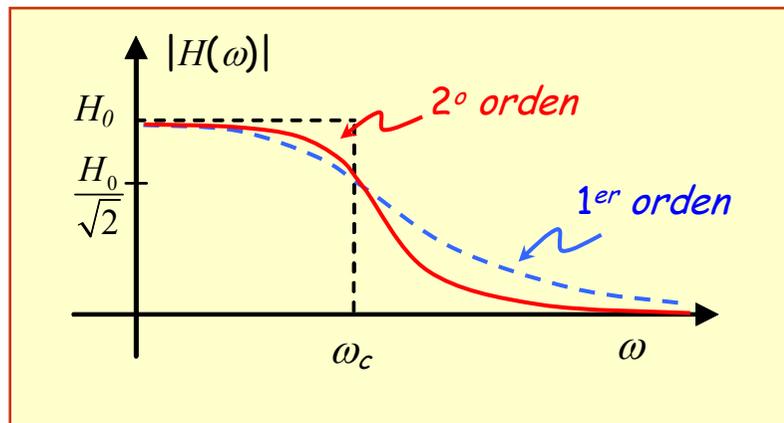
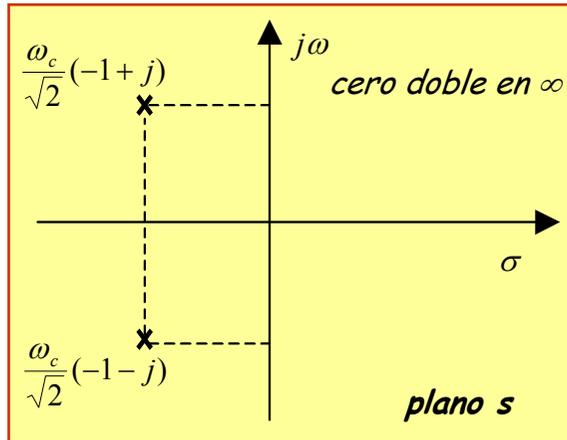
$$H(s) = H_0 \frac{\omega_c^2}{s^2 + s\sqrt{2}\omega_c + \omega_c^2}$$

Respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = H_0 \frac{\omega_c^2}{-\omega^2 + j\omega\sqrt{2}\omega_c + \omega_c^2}$$

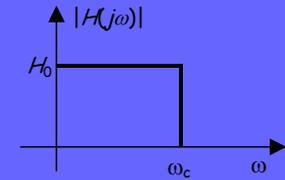
Respuesta en amplitud

$$|H(\omega)| = H_0 \frac{\omega_c^2}{\sqrt{(\omega_c^2 - \omega^2)^2 + 2\omega^2\omega_c^2}} = H_0 \frac{\omega_c^2}{\sqrt{\omega_c^4 + \omega^4}}$$



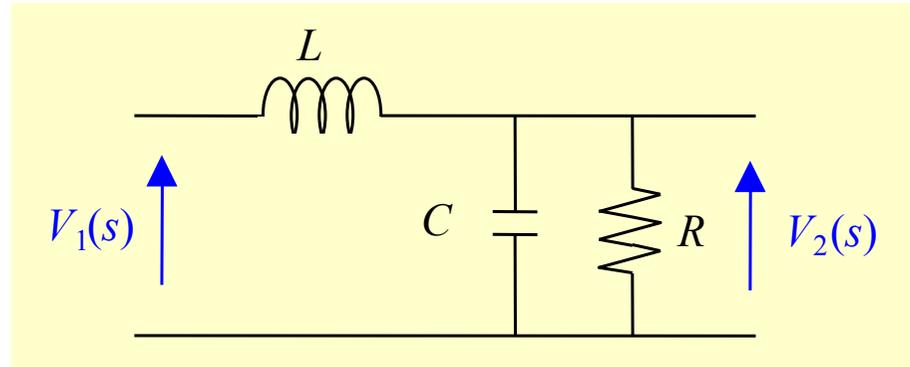
$$|H(\omega)| = \frac{H_0}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^4 + 1}}$$

Filtro paso bajo de 2º orden (III)



Ejemplo 3:

$$V_2(s) = \frac{V_1(s) \left(\frac{1}{sC} // R \right)}{sL + \left(\frac{1}{sC} // R \right)}$$



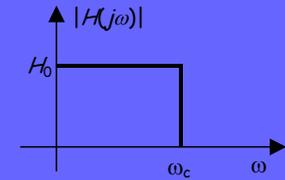
$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{sL + \frac{R/sC}{R + 1/sC}} \cdot \frac{R/sC}{R + 1/sC} = \frac{1}{sL + \frac{R}{RsC + 1}} \cdot \frac{R}{RsC + 1} = \frac{R}{s^2 LCR + sL + R}$$

Si se usa la aproximación anterior:

$$H_0 \frac{\omega_c^2}{s^2 + s\sqrt{2}\omega_c + \omega_c^2} = \frac{R}{s^2 LCR + sL + R} = 1 \frac{1/(LC)}{s^2 + s/(RC) + 1/(LC)}$$

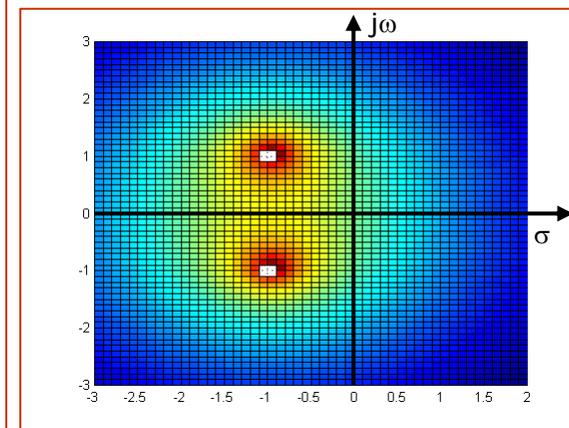
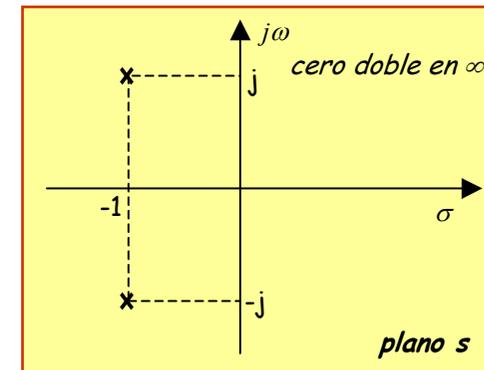
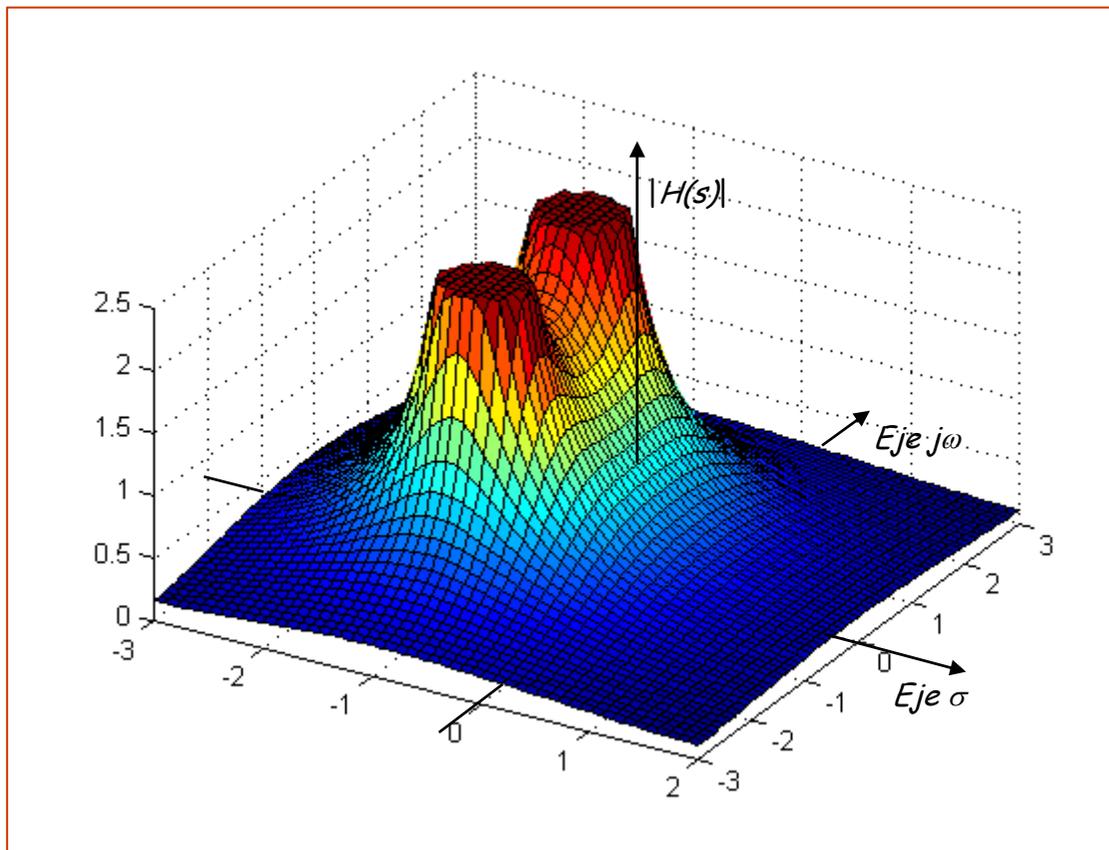
The diagram shows the approximation process with arrows and circles. A red circle around H_0 and a red circle around 1 are connected by a red arrow. A blue circle around ω_c^2 and a blue circle around $1/(LC)$ are connected by a blue arrow. A yellow circle around $s\sqrt{2}\omega_c$ and a yellow circle around $s/(RC)$ are connected by a yellow arrow. A blue circle around ω_c^2 and a blue circle around $1/(LC)$ are also connected by a blue arrow.

Filtro paso bajo de 2° orden (IV)

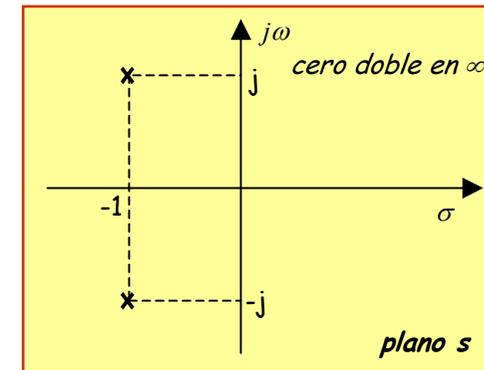
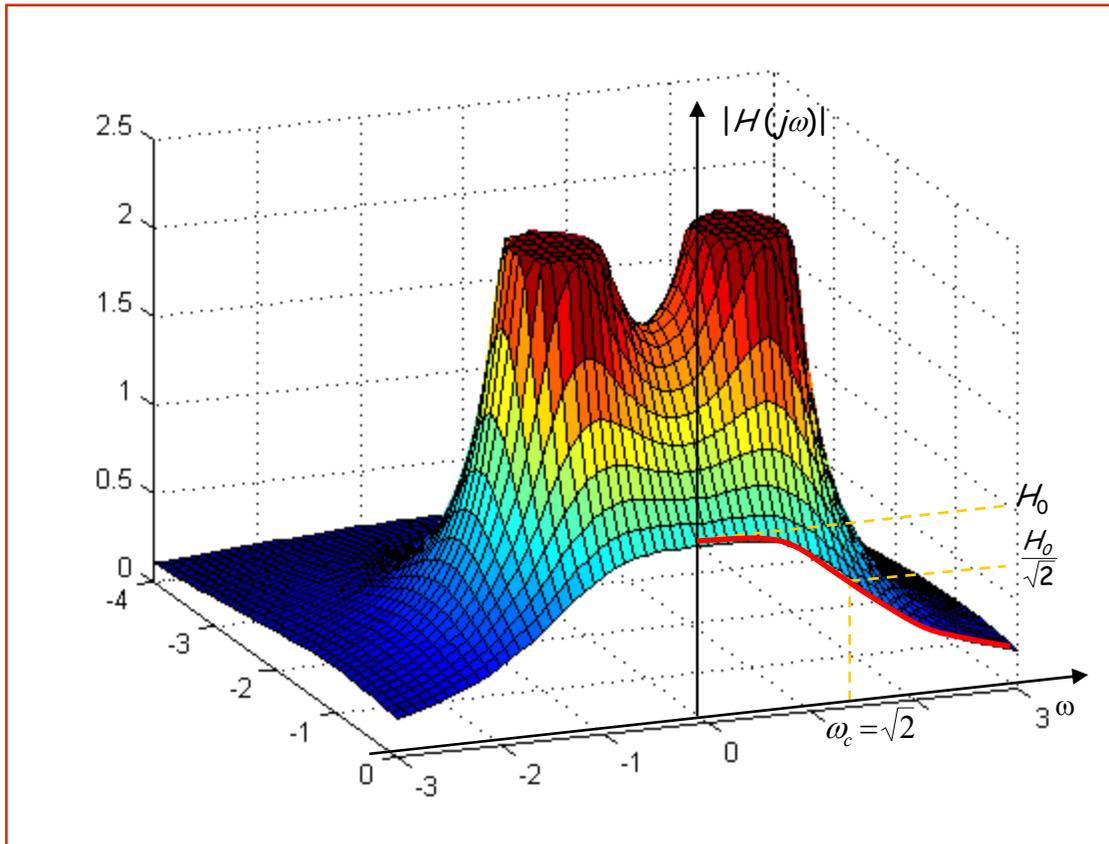
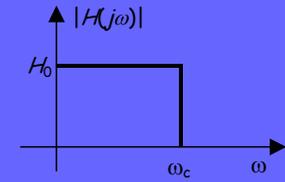


$$\omega_c^2 = 2 \quad H_0 = 1$$

$$H(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2}$$

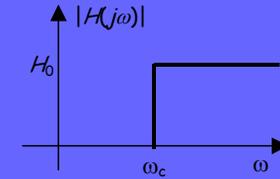


Filtro paso bajo de 2º orden (V)



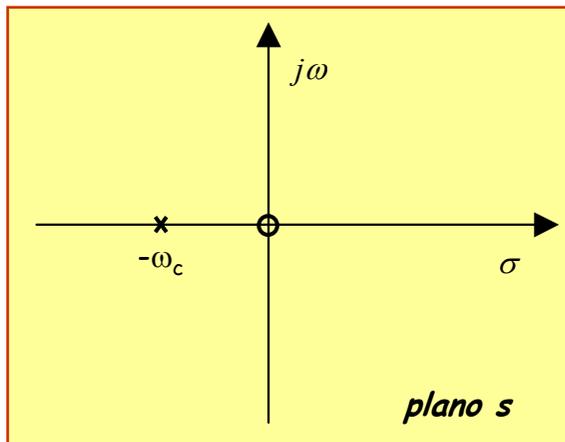
$$H(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2}$$

Filtro paso alto de 1^{er} orden (I)



Un polo y un cero

Diagrama de polos y ceros



Función de transferencia

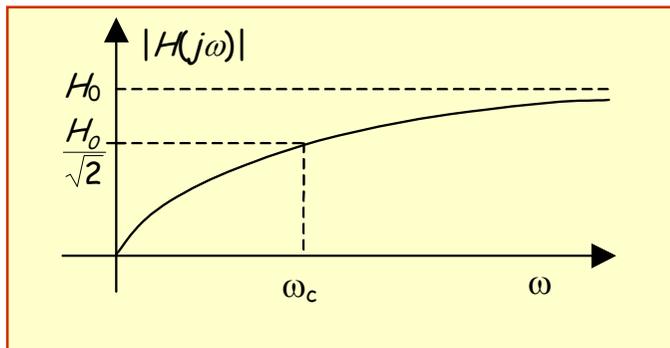
$$H(s) = H_0 \frac{s}{s + \omega_c} = \frac{H_0}{1 + \frac{\omega_c}{s}}$$

Respuesta en frecuencia

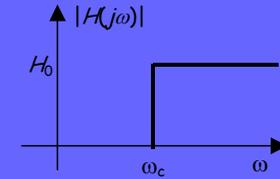
$$H(\omega) = \frac{H_0}{1 - j \frac{\omega_c}{\omega}}$$

Respuesta en amplitud

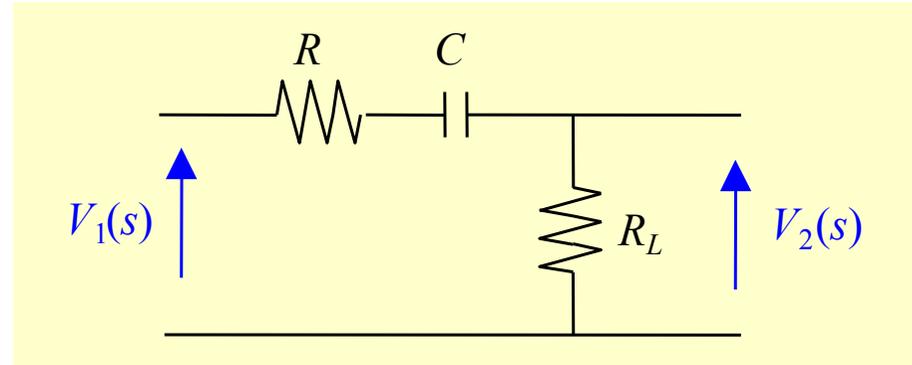
$$|H(\omega)| = \frac{H_0}{\sqrt{\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2 + 1}}$$



Filtro paso alto de 1^{er} orden (II)



$$V_2(s) = V_1(s) \frac{R_L}{R + \frac{1}{sC} + R_L}$$



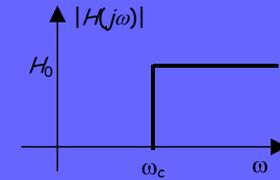
$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{R_L}{R + \frac{1}{sC} + R_L} =$$

$$= \frac{sCR_L}{sC(R + R_L) + 1} = \frac{R_L}{R + R_L} \frac{s}{s + \frac{1}{C(R + R_L)}} \quad H(s) = H_0 \frac{s}{s + \omega_c}$$

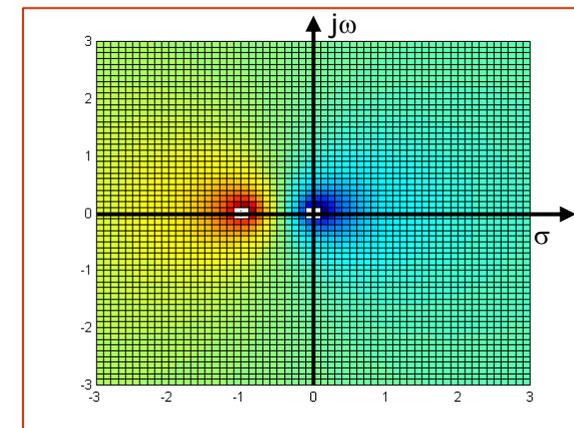
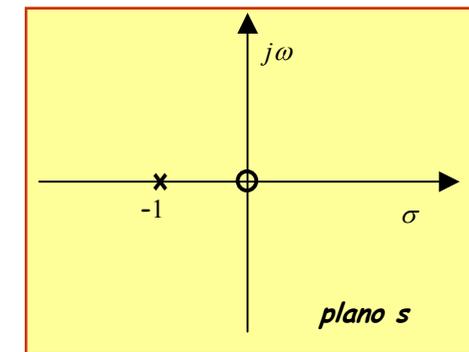
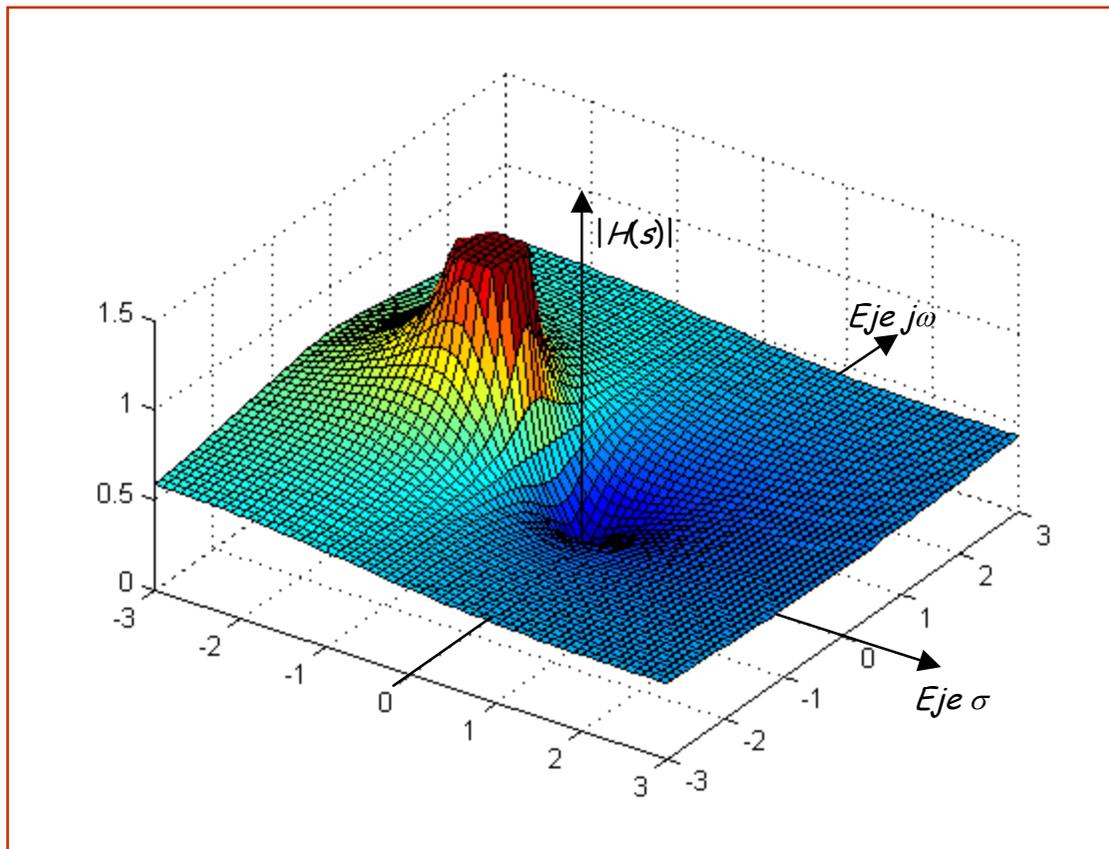
Si damos valores: $R=1 \ \Omega$, $R_L=1 \ \Omega$, $C=0.5 \ \text{F}$: $H(s) = \frac{1}{2} \frac{s}{s+1}$



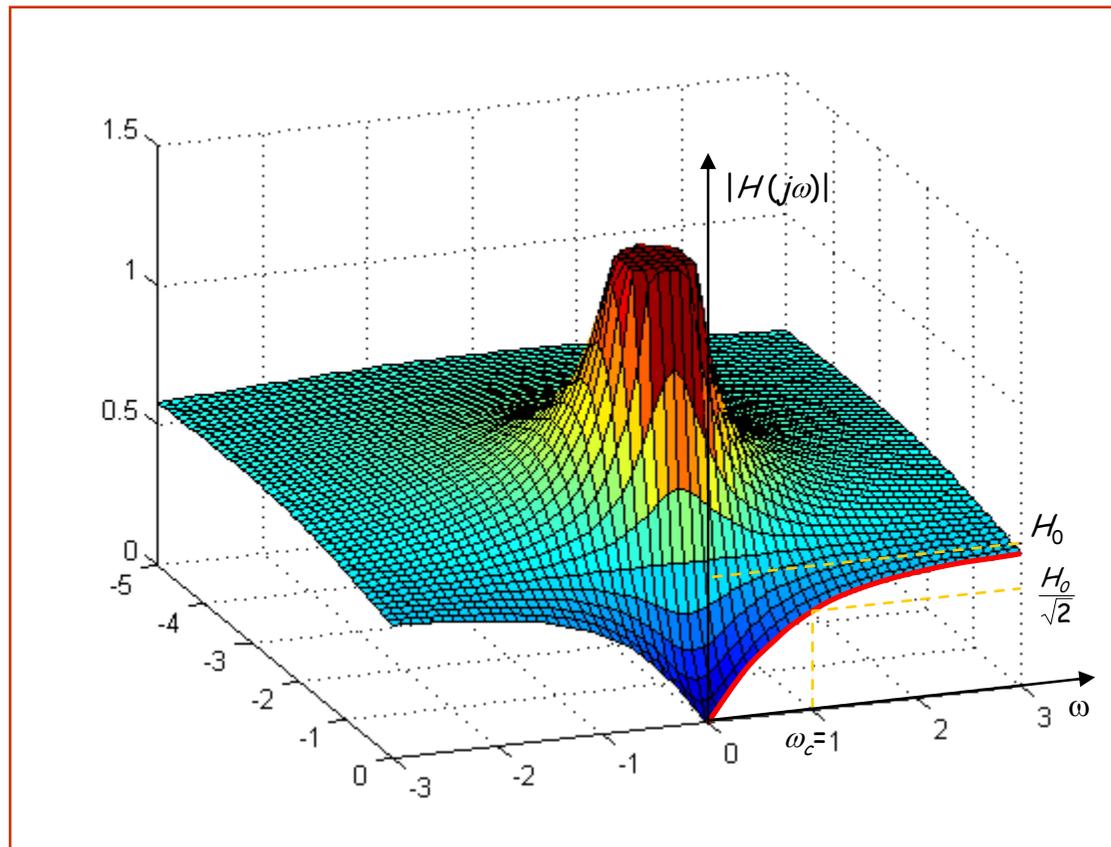
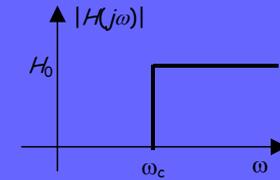
Filtro paso alto de 1^{er} orden (III)



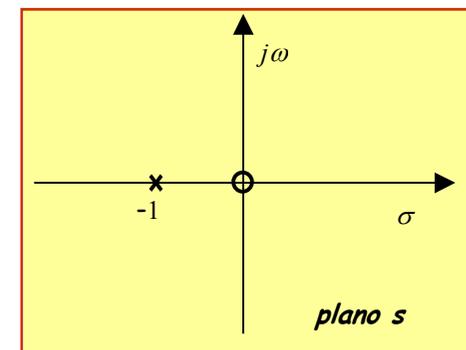
$$H(s) = \frac{1}{2} \frac{s}{s+1}$$



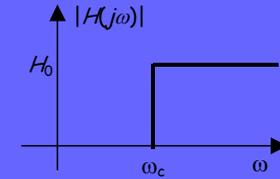
Filtro paso alto de 1^{er} orden (IV)



$$H(s) = \frac{1}{2} \frac{s}{s+1}$$

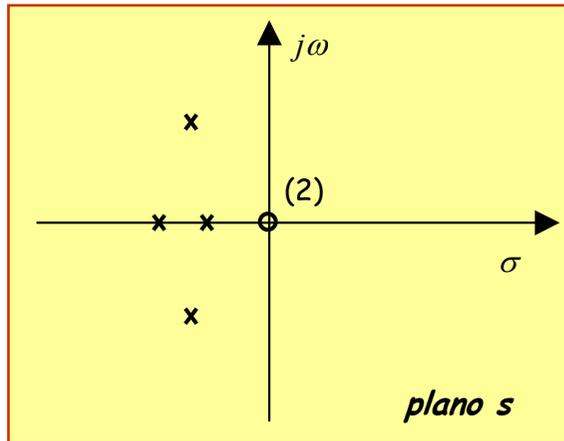


Filtro paso alto de 2º orden (I)



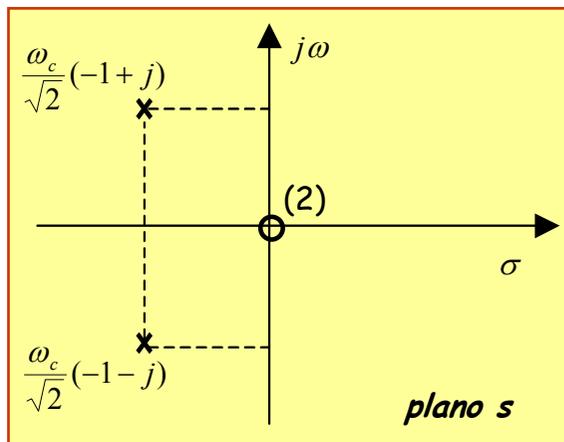
Dos polos y dos ceros

Diagrama de polos y ceros



Función de transferencia

$$H(s) = H_0 \frac{s^2}{s^2 + as + b}$$

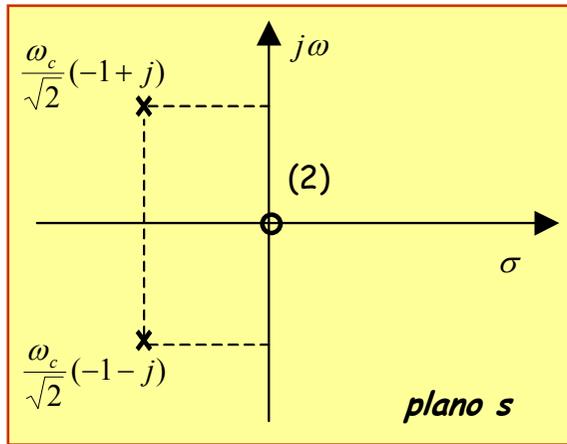
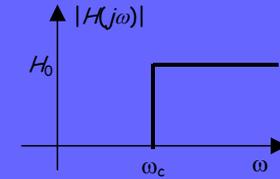


Posible aproximación

$$H(s) = H_0 \frac{s^2}{s^2 + s\sqrt{2}\omega_c + \omega_c^2}$$



Filtro paso alto de 2º orden (II)



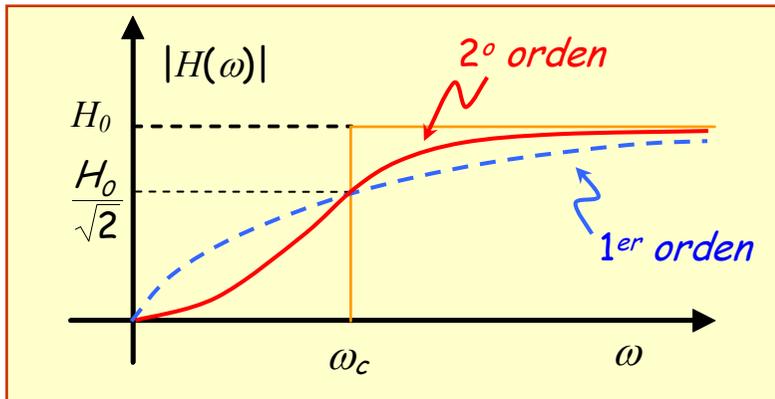
$$H(s) = H_0 \frac{s^2}{s^2 + s\sqrt{2}\omega_c + \omega_c^2}$$

Respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = H_0 \frac{-\omega^2}{-\omega^2 + j\omega\sqrt{2}\omega_c + \omega_c^2}$$

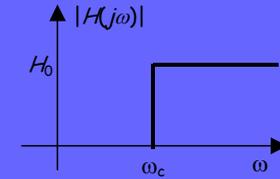
Respuesta en amplitud

$$|H(\omega)| = H_0 \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega_c^2 - \omega^2)^2 + 2\omega^2\omega_c^2}} = H_0 \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega_c^4 + \omega^4}} = \frac{H_0}{\sqrt{\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^4 + 1}}$$

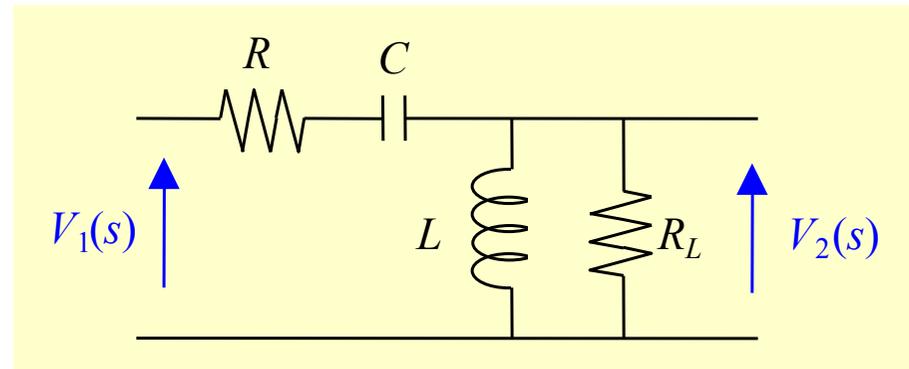


$$|H(\omega)| = \frac{H_0}{\sqrt{\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^4 + 1}}$$

Filtro paso alto de 2º orden (III)



$$V_2(s) = \frac{V_1(s)(sL // R_L)}{R + \frac{1}{sC} + (sL // R_L)}$$



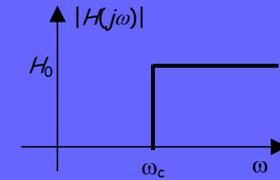
$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{R + \frac{1}{sC} + \frac{sLR_L}{sL + R_L}} \cdot \frac{sLR_L}{sL + R_L} =$$

$$= \frac{sLR_L}{RsL + RR_L + \frac{sL + R_L}{sC} + sLR_L} = \frac{s^2 LR_L C}{s^2 LC(R + R_L) + s(CRR_L + L) + R_L}$$

Si se usa la aproximación anterior:

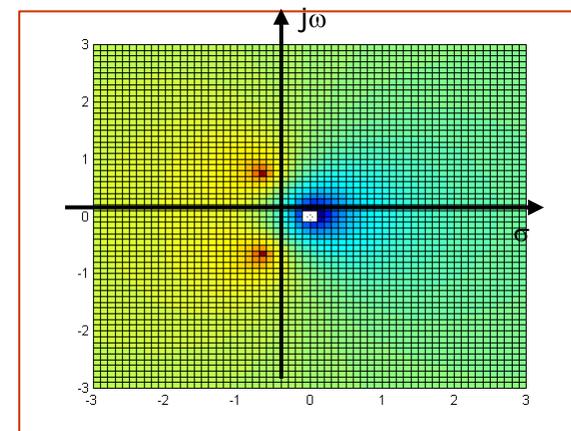
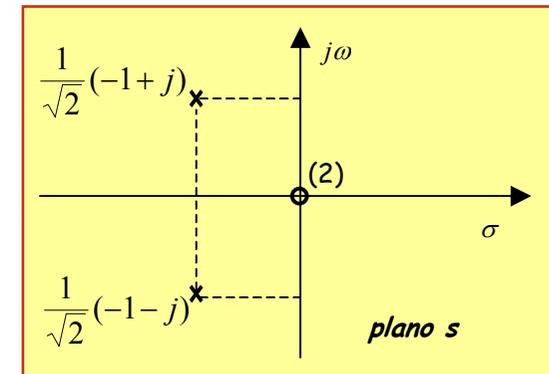
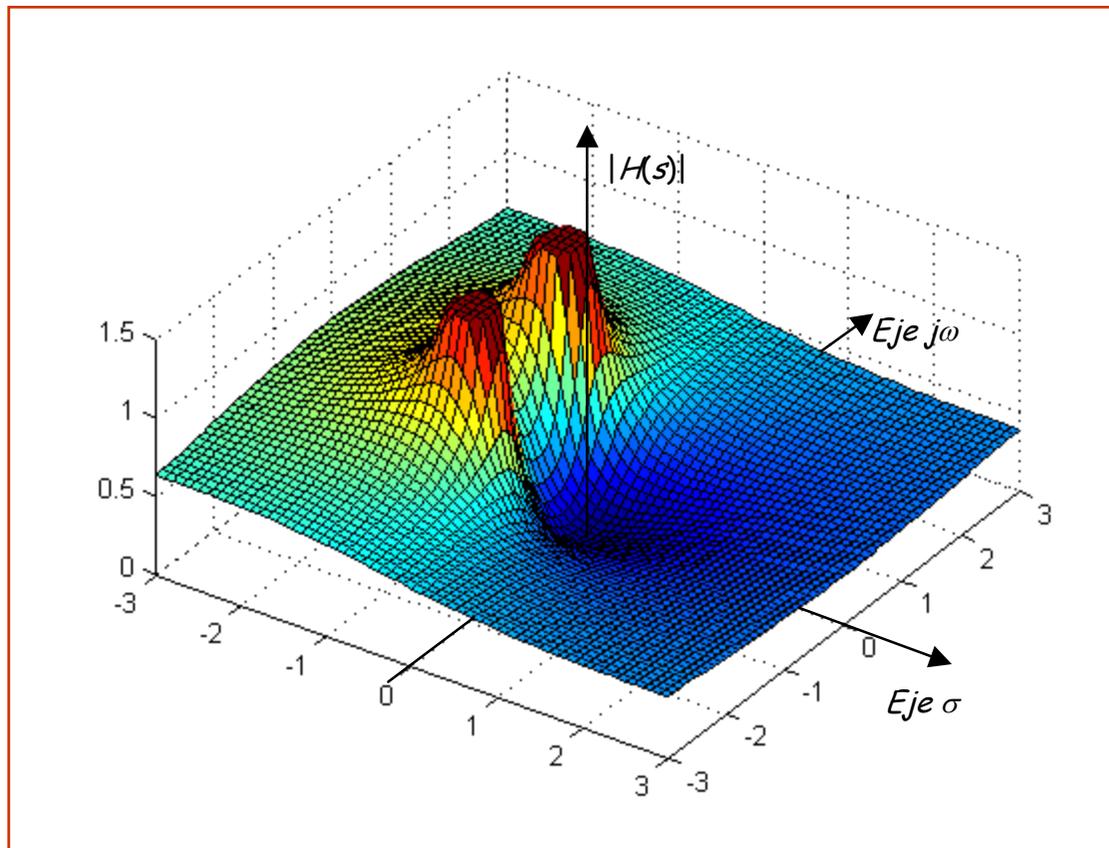
$$H(s) = \underbrace{H_0}_{\text{red}} \frac{s^2}{s^2 + \underbrace{s\sqrt{2}\omega_c}_{\text{yellow}} + \underbrace{\omega_c^2}_{\text{blue}}} = \frac{\underbrace{LCR_L}_{\text{red}}}{LC(R + R_L)} \frac{s^2}{s^2 + s \frac{\underbrace{CRR_L + L}_{\text{yellow}}}{LC(R + R_L)} + \frac{\underbrace{R_L}_{\text{blue}}}{LC(R + R_L)}}$$

Filtro paso alto de 2º orden (IV)

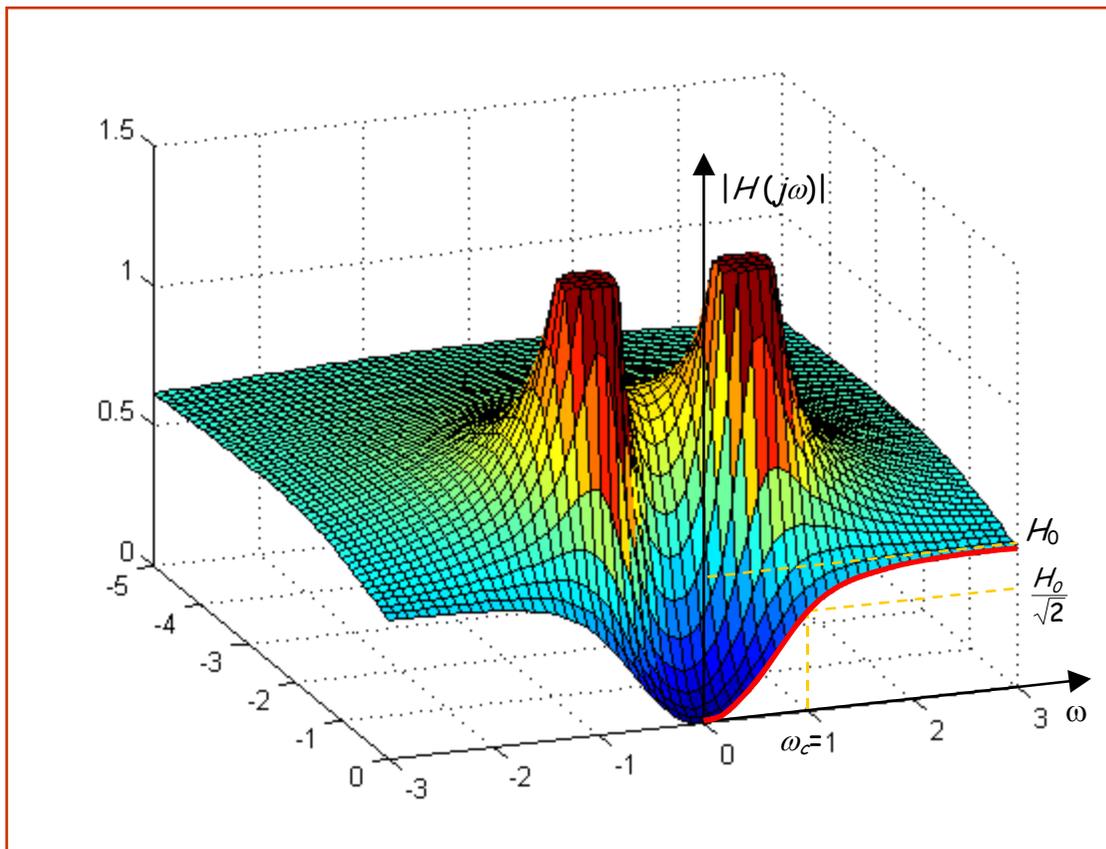
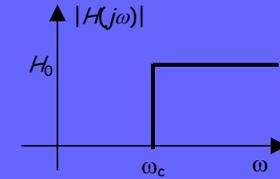


$$H_0 = 0.5$$
$$\omega_c = 1$$

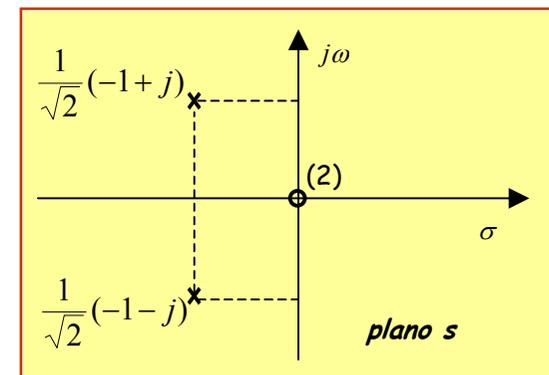
$$H(s) = 0.5 \frac{s^2}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$



Filtro paso alto de 2º orden (V)



$$H(s) = 0.5 \frac{s^2}{s^2 + \sqrt{2}s + 1}$$



Filtro paso banda (I)

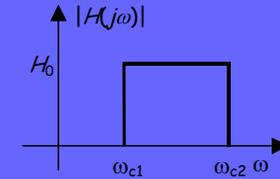
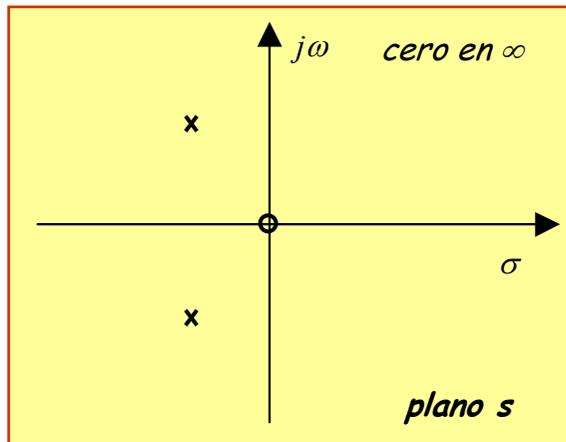


Diagrama de polos y ceros



Función de transferencia

$$H(s) = H_0 \frac{Bs}{s^2 + Bs + \omega_0^2}$$

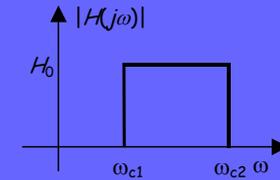
Respuesta en frecuencia

$$H(\omega) = H_0 \frac{Bj\omega}{-\omega^2 + j\omega B + \omega_0^2}$$

Respuesta en amplitud

$$|H(\omega)| = H_0 \frac{\omega B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega B)^2}} = \frac{H_0}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega B}\right)^2 + 1}}$$

Filtro paso banda (II)



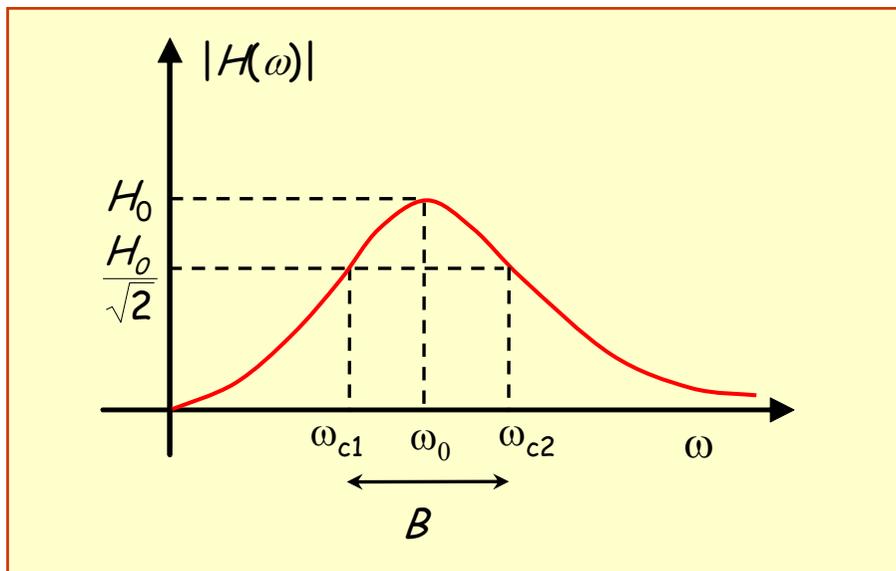
$$|H(\omega)| = \frac{H_0}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega B}\right)^2 + 1}} = \frac{H_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega B}\right)^2 = 1 \Rightarrow \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega B} = \pm 1$$

$$\Rightarrow \omega^2 \pm \omega B - \omega_0^2 = 0$$

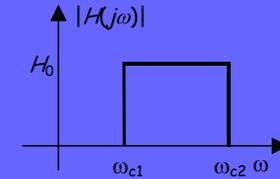
$$\omega = \frac{\pm B \pm \sqrt{B^2 + 4\omega_0^2}}{2}$$

$$\begin{cases} \omega_{c2} = \frac{B + \sqrt{B^2 + 4\omega_0^2}}{2} \\ \omega_{c1} = \frac{-B + \sqrt{B^2 + 4\omega_0^2}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega_{c2} - \omega_{c1} = B \\ \omega_{c1} \omega_{c2} = \omega_0^2 \end{cases}$$

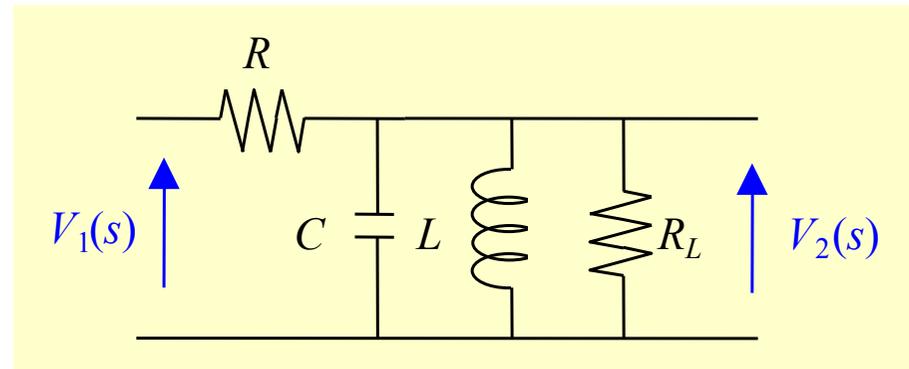


Filtro paso banda (III)



Ejemplo 6:

$$V_2(s) = \frac{V_1(s) \left(\frac{1}{sC} // sL // R_L \right)}{R + \left(\frac{1}{sC} // sL // R_L \right)}$$

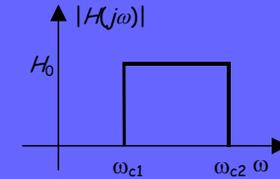


$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{R + \frac{1}{\frac{1}{sL} + \frac{1}{R_L} + sC}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{sL} + \frac{1}{R_L} + sC} = \frac{1}{\frac{R}{sL} + \frac{R}{R_L} + RsC + 1} = \frac{sL}{s^2 LCR + s(LR/R_L + L) + R}$$

Igualando términos:

$$H(s) = H_0 \frac{Bs}{s^2 + Bs + \omega_0^2} = \frac{R_L}{R + R_L} \cdot \frac{s \frac{R + R_L}{CR_L R}}{s^2 + s \frac{R + R_L}{CR_L R} + \frac{1}{LC}}$$

Filtro paso banda (IV)



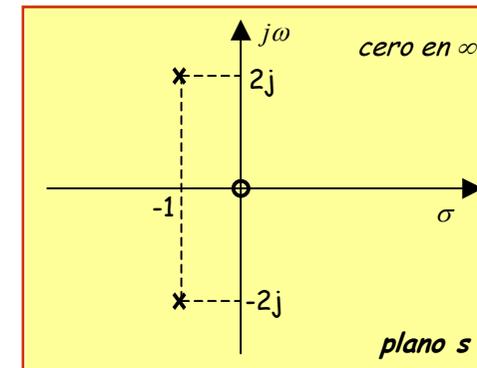
Si imponemos condiciones:

$$H_0=0.5, B=2 \text{ rad/s}, \omega_0=5^{1/2} \text{ rad/s}, R=1\Omega \quad H(s) = 0.5 \frac{2s}{s^2 + 2s + 5} = \frac{s}{(s+1-2j)(s+1+2j)}$$

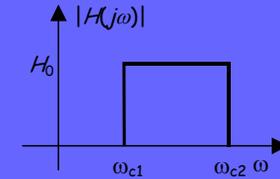
$$H_0 = \frac{R_L}{R + R_L} \quad R_L = 1\Omega$$

$$B = \frac{R + R_L}{CRR_L} \quad C = 1F$$

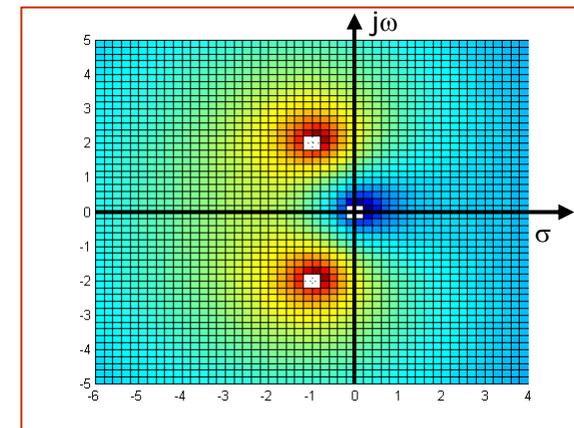
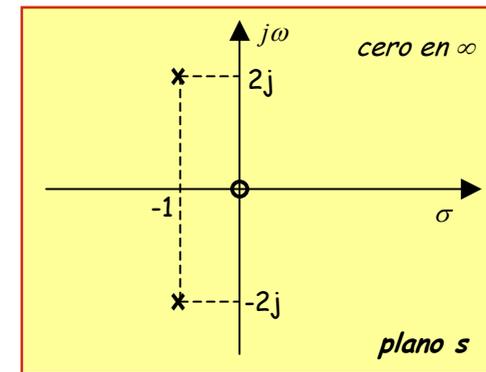
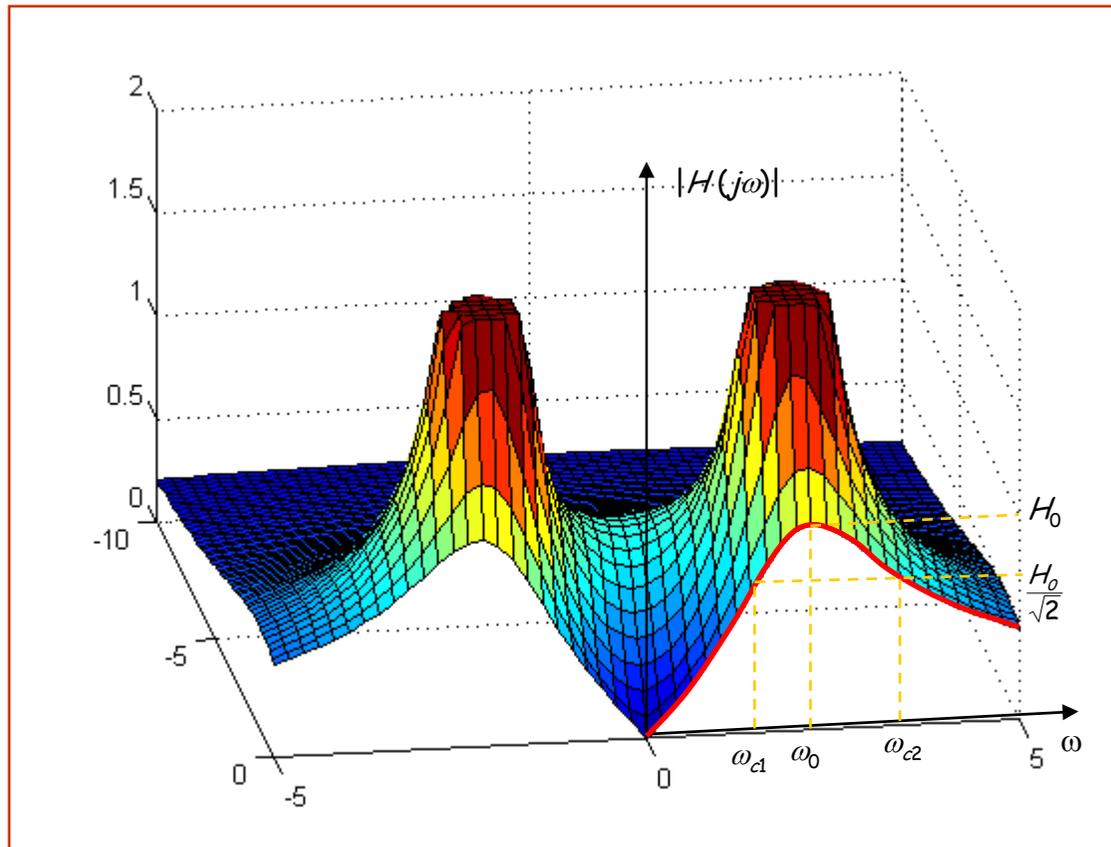
$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad L = 5H$$



Filtro paso banda (IV)



$$H(s) = 2 \frac{s}{(s+1-2j)(s+1+2j)}$$



Síntesis

1. Desarrollo en serie de Fourier

$$a_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Ecuación de análisis del CTFS

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

Ecuación de síntesis del CTFS

2. Transformada de Fourier

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Ecuación de síntesis de la CTFT

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

Ecuación de análisis de la CTFT



Síntesis

3. Los coeficientes a_k de la extensión periódica son muestras equiespaciadas de la función $X(\omega)$

$$a_k = \frac{1}{T_0} X(\omega) \Big|_{\omega = k\omega_0}$$

4. CTFT para señales periódicas

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{TF} 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

5. Relación con la función de sistema:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = H(s) \Big|_{s = j\omega}, \quad j\omega \in ROC$$

6. **Principio de incertidumbre:** Las propiedades de escalado en el tiempo y en frecuencia nos indican que **si una señal se expande en uno cualquiera de los dominios, t o ω (f), inevitablemente se comprime en el dominio complementario.**



Síntesis

7. Respuesta de sistemas LTI a exponenciales complejas

$$\begin{array}{ccc} x(t) = e^{j\omega_0 t} & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & \boxed{\begin{array}{c} \text{LTI} \\ H(s) \end{array}} & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & y(t) = x(t)H(\omega_0) \\ x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} & & & & y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \end{array}$$

8. Respuesta en frecuencia de sistemas LTI de tiempo continuo (sólo si $\{s=j\omega\} \subset \text{ROC}_H$)

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = H(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$$

9. Respuesta en frecuencia de sistemas LTI descritos por e.d.l.c.c.

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k}$$

