Análisis y caracterización de sistemas de discretos mediante la transformada de Fourier

1. Introducción.
2. Respuesta de sistemas discretos LTI a señales exponenciales complejas.
3. Representación de señales periódicas: la serie discreta de Fourier.
4. Transformada de Fourier para secuencias no periódicas.
5. Transformada de Fourier para secuencias periódicas.
6. Respuesta en frecuencia de sistemas discretos.
7. Estudio de señales y sistemas discretos en el dominio transformado Z.
8. La función de sistema de sistemas discretos
9. Sistemas de tiempo discreto descritos por ecuaciones en diferencias lineales de coeficientes constantes.
10. Introducción al filtrado.

1. Introducción

- El análisis de Fourier es una de las herramientas más útiles en procesado de señal.
- Se basa en la descomposición de una señal en términos de un conjunto de funciones base (sinusoides de diferente frecuencia).

- Señales continuas (analógicas):
  - Periódicas: Series de Fourier (CTFS).
  - No periódicas: Transformada de Fourier (CTFT).

- Señales discretas (digitales):
  - Periódicas: Series de Fourier en tiempo discreto (DTFS)
  - No periódicas: Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT)

1. Introducción: autovalores y autofunciones

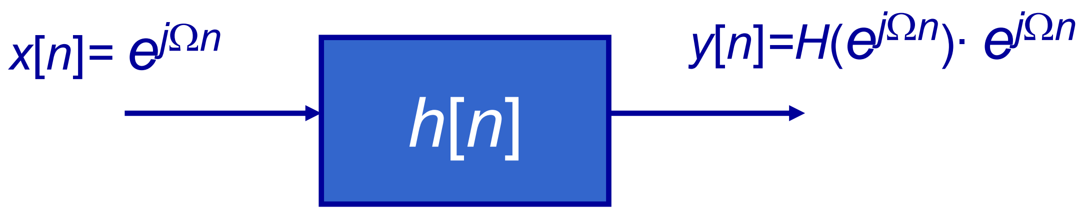
- Para un sistema LTI con respuesta al impulso $h[n]$ la respuesta a una exp. compleja es otra exp. compleja:

$$x[n] = z_0^{\,n}$$

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z_0^{\,n-k} = z_0^{\,n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z_0^{\,-k}$$

$$y[n] = z_0^{\,n} H(z_0)$$

- Siendo:
  - $z_0^n = |z_0|^n e^{j\Omega_o n}$ Ξ AUTOFUNCIÓN
  - $H(z_0)$ Ξ AUTOVALOR ∈ ¢
  - Por ser z_0^n *autofunción,* también lo es $e^{j\Omega n}$ (z^n *con* $|z|=1$)
  - Por ser $H(z_0)$ *autovalor,* también lo es $H(e^{j\Omega_o n})$



2. Respuesta de sistemas LTI a señales exponenciales complejas

- Supongamos que la entrada es una combinación lineal de exponenciales:

$$x[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k \, \mathrm{e}^{j\Omega_k n} \Rightarrow$$

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k h[n] * \mathrm{e}^{j\Omega_k n}$$

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k H\left(\mathrm{e}^{j\Omega_k}\right) \mathrm{e}^{j\Omega_k n} = \sum_{k=1}^{N} b_k \, \mathrm{e}^{j\Omega_k n}}$$

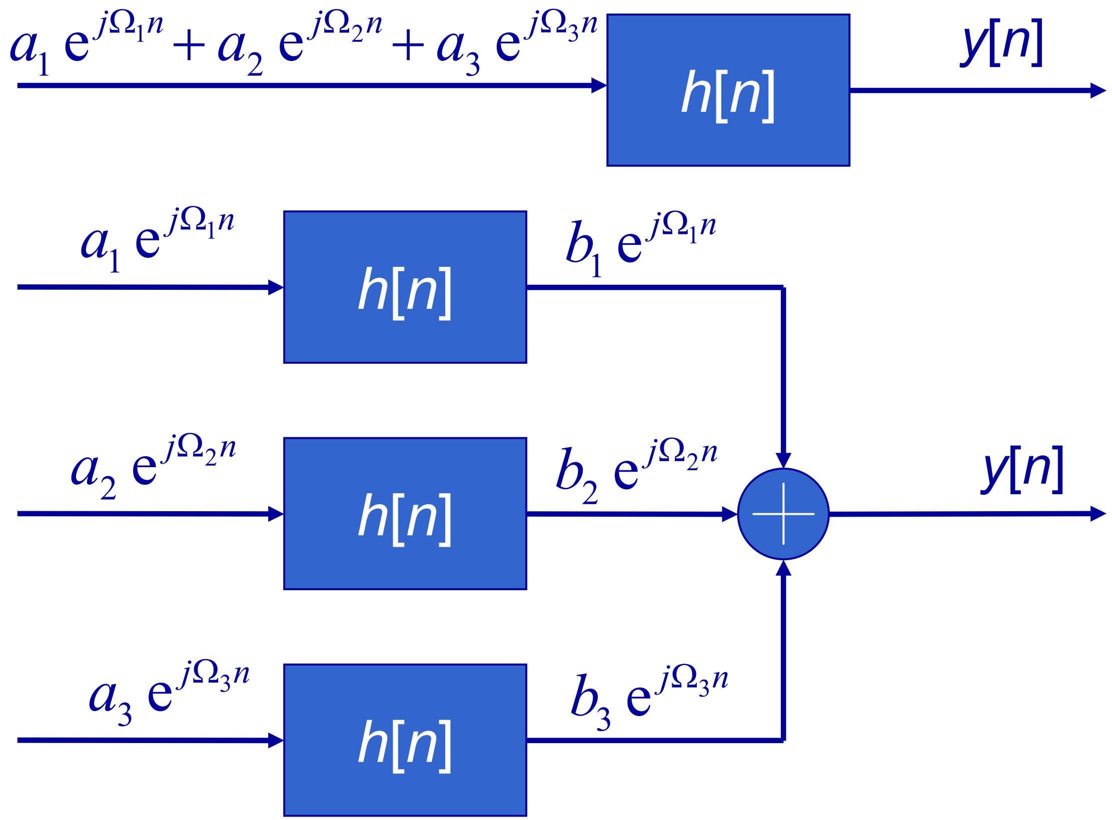
$H(e^{j\Omega_k}) \; \Xi \; H(\Omega_k) \in$ ¢

$a_k, b_k \in$ ¢

- La respuesta es otra combinación lineal de las mismas exponenciales.
- Esto es considerablemente más sencillo que realizar la convolución.
- Por ello vamos a estudiar qué tipo de señales se pueden representar mediante combinación lineal de exponenciales complejas.

Respuesta de sistemas LTI a una combinación lineal de exponenciales complejas

- De forma más gráfica, y aplicando la propiedad de linealidad…



Propiedades de las exponenciales complejas discretas

- Recordemos que en tiempo discreto y, más concretamente, en las exponenciales del tipo: $x[n]=e^{j\Omega_0 n}$
  - Si Ω_0 crece, la frecuencia **NO** siempre aumenta
  - Si Ω_0 decrece, la frecuencia **NO** siempre disminuye
  - Si $\Omega_0= \Omega'_0+2k\pi \Rightarrow$ las señales son iguales:
    - $e^{j\Omega'_0 n} = e^{j(\Omega_0 +2k\pi)n} = e^{j\Omega_0 n}$

Omega0 se puede interpretar como un angulo...

  - $e^{j\Omega_0 n}$ es periódica $\Leftrightarrow \cancel{\Omega_0}=2m\pi/N$
  - Si es periódica $(\cancel{\Omega_0}=2m\pi/N) \Rightarrow$
    - Periodo fundamental $N_0=N$, si N y m son primos entre sí
    - Frecuencia fundamental $f_0=1/N_0$
    - Pulsación fundamental $2\pi f_0=2\pi/N_0$

Esto va a ser nuestro Omega0

    - Sólo existen N_0 armónicos diferentes

3. Representación de señales periódicas: la serie de Fourier en tiempo discreto (DTFS)

- De modo análogo al tiempo continuo, para cualquier señal periódica es de esperar que se pueda obtener un desarrollo como combinación lineal de funciones armónicas.
- Como el número de armónicos en tiempo discreto es finito y coincide con el periodo fundamental de la señal, si tenemos una señal periódica: $x[n]=x[n+N]$, $\forall n$ y N entero positivo, se espera que se pueda expresar de la forma:

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k \, e^{jk\Omega_o n} \qquad \textit{siendo} \quad \Omega_0 = 2\pi / N$$

a_k periodico de periodo N

- Como sólo existen *N* armónicos diferentes y se repiten periódicamente, la suma se extenderá sobre cualquier intervalo de *N* valores consecutivos.
- Sustituyendo el valor de Ω_0 se obtiene:

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=<N>} a_k \, e^{jk\frac{2\pi}{N}n}}$$

Ecuación de síntesis de la DTFS

DTFS: Cálculo de los coeficientes (I)

- Para comprobar que cualquier secuencia periódica tiene desarrollo en serie de Fourier es necesario obtener el valor de los coeficientes a_k.
- En la ecuación de síntesis, multiplicamos ambos lados por $e^{-j2k\pi n/N}$ y obtenemos:

$$x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} = \sum_{k=<N>} a_k\, e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\, e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} \Rightarrow$$

$$x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} = \sum_{k=<N>} a_k\, e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n}$$

. *Sumamos N valores:*

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=<N>} a_k\, e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} = \sum_{k=<N>} a_k \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n}$$

DTFS: Cálculo de los coeficientes (II)

- El último sumatorio es una progresión geométrica de N términos:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha},\ \text{si } \alpha \neq 1 \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = N \ \text{si } \alpha = 1$$

- Observamos que
  - Si $k-m \neq rN$
  - r entero,
    - ⇨ $e^{-j2\pi(k-m)n/N} \neq 1$
  - Si $k-m = rN$
  - r entero,
    - ⇨ $e^{-j2\pi(k-m)n/N} = 1$

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n} = \frac{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)N}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)}} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi rn} = N$$

- ~~Como este resultado (0 ó N) hay que sumarlo sobre N índices:~~

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} = N a_m \Rightarrow \boxed{a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}}$$

Ecuación de análisis

Propiedades

- Como los armónicos se repiten cada *N* índices, los coeficientes a_k también:

$$a_{k+N} = a_k$$

SECUENCIA PERIODICA!!!!

- Si $x[n]$ es real los coeficientes son hermíticos:

$$a_k = a^*_{-k}$$

- Como el DTFS es una suma finita de términos, siempre converge y es una representación exacta de la secuencia.

NO HAY PROBLEMAS DE CONVERGENCIAS

DTFS de las funciones seno y coseno

$$x[n]=\cos(\Omega_0 n)=\frac{e^{j\Omega_0 n}}{2}+\frac{e^{-j\Omega_0 n}}{2}=\frac{1}{2}e^{jm\frac{2\pi}{N}n}+\frac{1}{2}e^{-jm\frac{2\pi}{N}n}$$

$$a_m=\frac{1}{2},\qquad a_{-m}=\frac{1}{2}$$

Si $\Omega_0=4\pi/5 \Rightarrow m=2,\ N=5$

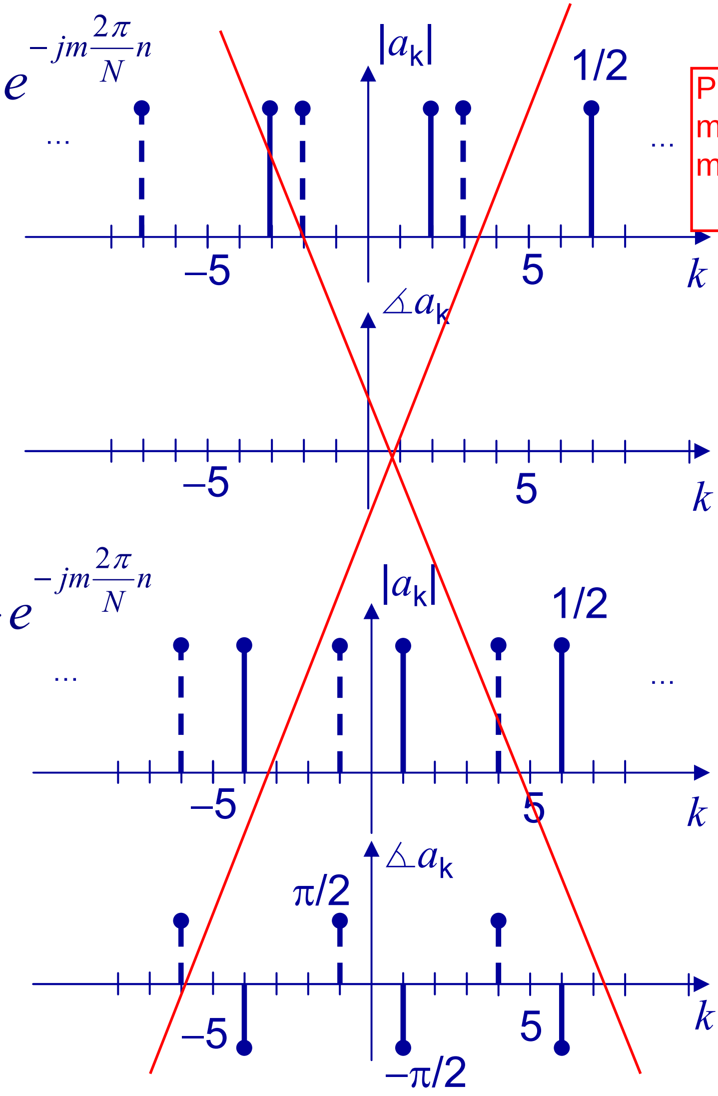
$$a_2=\frac{1}{2},\qquad a_{-2}=\frac{1}{2}$$

$$x[n]=\text{sen}(\Omega_0 n)=\frac{e^{j\Omega_0 n}}{2j}-\frac{e^{-j\Omega_0 n}}{2j}=\frac{1}{2j}e^{jm\frac{2\pi}{N}n}-\frac{1}{2j}e^{-jm\frac{2\pi}{N}n}$$

$$a_m=\frac{1}{2}j,\qquad a_{-m}=-\frac{1}{2}j$$

Si $\Omega_0=2\pi/5 \Rightarrow m=1,\ N=5$

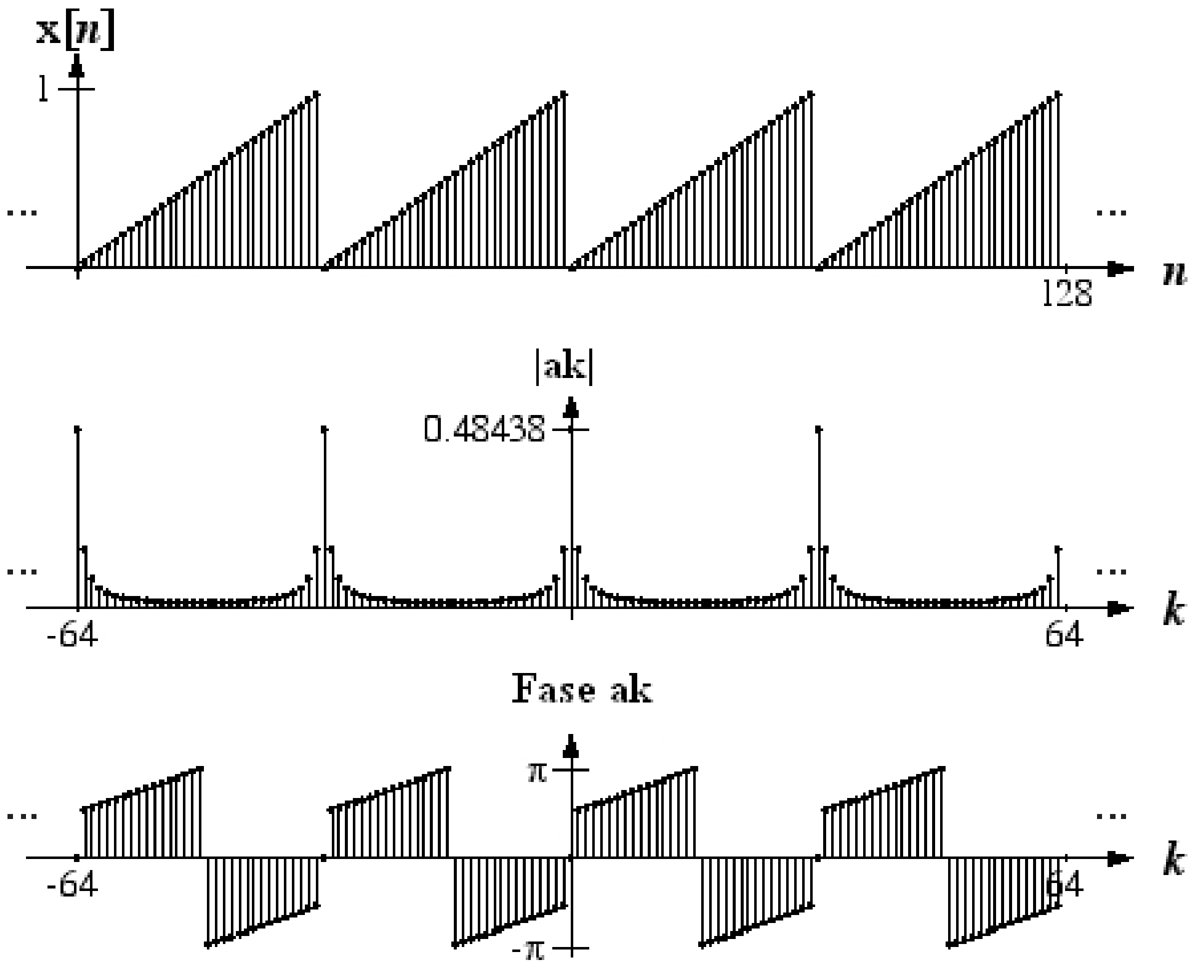
$$a_1=\frac{1}{2j},\qquad a_{-1}=-\frac{1}{2j}$$



Es "como" un tren de deltas...mirad transparencias despues

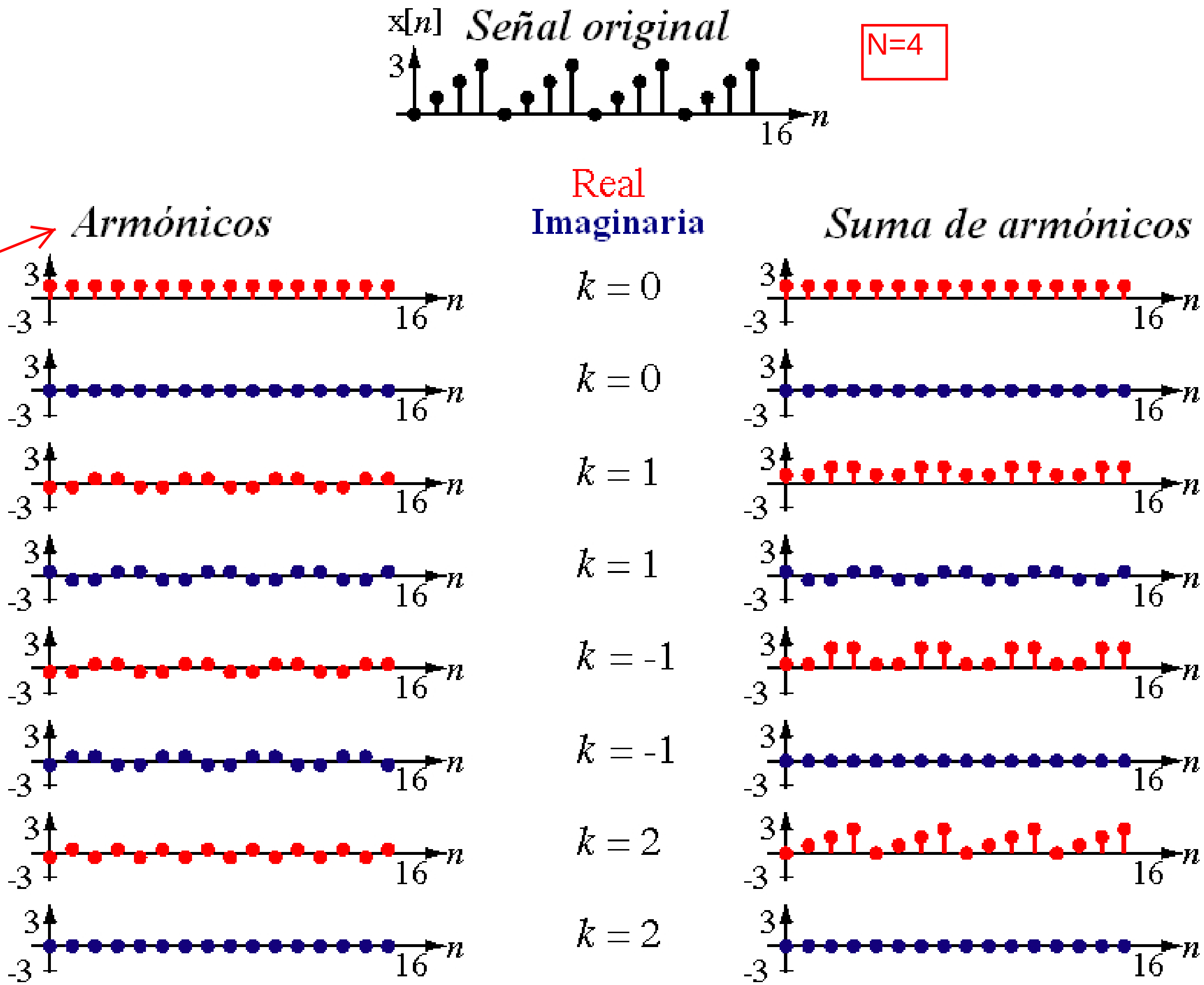
Por ahora mejor no mirar...

Ejemplo



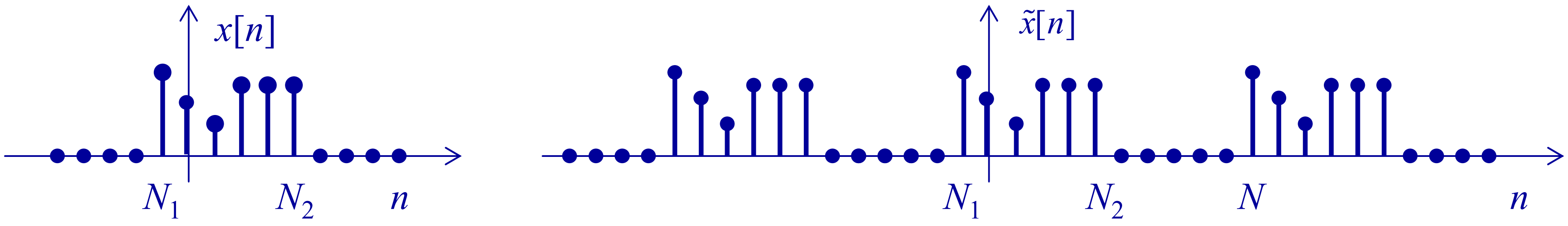
Representación gráfica de la DTFS

seria a_k multiplicado por el correspondient exponencial



4. Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT) para secuencias no periódicas

Realizamos una extensión periódica $\tilde{x}[n]$ de una secuencia de duración finita $x[n]$



Expresamos la señal $\tilde{x}[n]$ mediante su DTFS:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} a_k \, e^{jk\frac{2\pi}{N}n} \quad \textit{con} \quad a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \tilde{x}[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

En el intervalo $N_1 \leq n \leq N_2$, se cumple $\tilde{x}[n] = x[n]$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$$

DTFT para secuencias no periódicas (I)

Si definimos:

Definimos otra cosa aqui: Transformada de Fourier para una señal discreta (no periodica)

$$X(e^{j\Omega}) \equiv X(\Omega) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\mathrm{e}^{-j\Omega n} \Rightarrow$$

- Los coeficientes a_k son muestras equiespaciadas de la señal $X(\Omega)$

$$\boxed{a_k = \frac{1}{N} X(\Omega)\Big|_{\Omega = k\Omega_0}}$$

donde $\Omega_0 = \dfrac{2\pi}{N}$

- Podemos sintetizar la expansión periódica de la señal como:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=<N>} \frac{1}{N} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=<N>} X(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \Omega_0$$

DTFT para secuencias no periódicas (II)

Siendo que las pulsaciones diferentes estan en un intervalo de 2ì

- Si hacemos $N \to \infty \Rightarrow$
  - $\Omega_0 \to d\Omega$,
  - $k\Omega_0 \to \Omega$,
  - la suma tiende a una integral que se extiende a todas las posibles pulsaciones (intervalo 2π) $\tilde{x}[n] \Rightarrow x[n]$

$$\tilde{x}[n] = x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega) e^{jk\Omega_0 n} d\Omega$$

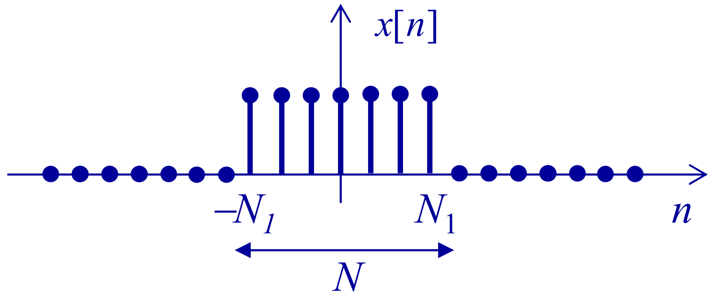
$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

Ecuación de síntesis de la DTFT

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

Ecuación de análisis de la DTFT

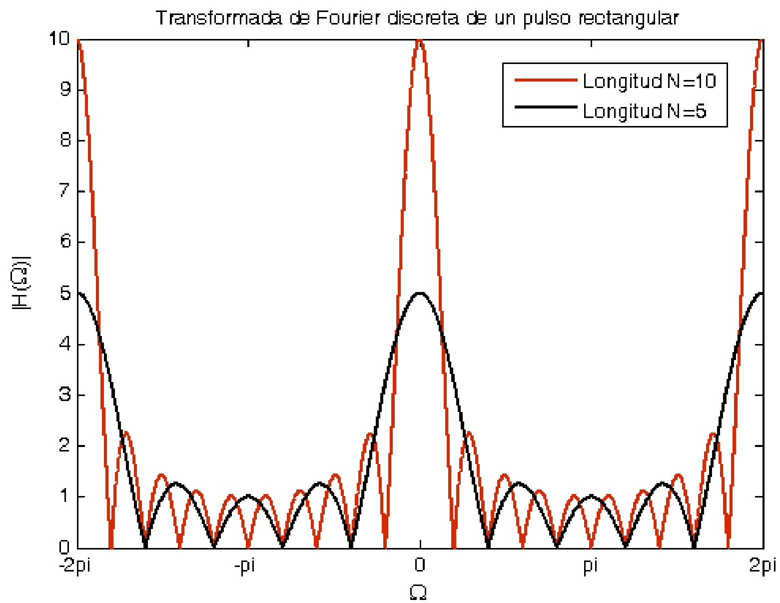
Ejemplo



$$X(\Omega) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=-N_1}^{N_1} 1\,e^{-j\Omega n}$$

$$= \frac{e^{j\Omega N_1} - e^{-\Omega(N_1+1)}}{1 - e^{-j\Omega}} \cdot \frac{e^{-j\frac{\Omega}{2}}}{e^{-j\frac{\Omega}{2}}} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\left(\Omega(N_1 + \frac{1}{2})\right)}{\operatorname{sen}\frac{\Omega}{2}}$$



Función sinc{·} ~~discreta~~

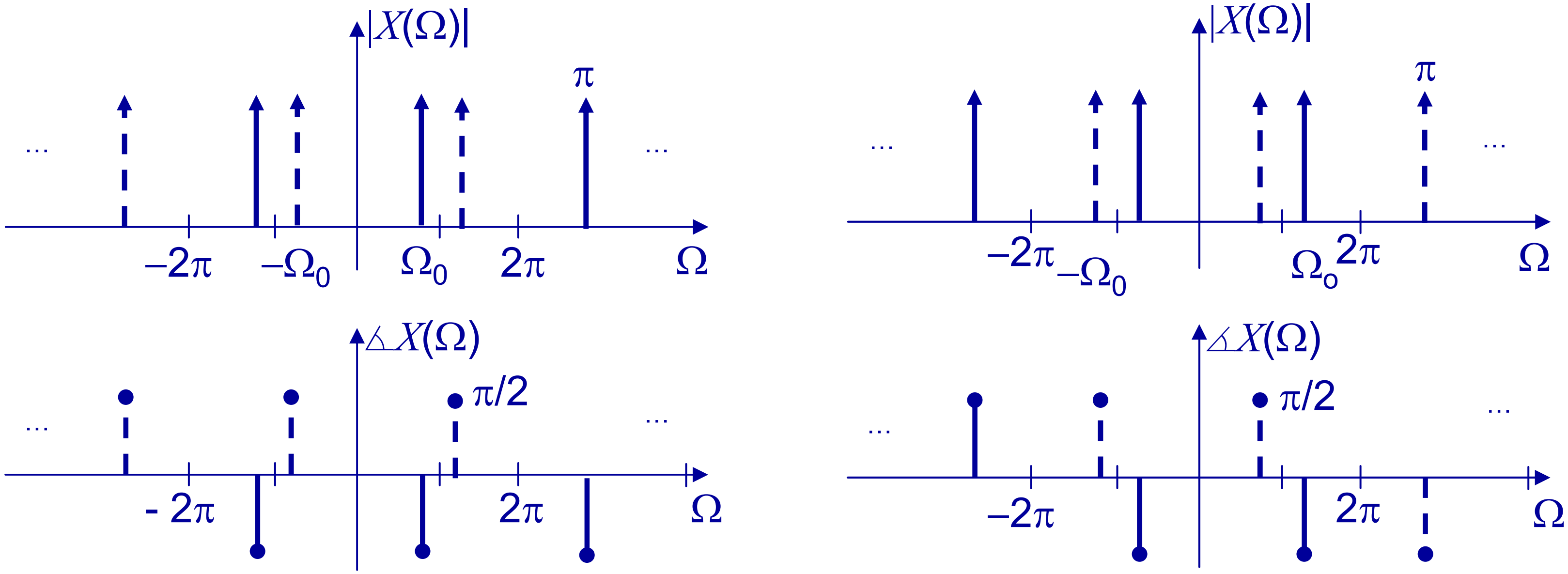
periodica de periodo 2pi

DTFT de la función seno

$$x[n] = \mathrm{sen}\left(\Omega_0 n\right) = \frac{e^{j\Omega_0 n}}{2j} - \frac{e^{-j\Omega_0 n}}{2j}$$

PERO AQUI YA ESTAMOS CONSIDERANDO UNA SEÑAL PERIODICA!!! AUN NO HEMOS HABLADO de una TF de una señal periodica (en discreto)...

$$X(\Omega) = \frac{\pi}{j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\delta(\Omega - \Omega_o - 2k\pi) - \delta(\Omega + \Omega_o - 2k\pi) \right]$$



Si $0<\Omega_0<\pi$

Si $\Omega_0>\pi$

Consecuencias, analogías y diferencias con el caso de tiempo continuo

- La DTFT de secuencias $X(\Omega)$ es una función de variable continua
- La ecuación de análisis es una suma y no una integral
- La ecuación de análisis es válida siempre que $\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$

condición suficiente con el cuadrado...

- $X(\Omega)$ es siempre periódica de periodo 2π

por esto mejor representar de -pi a pi

- Las bajas frecuencias corresponden a pulsaciones próximas a cero y a cualquier múltiplo entero de 2π
- Las altas frecuencias corresponden a pulsaciones próximas a π y a cualquier múltiplo impar de π
- La ecuación de síntesis se extiende en un intervalo 2π (todas las posibles pulsaciones en discreto)
- La señal $x[n]$ se puede sintetizar como superposición de todas las posibles exponenciales complejas diferentes en discreto
- La ecuación de síntesis converge siempre que $X(\Omega)$ tenga valores finitos en todas las pulsaciones

Propiedades de la DTFT

Señal	**Transformada**
$x[n]$ $y[n]$	$\left.\begin{matrix} X(\Omega) \\ Y(\Omega) \end{matrix}\right\}$ Periódicas de periodo 2π
$ax[n]+by[n]$	$aX(\Omega)+bY(\Omega)$
$x[n-n_0]$	$e^{-j\Omega n_0}X(\Omega)$
$e^{j\Omega_0 n}x[n]$	$X(\Omega-\Omega_0)$
$x^*[n]$	$X^*(-\Omega)$
$x[-n]$	$X(-\Omega)$
$x_{(k)}[n]=\begin{cases} x[n/k] & \text{si } n/k \text{ entero} \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$	$X(k\Omega)$
$x[n]*y[n]$	$X(\Omega)Y(\Omega)$
$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\theta)Y(\Omega-\theta)d\theta$
$x[n]-x[n-1]$	$\left(1-e^{-j\Omega}\right)X(\Omega)$

Propiedades de la DTFT

Señal	**Transformada**
$\cancel{\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]}$	$\cancel{\frac{X(\Omega)}{1-e^{j\Omega}} + \pi X(0)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2k\pi)}$
$nx[n]$	$j\frac{d}{d\Omega}X(\Omega)$
$\boxed{x[n] \text{ real}}$	$\left\{\begin{array}{c} X(\Omega)=X^*(-\Omega) \\ \boxed{\mathrm{Re}\{X(\Omega)\}=\mathrm{Re}\{X(-\Omega)\}} \\ \mathrm{Im}\{X(\Omega)\}=-\mathrm{Im}\{X(-\Omega)\} \\ \boxed{\lvert X(\Omega)\rvert=\lvert X(-\Omega)\rvert} \\ \angle X(\Omega)=-\angle X(-\Omega) \end{array}\right.$

Relación de Parseval para secuencias no periódicas

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty}\lvert x[k]\rvert^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\lvert X(\Omega)\rvert^2\,d\Omega}$$

Pares transformados (señales no periódicas)

Secuencia	Transformada
$a^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-a\,\mathrm{e}^{-j\Omega}}$
$x[n]=\begin{cases}1, & \lvert n\rvert \le N_1\\ 0, & \lvert n\rvert > N_1\end{cases}$	$\dfrac{\operatorname{sen}[\Omega(N_1+1/2)]}{\operatorname{sen}(\Omega/2)}$
$\dfrac{\operatorname{sen} Wn}{\pi n}=\dfrac{W}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\dfrac{Wn}{\pi}\right)$ $0<W<\pi$	$X(\Omega)=\begin{cases}1, & 0\le\lvert\Omega\rvert\le W\\ 0, & W\le\lvert\Omega\rvert\le\pi\end{cases}$ Periódica de periodo 2π
$\delta[n]$	1
$u[n]$	$\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-j\Omega}}+\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-2\pi l)$
$\delta[n-n_0]$	$\mathrm{e}^{-j\Omega n_0}$
$(n+1)a^n u[n],\ \lvert a\rvert<1$	$\dfrac{1}{\left[1-a\,\mathrm{e}^{-j\Omega}\right]^2}$

5. Transformada de Fourier para secuencias periódicas (I)

Calculamos la DTFT de una exponencial compleja

$$x[n] = \mathrm{e}^{j\Omega_0 n} \xrightarrow{TF} ?$$

Para ello **postulamos** lo siguiente:

Transformada de Fourier Generalizada

$$e^{j\Omega_0 n} \xrightarrow{TF} X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k\right)$$

Para comprobar la validez, sintetizamos la señal que corresponde a *X*(Ω):

$$x'[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega = \int_{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k\right) e^{j\Omega n} d\Omega \Rightarrow$$

$$x'[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi} \delta\left(\Omega - \Omega_0 - 2\pi k\right) e^{j\Omega n} d\Omega = \int_{\Omega_0 - \pi}^{\Omega_0 + \pi} \delta\left(\Omega - \Omega_0\right) e^{j\Omega n} d\Omega = e^{j\Omega_0 n} = x[n]$$

DTFT para señales periódicas (II)

- Si tenemos una secuencia $x[n]$ periódica de periodo N, se puede obtener su DTFS:

$$x[n] = \sum_{k=<N>} a_k \, e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$

- Aplicando la propiedad de linealidad de la DTFS se tiene:

$$X(\Omega) = \sum_{k=<N>} a_k 2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N} - 2\pi l\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=<N>} 2\pi a_k \delta\left(\Omega - 2\pi\left(\frac{k}{N} + l\right)\right) \Rightarrow$$

Transformada de Fourier Generalizada

$$\boxed{X(\Omega) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi a_l \delta\left(\Omega - \frac{2\pi l}{N}\right)}$$

Pares transformados (señales periódicas)

Secuencia	Transformada
$\sum_{k=<N>} a_k\, e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$
$e^{j\Omega_0 n}$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l)$
$\cos \Omega_0 n$	$\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \{\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) + \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi l)\}$
$\mathrm{sen}\Omega_0 n$	$\frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \{\delta(\Omega - \Omega_0 - 2\pi l) - \delta(\Omega + \Omega_0 - 2\pi l)\}$
$x[n] = 1$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi l)$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n - kN]$	$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$
$x[n] = \begin{cases} 1, & \lvert n \rvert \le N_1 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$ $x[n+N] = x[n]$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(\Omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$ $\begin{cases} a_k = (2N_1 + 1) N \quad , \quad si\ k = 0 \pm lN \\ a_k = \dfrac{\mathrm{sen}\left[\frac{2\pi}{N}\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)\right]}{N\,\mathrm{sen}[2\pi / N]} \quad , \quad resto \end{cases}$

6. Respuesta en frecuencia de sistemas discretos (I)

- Dado un sistema LTI con respuesta al impulso *h*[*n*], se define la **respuesta en frecuencia** del sistema *H*(Ω) como:

$$\boxed{H(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\,\mathrm{e}^{-j\Omega n}}$$

$$x[n] \xrightarrow{\quad} \boxed{\begin{matrix} h[n] \\ H(\Omega) \end{matrix}} \xrightarrow{\quad y[n]=x[n]*h[n] \quad}$$

$$X(\Omega) \qquad\qquad Y(\Omega)=X(\Omega)\cdot H(\Omega)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}}$$

- La respuesta en frecuencia representa el conjunto de autovalores del sistema para las autofunciones del tipo: $x[n]=\mathrm{e}^{-j\Omega_0 n}$

$$x[n]=\mathrm{e}^{-j\Omega_0 n} \Rightarrow y[n]=H(\Omega_0)\,\mathrm{e}^{-j\Omega_0 n}$$

Respuesta en frecuencia de sistemas discretos (II)

- Dado que $H(\Omega)$ es una función compleja de variable real, es necesario conocer su módulo y su fase.

$$|H(\Omega)| = \frac{|Y(\Omega)|}{|X(\Omega)|} \quad \text{y} \quad \angle H(\Omega) = \angle Y(\Omega) - \angle X(\Omega)$$

- El módulo o amplitud de la respuesta en frecuencia (o **respuesta en amplitud**) representa la ganancia del sistema a cada pulsación Ω o componente espectral
- La fase de la respuesta en frecuencia (o **respuesta en fase**) representa el desfase introducido por el sistema a cada pulsación Ω o componente espectral
- La respuesta en frecuencia de un sistema LTI existirá si y solo si el sistema es **estable**.

7. Estudio de señales y sistemas discretos en el dominio transformado Z

- Se define la transformada *Z* (TZ) para poder trabajar de forma más sencilla con sistemas de tiempo discreto.
- Permite la utilización de la teoría de variable compleja en problemas de señales y sistemas discretos.
- Equivalente a la transformada de Laplace.
- La transformada de Fourier discreta es una particularización de la transformada *Z.*
- Al igual que la transformada de Fourier, la TZ convierte una convolución en el domino temporal en una multiplicación en el dominio *z*.
- Su utilidad principal consiste en el análisis y síntesis de filtros digitales.
- La configuración de polos y ceros determina el tipo de filtro digital y puede usarse para interpretar su comportamiento frecuencial.
- La **estabilidad** puede estudiarse en términos de la localización de los polos en el plano *z.*

La transformada Z

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot r^{-k} \cdot e^{-j\Omega k} = TZ\{x[n]\}$$

$$x[n] \xrightarrow{TZ} X(z)$$

$z \in ¢,\ X(z) \in ¢$

$z = r \cdot e^{j\Omega}$ (forma polar)

- Ω corresponde a una pulsación
- La definición planteada **no asegura que la transformación exista**
- Su representación será tridimensional
- Para que exista la TZ de una secuencia *x*[*n*] deben existir algunos valores de la variable *z* para los cuales la suma converja. En caso contrario no existe *X*(*z*)
- Al conjunto de valores de *z* para los cuales la integral converge, se le llama **región de convergencia** (*ROC*) de *X*(*z*) ≡ ROC_X.
- La *ROC* se representa en el plano ¢ mediante una **zona sombreada**

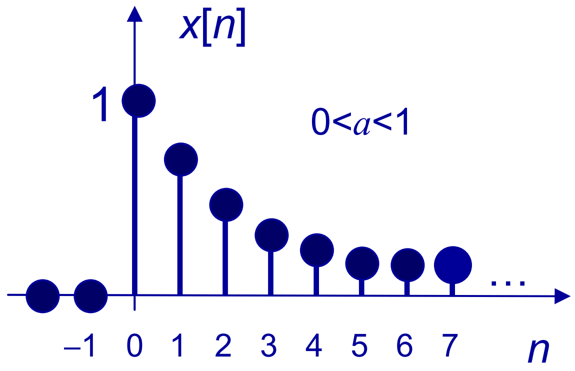
Ejemplo (I)

- Se pretende calcular la TZ de una serie exponencial

$$x[n] = a^n \cdot u[n] \quad , \quad |a| < 1$$

aplicando la definición:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n \cdot u[n] \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cdot z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot z^{-1})^n$$



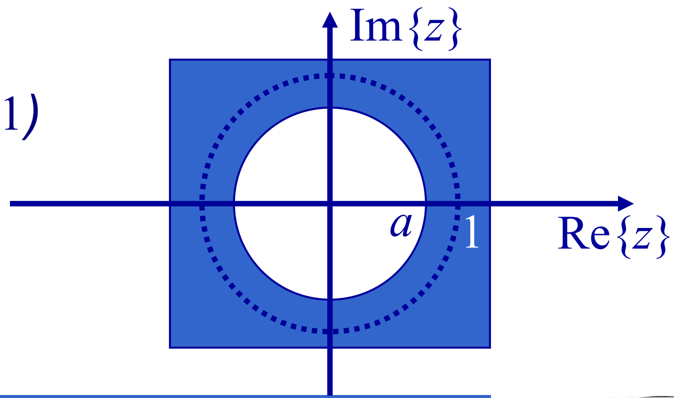
esta expresión converge si:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a \cdot z^{-1}| < \infty$$

Por lo tanto, el criterio de convergencia es: $|z^{-1}a|<1 \rightarrow |z|>|a|$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad \textit{(siendo } \left|\frac{a}{z}\right| < 1\textit{)}$$

$$TZ\left\{a^n u(n)\right\} = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad , \quad |z| > |a|$$



Ejemplo (II)

- Se pretende calcular la TZ de una serie exponencial de izquierdas

$$x'[n] = -a^n u[-n-1] \quad , \quad |a| < 1$$

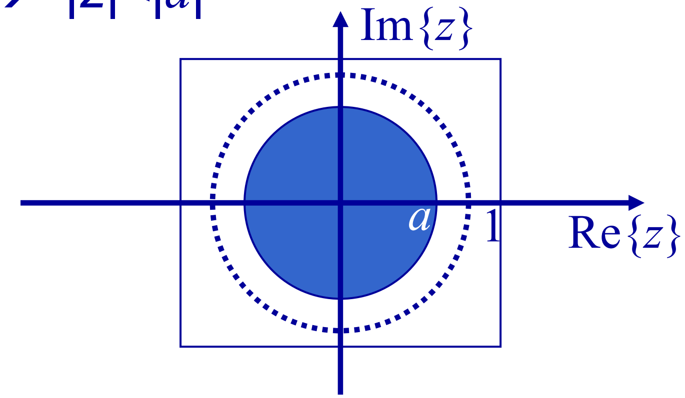
aplicando la definición:

$$X'(z) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[-n-1] \cdot z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n} z^n$$

el criterio de convergencia es: $|z^{-1}a|>1 \rightarrow |z|<|a|$

$$X'(z) = 1 - \frac{1}{1-a^{-1}z} = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

$$TZ\left\{-a^n u[-n-1]\right\} = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad , \quad |z| < |a|$$



- Observamos que $X(z)=X'(z)$.
- La única diferencia está en las *ROC*: $ROC_X \neq ROC_{X'}$
- Es necesario especificar la **expresión algebraica** y la ***ROC***

Convergencia

- La TZ no converge para todas las secuencias, ni para todos los valores de z.
- Para una determinada secuencia, el conjunto de valores de z para los cuales la TZ converge, se denomina **Región de Convergencia (*ROC*)**
- Para que la TZ de una secuencia sea convergente es necesario que la serie sea absolutamente sumable

Diagrama de polos y ceros (I)

- Ya que la TZ es **función de una variable compleja**, es conveniente describirla e interpretarla usando el plano complejo
- Un grupo importante de TZ está constituido por aquellas funciones $X(z)$ que son **racionales**, es decir son un cociente de polinomios en z:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}; \qquad \textit{donde } N(z) \textit{ y } D(z) \textit{ son polinomios en } z$$

- **Ceros**: valores de z que anulan a $X(z)$
  - Por notación: **CERO ≡ o**
- **Polos:** valores de z que hacen ∞ a $X(z)$
  - Por notación: **POLO ≡ x**
- **No puede haber polos** en la *ROC*. Los polos están en el límite de la región de convergencia

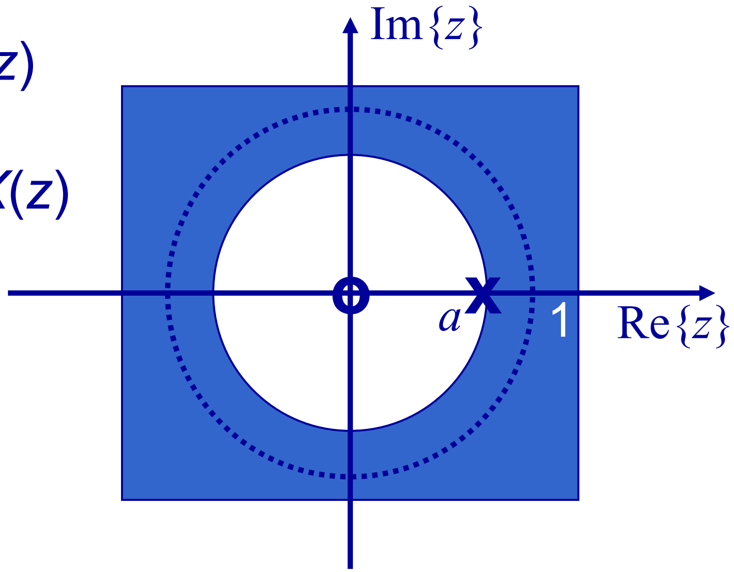


Diagrama de polos y ceros (II)

$H(z)$ cociente de polinomios en z:

c_i: ceros del sistema

$$H(z) = \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0}{a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \qquad H(z) = k \frac{(z - c_1)(z - c_2)\cdots(z - c_n)}{(z - p_1)(z - p_2)\cdots(z - p_m)}$$

p_i: polos del sistema

Salvo un factor, cualquier polinomio queda definido por sus raíces

$$X(z) = k \frac{(z-2)^2}{(z+1)(z+2)}; \qquad |z| < -1$$

Ceros: $c_1 = c_2 = 2$

Polos: $p_1 = -1; \qquad p_2 = -2$

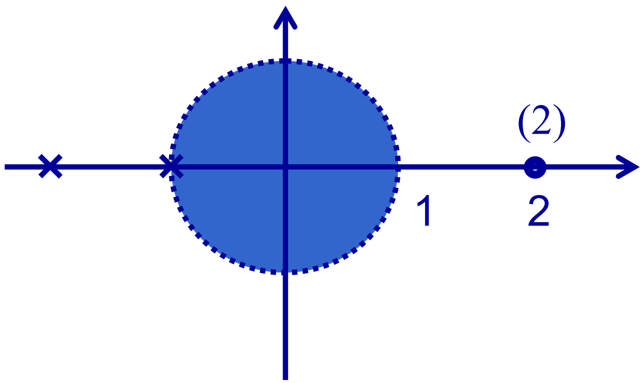
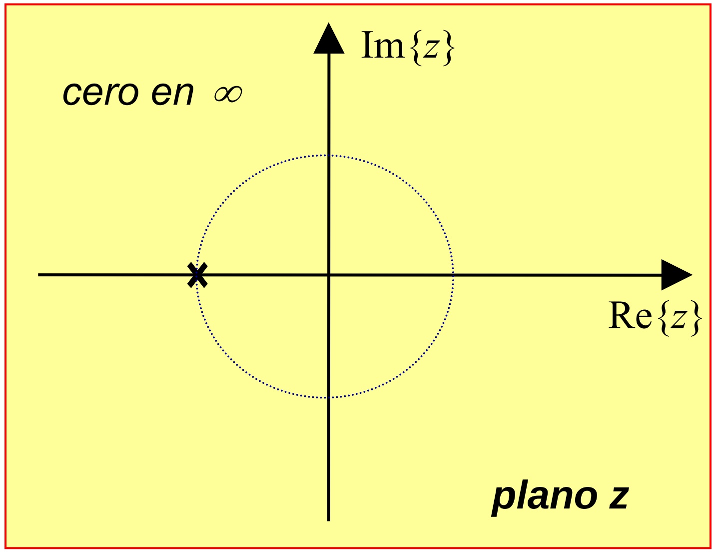


Diagrama de polos y ceros (III)

Coeficientes de $H(z)$ reales $\Rightarrow$ ceros y polos reales ó complejos conjugados

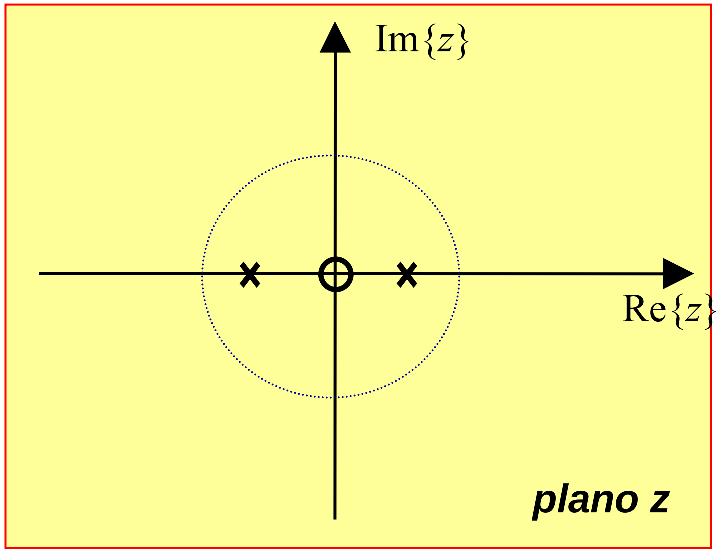
Ejemplo 1:

$$H(z) = \frac{1}{1+z}$$



Ejemplo 2:

$$H(z) = \frac{z^2}{(1-0.5z)(1+0.5z)}$$

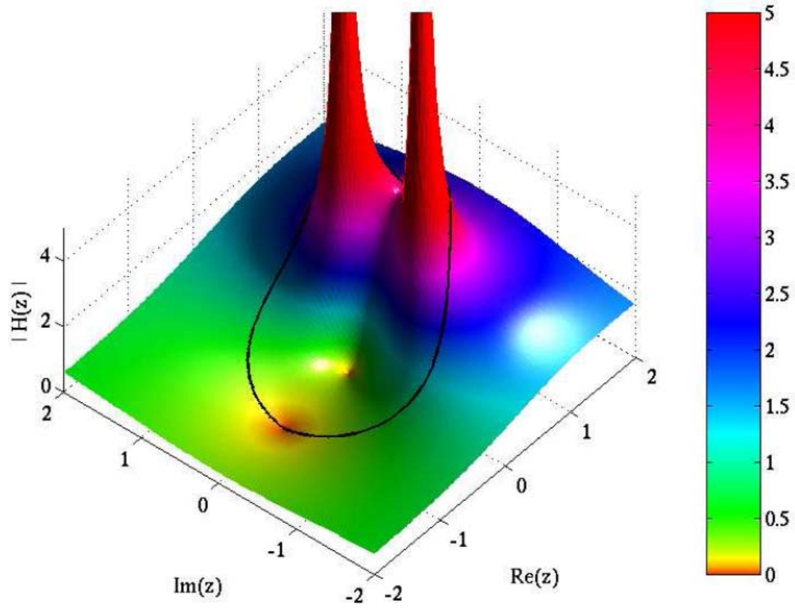


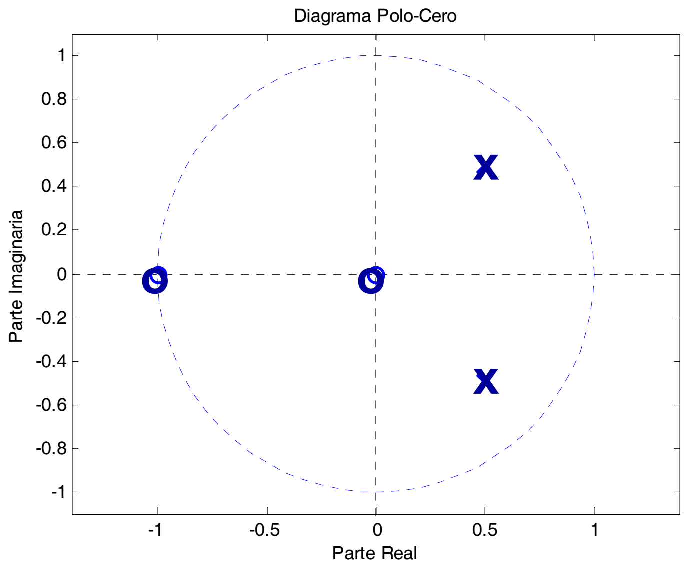
Ejemplo de TZ (I)

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

$c_1=0$; $c_2=-1$;

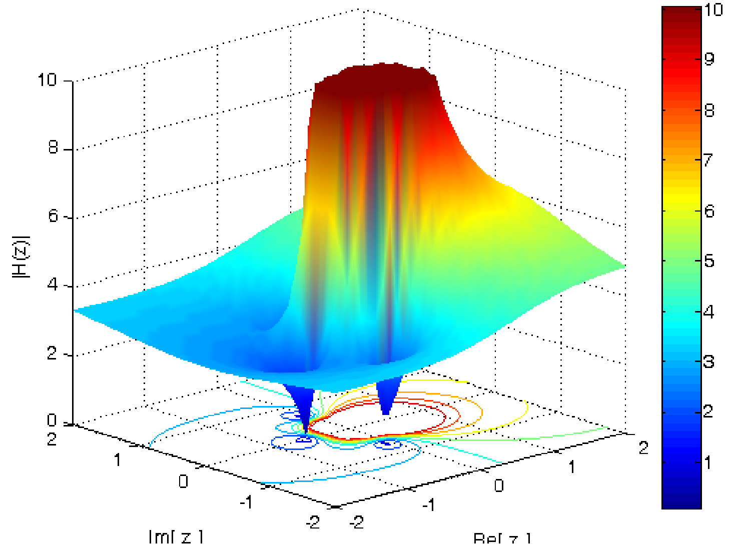
$p_{1,2}=0.5(1\pm j)$

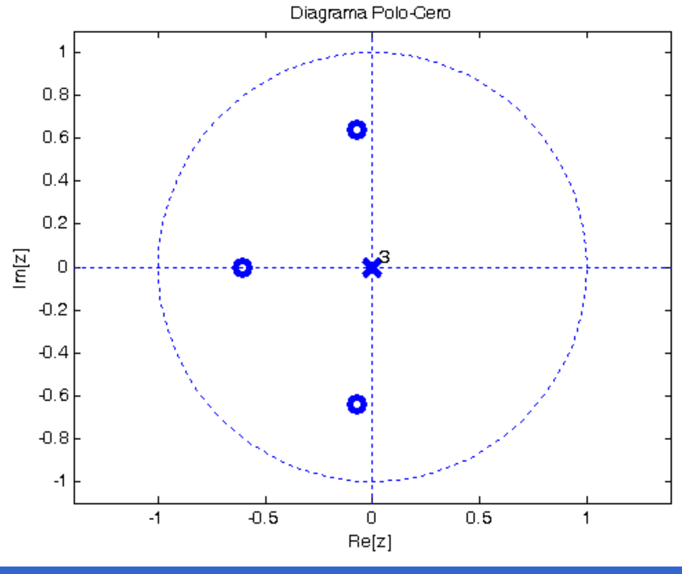


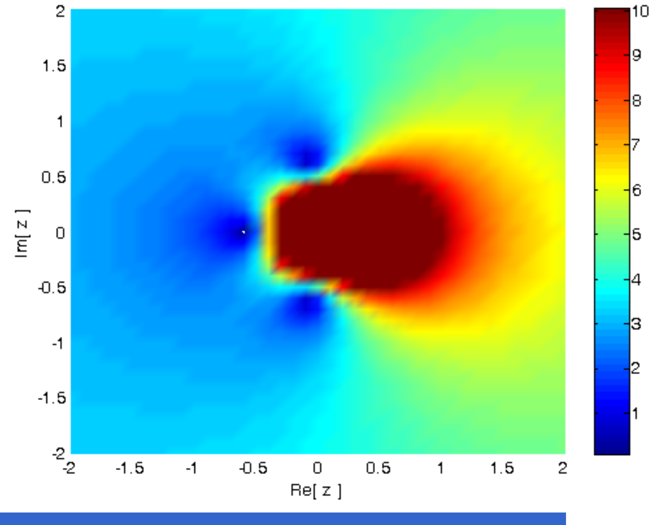


Ejemplo de TZ (II)

$$H(z)=\frac{4z^3+3z^2+2z+1}{z^3}$$







TZ de señales básicas

Señal	Transformada	ROC
$\delta[\mathrm{n}]$	1	$\forall z$
$u[\mathrm{n}]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	z|>1
$\delta[\mathrm{n-m}]$	z^{-m}	$\forall z\text{-}\{0,\infty\}$
$a^n u[\mathrm{n}]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	z|>|a|
$na^n u[\mathrm{n}]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	z|>|a|
$[\cos(\omega_o n)]u[n]$	$\dfrac{1-[\cos(\omega_o)]z^{-1}}{1-[2\cos(\omega_o)]z^{-1}+z^{-2}}$	z|>1
$[\mathrm{sen}(\omega_o n)]u[n]$	$\dfrac{1-[sen(\omega_o)]z^{-1}}{1-[2\cos(\omega_o)]z^{-1}+z^{-2}}$	z|>1
$[r^n\cos(\omega_o n)]u[n]$	$\dfrac{1-[r\cos(\omega_o)]z^{-1}}{1-[2r\cos(\omega_o)]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	z|>r
$[r^n sen(w_o n)]u[n$	$\dfrac{1-[rsen(w_o)]z^{-1}}{1-[2r\cos(w_o)]z^{-1}+r^2z^{-2}}$	|z|>r

Propiedades de la TZ (I)

Supongamos

$$TZ\{x[n]\} = X(z), \qquad ROC_X \equiv R_X^- < |z| < R_X^+$$
$$TZ\{y[n]\} = Y(z), \qquad ROC_Y \equiv R_Y^- < |z| < R_Y^+$$

- Linealidad: $TZ\{ax[n]+by[n]\} = aX(z)+bY(z), \qquad z \in ROC_{XY}$

  $$ROC_{XY} \supset ROC_X \cap ROC_Y$$

  La nueva ROC puede expandirse por la cancelación de polos y ceros resultado de la combinación lineal

- Desplazamiento: $TZ\{x[n+m]\} = z^m X(z) \quad , \quad z \in ROC_{X'}$

  $$ROC_{X'} \equiv ROC_X - \{0, \infty\}$$

  En la nueva ROC puede aparecer el 0 ó el ∞

- Convolución: $TZ\{x[n] * y[n]\} = X(z) \cdot Y(z) \quad , \quad z \in ROC_{XY}$

  $$ROC_{XY} \supset ROC_X \cap ROC_Y$$

Propiedades de la TZ (IV)

$$X(z) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}$$

Señal	Transformada	ROC
$x[n], x_1[n], x_2[n]$	$X(z), X_1(z), X_2(z)$	R_X, R_{X_1}, R_{X_2}
$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	contiene $R_{X_1} \cap R_{X_2}$
$x[n-n_0]$	$z^{-n_0} X(z)$	R_X (†)
$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$	$\frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$	contiene $R_X \cap \{\lvert z\rvert > 1\}$
$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$\lvert z_0\rvert R_X$
$x^*[-n]$	$X^*(1/z^*)$	$1/R_X$
$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	contiene $R_{X_1} \cap R_{X_2}$
$x[n] = 0, n < 0$	$\lim_{z\to\infty} X(z) = x[0]$	

(†) indica que *z*=0 ó *z*=∞ pueden añadirse o eliminarse

Ejemplo (I)

- Calcular la TZ de la siguiente secuencia:

$$x[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$$

sabemos que

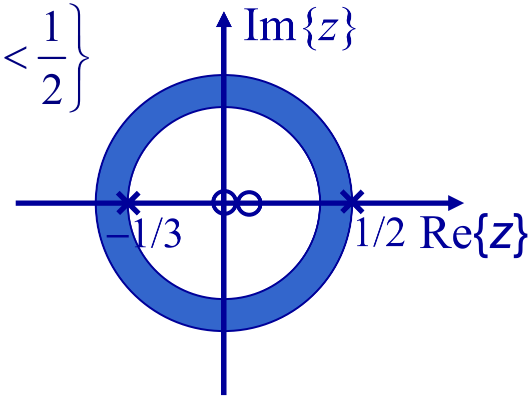
$$\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \xleftrightarrow{TZ} \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{3}$$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] \xleftrightarrow{TZ} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, |z| < \frac{1}{2}$$

aplicamos la propiedad de linealidad de la TZ

$$X(z) = \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad ROC_X = \left\{\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}\right\}$$

$$X(z) = \frac{2z\left(z-\frac{1}{12}\right)}{\left(z+\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$



3. Transformada Z inversa

- Transformada Z inversa (TZ^{-1})

  $$X(z) \text{ y } ROC_X \Rightarrow x[n] \text{ unívoca.}$$

- Métodos
  - Inspección directa: se trata simplemente de familiarizarse con la TZ y sus propiedades e identificar ciertos pares.
  - Inversión mediante descomposición en fracciones simples
    - Polos de primer orden
    - Polos de orden *m*

Inversión por descomposición en fracciones simples (I)

- Se dice que una TZ es **racional** si se trata de un cociente de polinomios en la variable *z (ó* z^{-1}*).*

$$X(z) = \frac{A(z^{-1})}{B(z^{-1})}$$

- Si $X(z)$ es racional, entonces puede invertirse fácilmente a partir de una **descomposición en fracciones simples**.
- Suponiendo que el grado del numerador (N) es menor que el del denominador (M):
  - *Polos de primer orden*: $X(z)$ tiene N polos distintos (p_1, …., p_N). Entonces: $X(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{z^{-1} - p_k^{-1}}$ *siendo* $A_k = (z^{-1} - p_k^{-1}) X(z)|_{z=p_k}$.
  - *Polos de orden m:* Suponiendo que $X(z)$ tiene un polo de orden m en $z=p_i$. Entonces:

$$X(z) = \sum_{k=1}^{N-m} \frac{A_k}{z^{-1} - p_k^{-1}} + \sum_{l=1}^{m} \frac{C_l}{(z^{-1} - p_i^{-1})^l}$$

con los valores anteriores de A_k

$$C_l = \frac{1}{(m-l)!} \frac{d^{m-l}}{dz^{m-l}} (z^{-1} - p_i^{-1})^m X(z)|_{z=p_i}$$

Inversión por descomposición en fracciones simples (II)

- Suponiendo que el grado del numerador (*N*) es mayor o igual que el del denominador (*M*):
- **Polos de primer orden (polos simples):** $X(z)$ tiene *N* polos distintos ($p_1, \ldots, p_N$). Entonces:

$$X(z) = B_{M-N} z^{M-N} + B_{M-N-1} z^{M-N-1} + \ldots + B_1 z + B_0 + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{z - p_k}$$

siendo los B_i los coeficientes obtenidos mediante división hasta que el resto sea de un orden igual al del denominador menos 1. Con este resto se procede a descomponer en fracciones simples y el resultado se añade al de la división

- En el caso de polos múltiples se procede como anteriormente

Ejemplo (I)

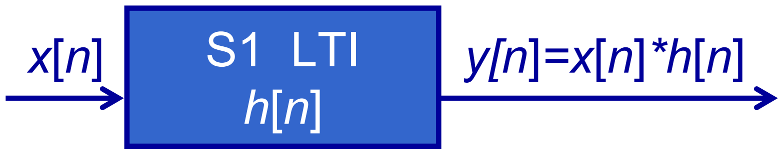
$$
\begin{aligned}
X(z) &= \frac{1}{\left(1-az^{-1}\right)\left(1-bz^{-1}\right)} \\
&= \frac{a^{-1}b^{-1}}{\left(z^{-1}-a^{-1}\right)\left(z^{-1}-b^{-1}\right)} \\
&= \left(\frac{a}{a-b}\right)\frac{1}{\left(1-az^{-1}\right)}+\left(\frac{b}{b-a}\right)\frac{1}{\left(1-bz^{-1}\right)}
\end{aligned}
$$

La TZ^{-1} depende de la ROC_X. Si suponemos que $|a|>|b|$, entonces:

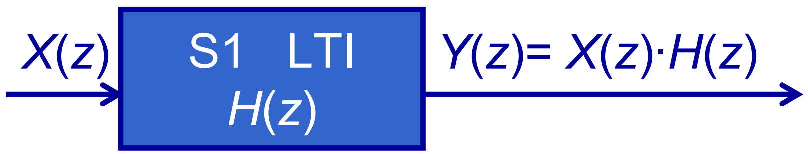
$$
ROC_X = \begin{cases}
|z|>|a|>|b| & x[n]=\left(\frac{a}{a-b}\right)a^n u[n]+\left(\frac{b}{b-a}\right)b^n u[n] & \textit{(sec. derecha)} \\
|a|>|z|>|b| & x[n]=\left(\frac{b}{b-a}\right)b^n u[n]-\left(\frac{a}{a-b}\right)a^n u[-n-1] & \textit{(sec. bilateral)} \\
|a|>|b|>|z| & x(n)=-\left(\frac{a}{a-b}\right)a^n u[-n-1]-\left(\frac{b}{b-a}\right)b^n u[-n-1] & \textit{(sec. izquierda)}
\end{cases}
$$

8. La función de sistema

Sea un sistema LTI de tiempo discreto con respuesta al impulso $h[n]$



Si $x[n]$, $h[n]$ e $y[n]$ tienen TZ, y aplicando la propiedad de convolución, obtenemos en el dominio transformado:



$H(z)$ $\equiv$ **Función de sistema** $\equiv$ **Función de transferencia**

$$\boxed{H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)};\quad ROC_H}$$

$$\boxed{H(z)\equiv\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]z^{-k}=TZ\{h[n]\}}$$

Propiedades

- **Memoria**
  - Sistema LTI sin memoria: $h[n]=A\cdot\delta[n]$
  - Sistema LTI sin memoria $\Leftrightarrow H(z)=A$, $ROC_H = \forall z$
- **Causalidad**
  - Un sistema LTI **causal** tiene función de transferencia con *ROC* del tipo $|z|>r$ (exterior de una circunferencia)
  - **Un sistema LTI** con función de transferencia **racional es causal** si y solo si su *ROC* es exterior a una circunferencia e incluye a $z\rightarrow\infty$
- **Estabilidad**
  - Un sistema LTI es **estable** si y solo si la *ROC* de su función de transferencia contiene a la circunferencia de radio unidad
- **Invertibilidad**
  - Sistema LTI invertible $\Leftrightarrow \exists$ otro sistema LTI tal que $h[n]*h_I[n]=\delta[n]$
  - Si existen las transformadas $H(z)$ y $H_I(z)$, deben cumplir:

$$\boxed{H(z)\cdot H_I(z)=TZ\left\{\delta[n]\right\}=1\Rightarrow H_I(z)=\frac{1}{H(z)}}$$

Relación de la respuesta en frecuencia y la función de sistema para sistemas discretos (III)

Si la expresión algebraica de la función de sistema es de tipo racional, podemos expresar en función de los polos p_i y los ceros c_i
Suponiendo raíces simples:

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = k\frac{\prod_i (z - c_i)}{\prod_i (z - p_i)} = k\frac{\prod_i \left(1 - c_i z^{-1}\right)}{\prod_i \left(1 - p_i z^{-1}\right)} \Rightarrow$$

$$H(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{D(\Omega)} = k\frac{\prod_i \left(1 - c_i\, \mathrm{e}^{-j\Omega}\right)}{\prod_i \left(1 - p_i\, \mathrm{e}^{-j\Omega}\right)} = k\frac{\prod_i \left(\mathrm{e}^{j\Omega} - c_i\right)}{\prod_i \left(\mathrm{e}^{j\Omega} - p_i\right)}$$

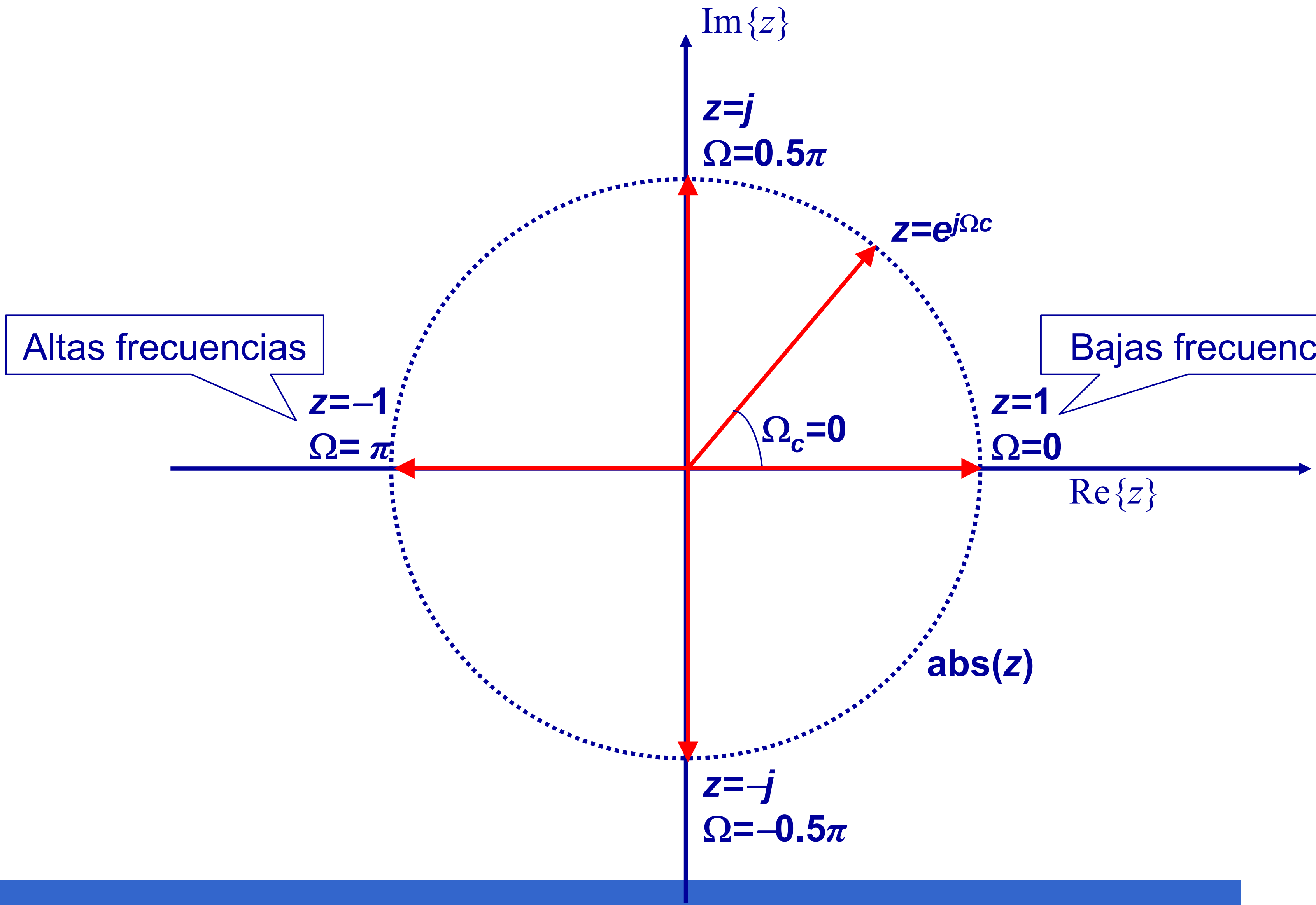
Evaluación de la respuesta en frecuencia a partir del diagrama de polos-ceros

- A partir del diagrama de polos-ceros de la función de sistema podemos hallar de modo aproximado el módulo y fase de la respuesta en frecuencia.

- El módulo se puede calcular como el producto de distancias desde el punto de la circunferencia de radio unidad $e^{j\Omega}$ hasta cada uno de los ceros, dividido por el producto de distancias desde el punto $e^{j\Omega}$ hasta cada uno de los polos (salvo una constante):

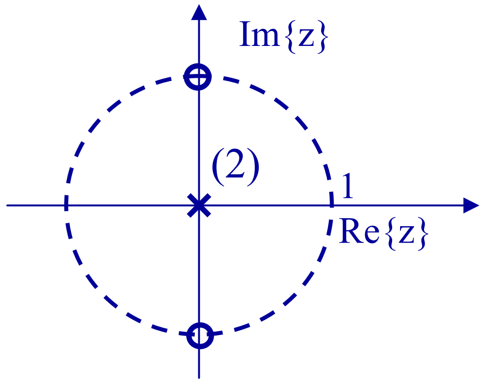
$$|H(\Omega)| = |k| \left| \frac{\prod_i \left(\mathrm{e}^{j\Omega} - c_i\right)}{\prod_i \left(\mathrm{e}^{j\Omega} - p_i\right)} \right| = |k| \frac{\prod_i \left|\mathrm{e}^{j\Omega} - c_i\right|}{\prod_i \left|\mathrm{e}^{j\Omega} - p_i\right|}$$

El plano z y el círculo de radio unidad



Ejemplo (I)

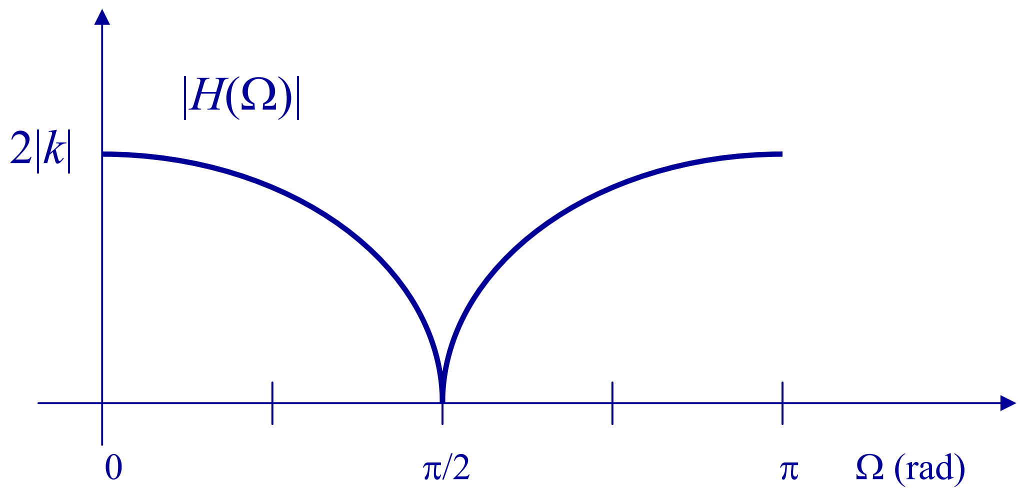
Supongamos el siguiente diagrama de polos y ceros:



$$H(z) = k\frac{\prod_i \left(1 - c_i z^{-1}\right)}{\prod_i \left(1 - p_i z^{-1}\right)} = k\frac{\left(1 - jz^{-1}\right)\left(1 + jz^{-1}\right)}{1^2} \Rightarrow$$

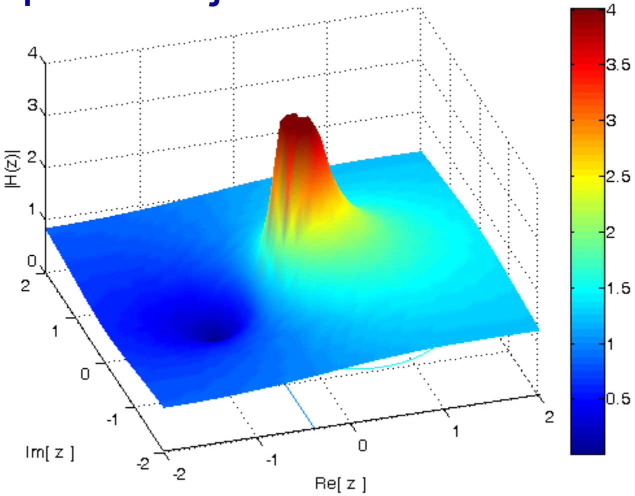
$$H(\Omega) = k\left(1 - j\,\mathrm{e}^{-j\Omega}\right)\left(1 + j\,\mathrm{e}^{-j\Omega}\right) = k\left(1 + \mathrm{e}^{-j2\Omega}\right)$$

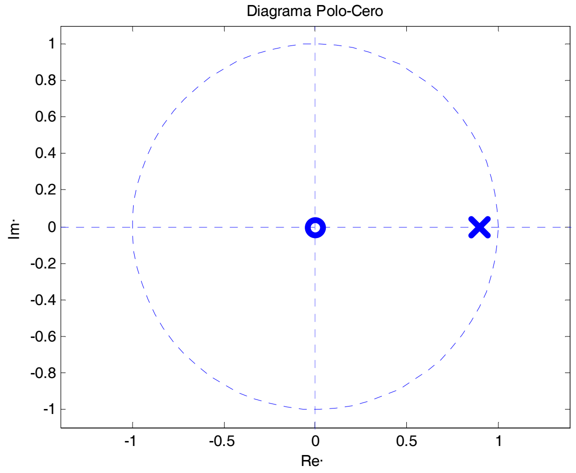
Como $H(\Omega)$ es periódica de periodo 2π, basta dibujarla entre 0 y 2π. Para $h[n]$ real (polos y ceros reales o pares complejos conjugados) $|H(\Omega)|$ tiene simetría par, entonces basta dibujar entre 0 y π :

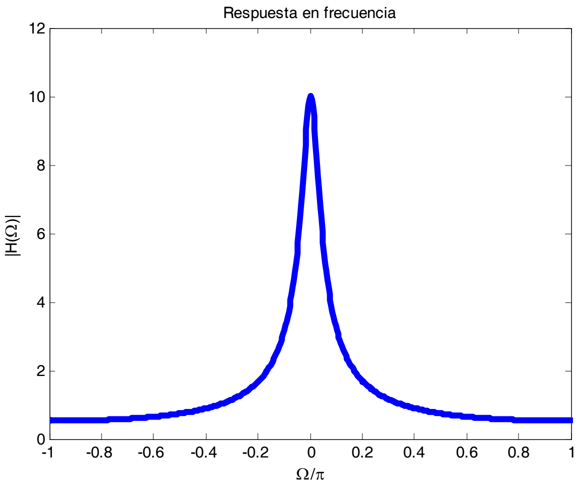


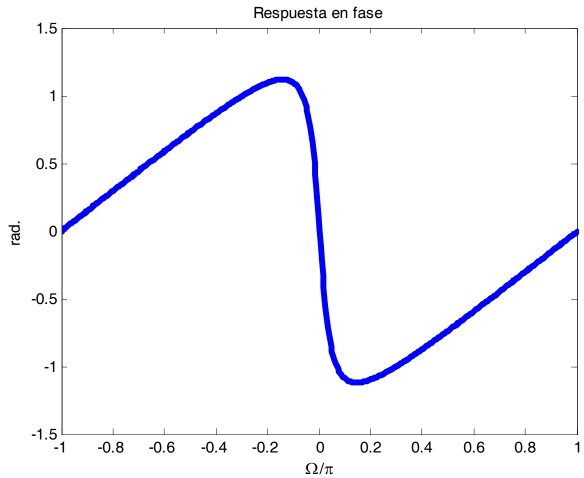
Ejemplo (II)

Filtro paso bajo



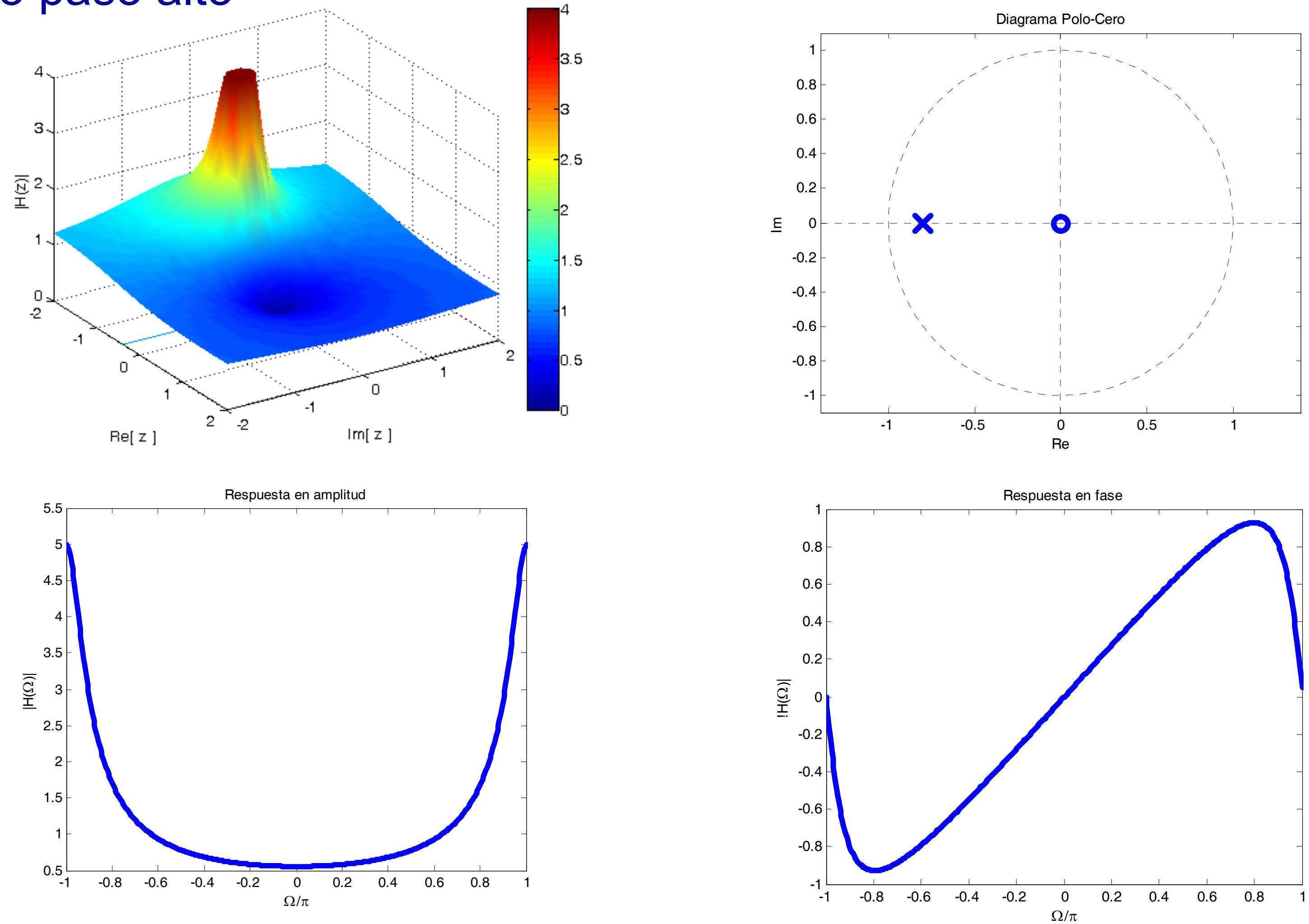






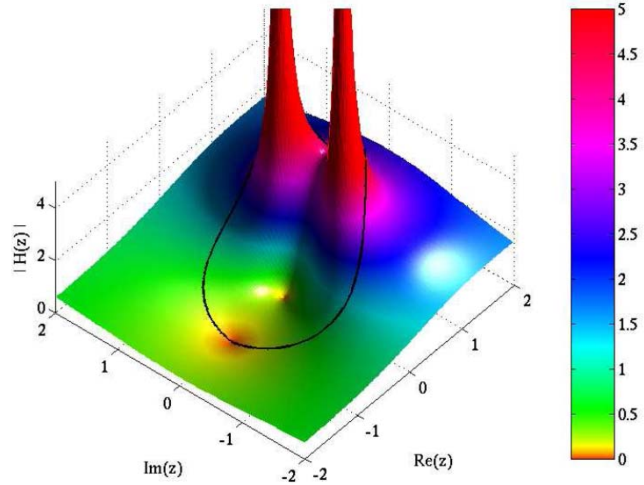
Ejemplo (III)

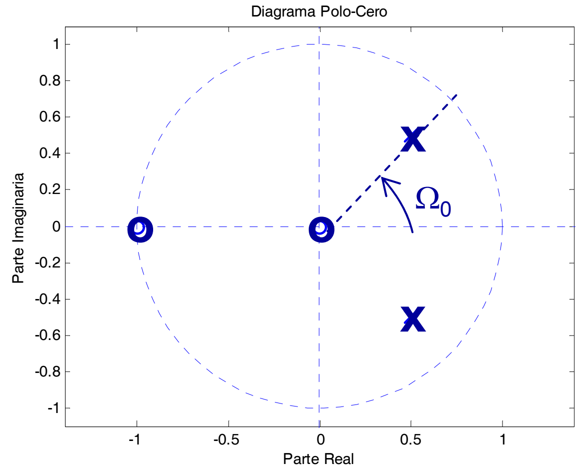
Filtro paso alto

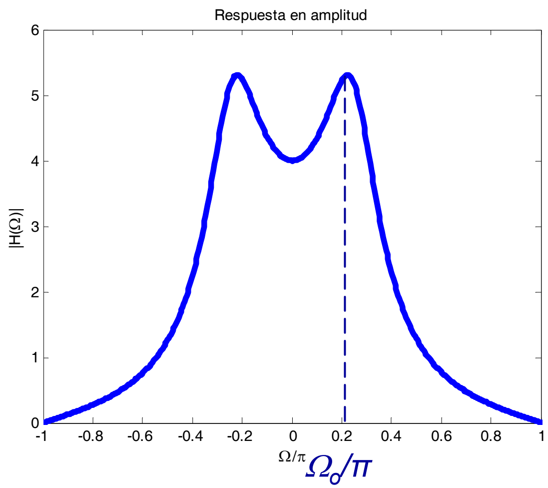


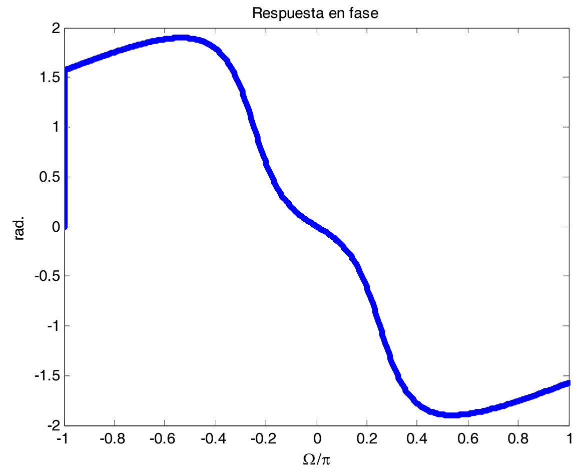
Ejemplo (IV)

Filtro paso banda



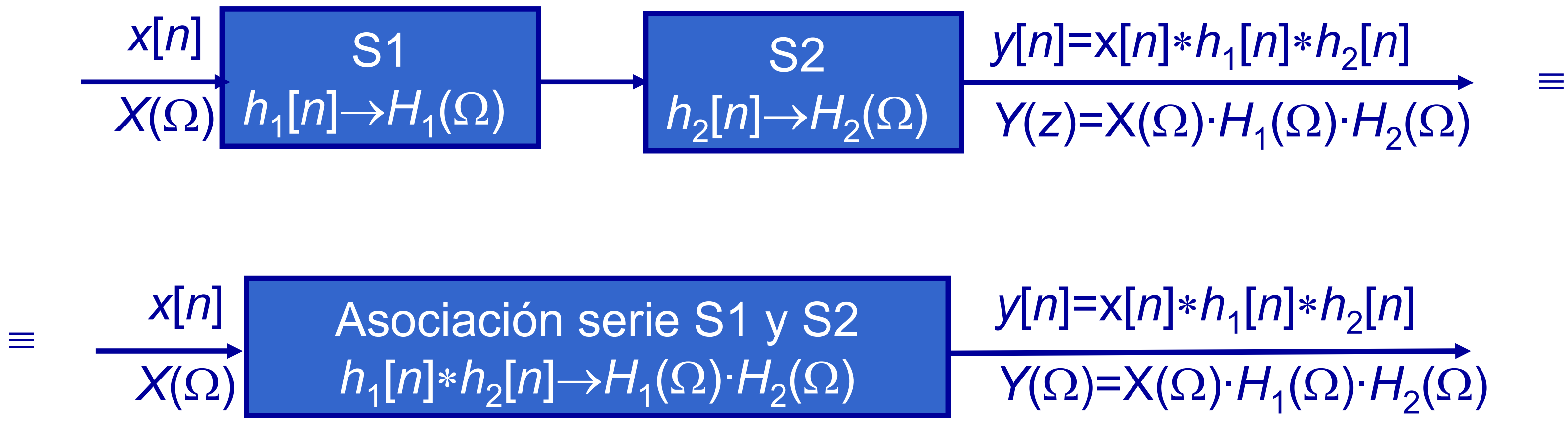






Interconexión de sistemas LTI de tiempo discreto (I)

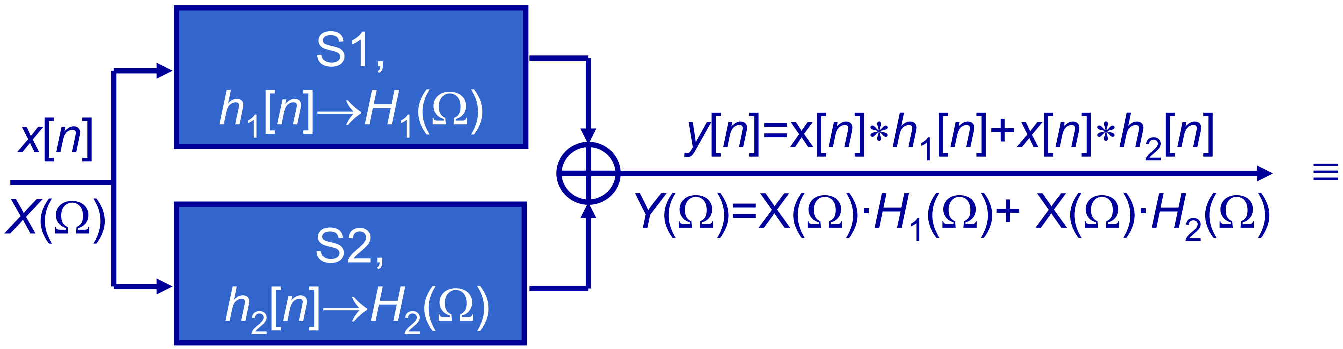
- Interconexión serie

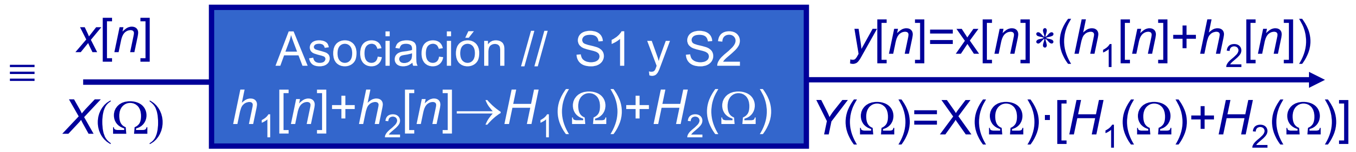


- Análogo con TZ y función de sistema

Interconexión de sistemas LTI de tiempo discreto (II)

- Interconexión paralelo

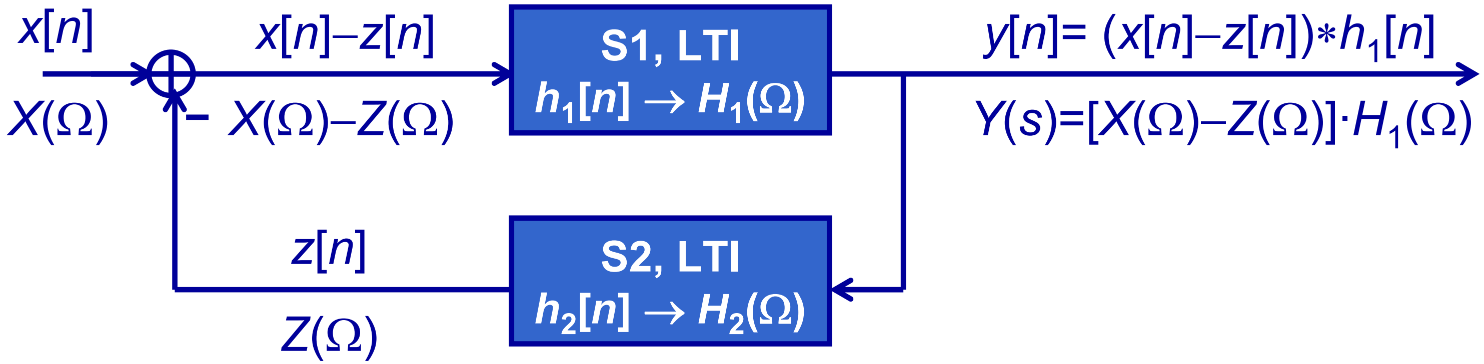




- Análogo con TZ y función de sistema

Interconexión de sistemas LTI de tiempo discreto (III)

- Interconexión realimentada



  - En el dominio del tiempo no podemos despejar la salida, pero en el dominio transformado …

$$Y(\Omega) = \left[X(\Omega) - Z(\Omega)\right]\cdot H_1(\Omega) = \left[X(\Omega) - Y(\Omega)\cdot H_2(\Omega)\right]\cdot H_1(\Omega) \Rightarrow$$

$$Y(\Omega) + Y(\Omega)\cdot H_2(\Omega)\cdot H_1(\Omega) = X(\Omega)\cdot H_1(\Omega) \Rightarrow Y(\Omega) = \frac{X(\Omega)\cdot H_1(\Omega)}{1 + H_2(\Omega)\cdot H_1(\Omega)}$$

$$\boxed{H_R(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{H_1(\Omega)}{1 + H_2(\Omega)\cdot H_1(\Omega)}}$$

- Análogo con TZ y función de sistema

9. Sistemas descritos por ec. en diferencias lineales de coeficientes constantes (e.d.l.c.c.)

- Consideramos la forma general de una e.d.l.c.c. (*N* y *M*≥0):

$$\sum_{K=0}^{N} a_k \cdot y[n-k] = \sum_{K=0}^{M} b_k \cdot x[n-k], \qquad y^{i)}[n-k] = c_i, \quad i = 1.....N$$

- Dos soluciones: $y[n] = y_l[n] + y_f[n]$
  - Solución homogénea (régimen libre o transitorio)

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{K=0}^{N} a_k \cdot y[n-k] = 0, \qquad y^{i)}[n-k] = c_i, \quad i = 1.....N \\ y[n] = z_0^n \equiv \text{autofunción} \end{array}\right\} \Rightarrow y_l[n]$$

  - Solución completa (régimen forzado o permanente)

$$\left.\sum_{K=0}^{N} a_k \cdot y[n-k] = \sum_{K=0}^{M} b_k \cdot x[n-k], \qquad y^{i)}[n-k] = 0, \quad i = 1.....N \right\} \Rightarrow y_f[n]$$

$$y_f[n] = \frac{1}{a_0}\left(\sum_{K=0}^{M} b_k \cdot x[n-k]\right)$$

Función de sistema para sistemas LTI discretos descritos por e.d.l.c.c.

- Sea un sistema definido por e.d.l.c.c. que parte del **reposo inicial** (condiciones iniciales nulas trasladables)

$$\sum_{K=0}^{N} a_k \cdot y[n-k] = \sum_{K=0}^{M} b_k \cdot x[n-k], \qquad y^{i)}[n-k]=0, \quad i=1.....N$$

- Aplicando TZ se tiene: $TZ\left\{\sum_{K=0}^{N} a_k \cdot y[n-k]\right\} = TZ\left\{\sum_{K=0}^{M} b_k \cdot x[n-k]\right\} \Rightarrow$

$$\sum_{K=0}^{N} a_k \cdot TZ\{y[n-k]\} = \sum_{K=0}^{M} b_k \cdot TZ\{x[n-k]\} \Rightarrow$$

$$\sum_{K=0}^{N} a_k \cdot z^{-k} Y(z) = \sum_{K=0}^{M} b_k \cdot z^{-k} X(z) \Rightarrow Y(z)\sum_{K=0}^{N} a_k \cdot z^{-k} = X(z)\sum_{K=0}^{M} b_k \cdot z^{-k}$$

- Y por lo tanto:

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{K=0}^{M} b_k \cdot z^{-k}}{\sum_{K=0}^{N} a_k \cdot z^{-k}} = \frac{A \cdot \prod_{k=1}^{M}\left(1-c_k z^{-1}\right)}{\prod_{k=1}^{N}\left(1-d_k z^{-1}\right)}}$$

Respuesta en frecuencia de sistemas caracterizados por e.d.l.c.c.

- Supongamos un sistema descrito por una ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes (e.d.l.c.c.) que parte del **reposo inicial**:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- Consideramos que *N* y *M* son positivos
- Suponemos que a_0 es no nulo.
- Aplicamos DTFT a ambos lados de la ecuación.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k TF\{y[n-k]\} = \sum_{k=0}^{N} a_k \, \mathrm{e}^{-jk\Omega} \, Y(\Omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k TF\{x[n-k]\} = \sum_{k=0}^{M} b_k \, \mathrm{e}^{-jk\Omega} \, X(\Omega)$$

$$\boxed{H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \, \mathrm{e}^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k \, \mathrm{e}^{-jk\Omega}}}$$

10. Introducción al filtrado digital

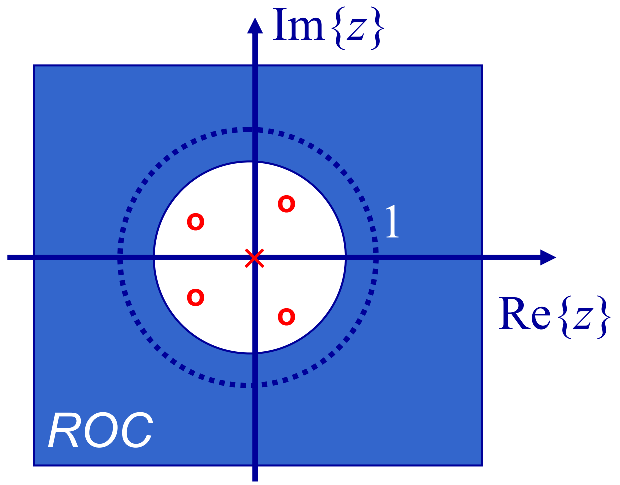
- Filtros **FIR**:
  - la función de sistema puede expresarse como un polinomio en el numerador
  - la respuesta al impulso tiene **longitud finita**
  - **todos los polos están en el origen** (si es no causal puede haber polos en el infinito)
  - No recursivo implica filtro FIR

- Filtros **IIR:**
  - la función de sistema tiene polos
  - la respuesta al impulso tiene **longitud infinita**
  - los polos están en cualquier punto del plano z
  - filtro IIR implica recursivo

Filtros FIR

$$y[n]=\sum_{k=0}^{N} b_k x[n-k]$$ **No recursivo**

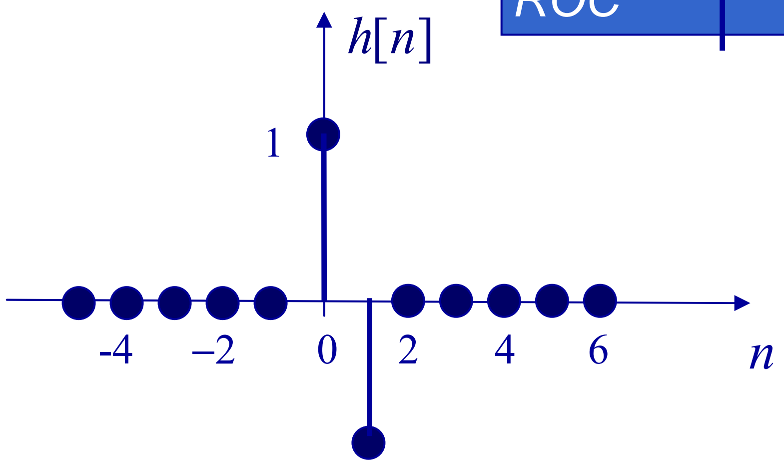
$$H(z)=\sum_{K=0}^{N} b_k \cdot z^{-k} = A\cdot\prod_{k=1}^{N}(1-c_k z^{-1})$$



Ej: *1ª diferencia*

$y[n]= x[n]-x[n-1]$

$H(z)= 1-z^{-1}$



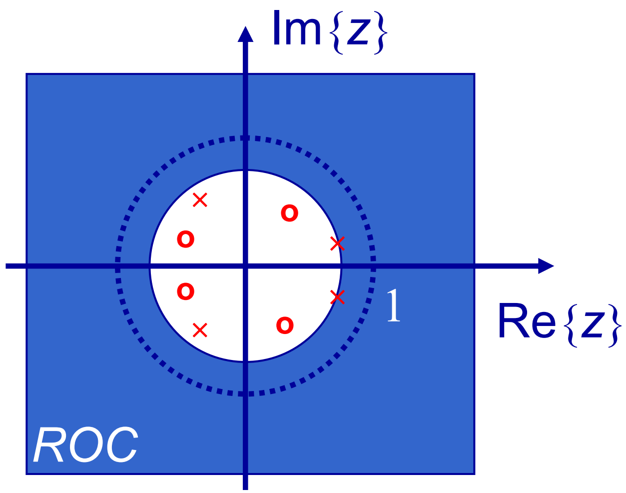
La respuesta al impulso de un sistema **FIR** tiene (***N*+1**) términos

Filtros IIR

$$y[n] = \sum_{m=0}^{M} b_m x[n-m] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

$$H(z) = \frac{\sum_{K=0}^{M} b_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{K=1}^{N} a_k \cdot z^{-k}}$$

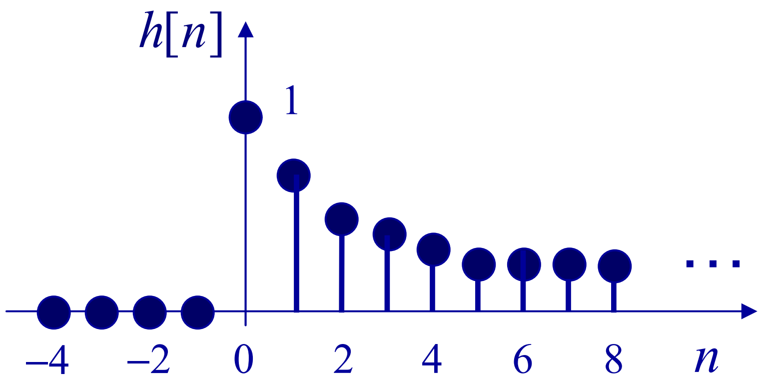
Recursivo



Ej: $y[n]=a\cdot y[n-1]+x[n]$

$H(z)=1/(1-az^{-1})$, *estable si* $|a|<1$

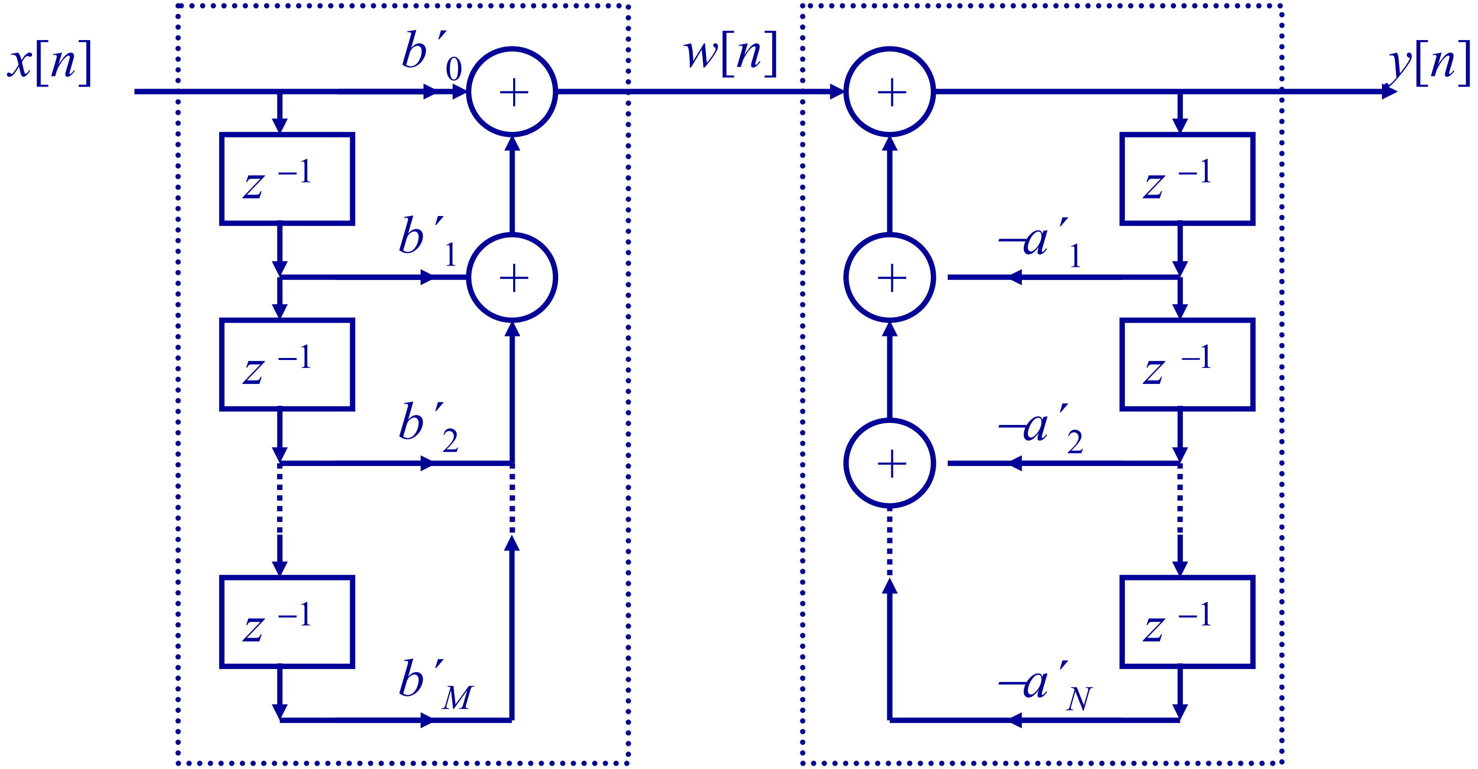
$h[n]=a^n u[n]$



La respuesta al impulso de un sistema **IIR** tiene ∞ términos

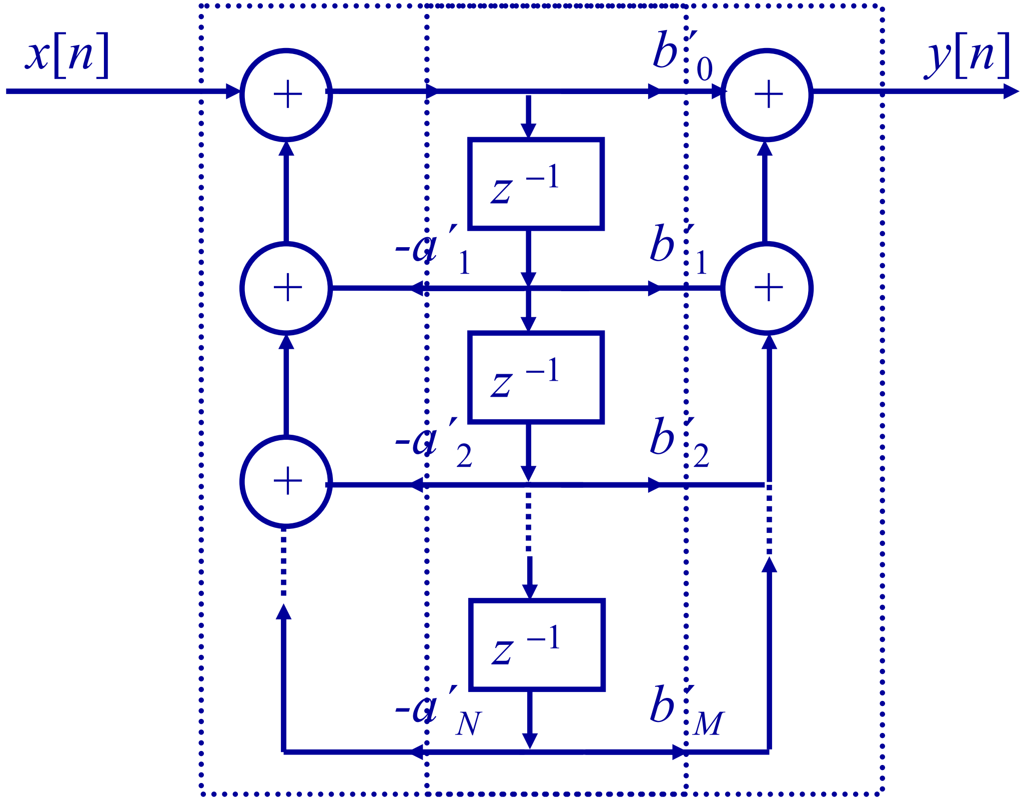
Realización de un filtro (forma directa I)

$$\sum_{K=0}^{N} a_k \cdot y[n-k] = \sum_{K=0}^{M} b_k \cdot x[n-k] \qquad y[n] = \sum_{m=0}^{M} b'_m x[n-m] - \sum_{k=1}^{N} a'_k y[n-k]$$



Realización de un filtro (forma directa II)

- Esta estructura se basa en utilizar los retardos de la variable intermedia, *w*[*n*]. Este hecho se traduce en un ahorro en el número de retardos necesarios

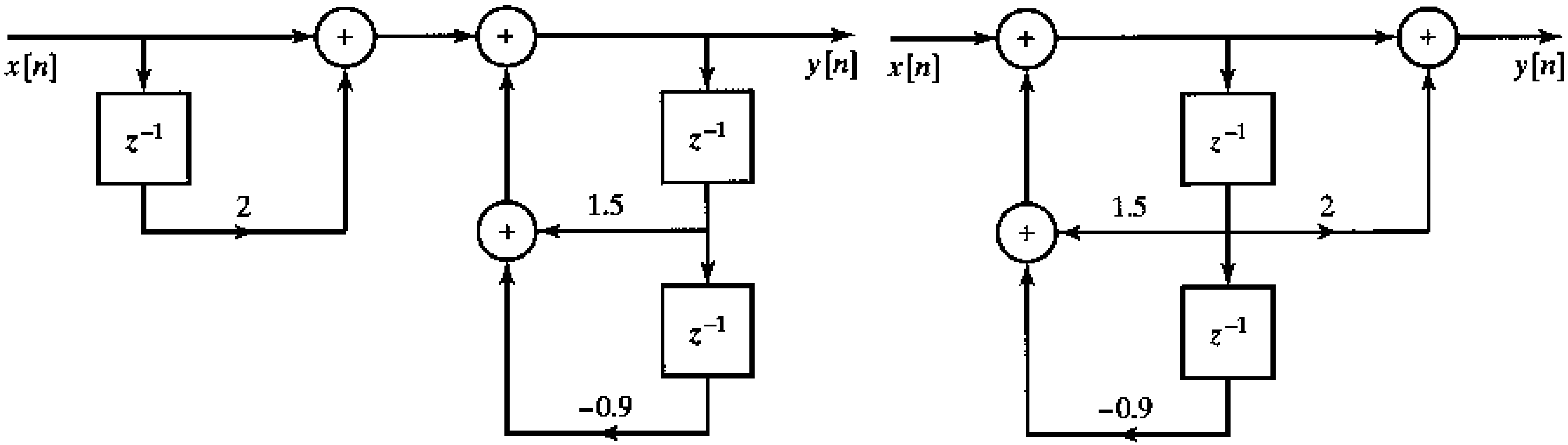


Ejemplo

- Considérese el sistema LTI con función de transferencia:

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.9z^{-2}} \qquad b_0 = 1,\ \ b_1 = 2,\ \ a_1 = 1.5,\ \ a_2 = -0.9$$

- Puede implementarse de las siguientes formas



Síntesis

1. Respuesta de sistemas LTI a exponenciales complejas

$$x[n] = z_0^n \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{LTI}\\ H(z)\end{matrix}} \longrightarrow y[n] = x[n]H(z_0)$$

$$x[n] = \sum_{i=1}^{N} a_i z_i^n \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{LTI}\\ H(z)\end{matrix}} \longrightarrow y[n] = \sum_{k=i}^{N} a_i H(z_i) z_i^n$$

2. Representación de señales periódicas mediante DTFS

$$\begin{cases} x[n] = \displaystyle\sum_{k=<N>} a_k \, \mathrm{e}^{jk\frac{2\pi}{N}n} \\ a_k = \displaystyle\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,\mathrm{e}^{-jk\frac{2\pi}{N}n} \end{cases}$$

Ecuación de síntesis

Ecuación de análisis

Síntesis

3. DTFT de secuencias no periódicas.

$$\begin{cases} x[n] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{2\pi} X(\Omega)\,\mathrm{e}^{j\Omega n}\,d\Omega \\ X(\Omega) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,\mathrm{e}^{-j\Omega n} \end{cases}$$

Ecuación de síntesis

Ecuación de análisis

4. DTFT de secuencias periódicas

$$\begin{cases} x[n] = \displaystyle\sum_{k=<N>} a_k\,\mathrm{e}^{jk\frac{2\pi}{N}n} \\ X(\Omega) = \displaystyle\sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\Omega - \dfrac{2\pi k}{N}\right) \end{cases}$$

Ecuación de síntesis

Ecuación de análisis

Síntesis

5. Respuesta en frecuencia de sistemas LTI de tiempo discreto (sistemas estables, { |*z*|=*1* } $\subset$ *ROC$_H$*)

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \mathrm{e}^{-j\Omega n} = H(z)\Big|_{z = e^{j\Omega}} = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$$

6. Respuesta en frecuencia de sistemas LTI descritos por ecuaciones en diferencias lineales de coeficientes constantes

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \, \mathrm{e}^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k \, \mathrm{e}^{-jk\Omega}}$$

Síntesis

1. Respuesta de sistemas LTI a exponenciales complejas

$$x[n] = z_0^n \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{LTI}\\ H(z)\end{array}} \longrightarrow y[n] = x[n]H(z_0)$$

$$x[n] = \sum_{i=1}^{N} a_i z_i^n \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{LTI}\\ H(z)\end{array}} \longrightarrow y[n] = \sum_{k=i}^{N} a_i H(z_i) z_i^n$$

2. Representación de señales periódicas mediante DTFS

$$\begin{cases} x[n] = \displaystyle\sum_{k=<N>} a_k \, \mathrm{e}^{jk\frac{2\pi}{N}n} & \textbf{Ecuación de síntesis} \\ a_k = \displaystyle\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\mathrm{e}^{-jk\frac{2\pi}{N}n} & \textbf{Ecuación de análisis} \end{cases}$$

Síntesis

3. DTFT de secuencias no periódicas.

$$\begin{cases} x[n] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{2\pi} X(\Omega)\,\mathrm{e}^{j\Omega n}\, d\Omega \\ X(\Omega) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,\mathrm{e}^{-j\Omega n} \end{cases}$$

Ecuación de síntesis

Ecuación de análisis

4. DTFT de secuencias periódicas

$$\begin{cases} x[n] = \displaystyle\sum_{k=<N>} a_k\, \mathrm{e}^{jk\frac{2\pi}{N}n} \\ X(\Omega) = \displaystyle\sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\Omega - \dfrac{2\pi k}{N}\right) \end{cases}$$

Ecuación de síntesis

Ecuación de análisis

5. Respuesta en frecuencia de sistemas LTI de tiempo discreto

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\,\mathrm{e}^{-j\Omega n} = H(z)\Big|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$$

Síntesis

$$X(z) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-k}$$

6. TZ bilateral:

Diagrama de polos y ceros: define la expresión de TZ racionales salvo una constante.

ROC_X: - No contiene polos
- Circunferencias concéntricas centradas en el origen
- $x[n]$ de duración finita $\Rightarrow ROC_X = \{ \forall z \}$
- $x[n]$ derecha $\Rightarrow ROC_X$ exterior de una circunferencia
- $x[n]$ izquierda $\Rightarrow ROC_X$ interior de una circunferencia
- $x[n]$ bilateral $\Rightarrow ROC_X$ anillo

Propiedades de la TZ:
- Linealidad
- Desplazamiento en n_0
- Convolución
- Derivada e integral
- Teorema de valor inicial

TZ^{-1}: relación biunívoca
- Inspección directa y propiedades
- Descomposición en fracciones simples

$$x[n] \xleftrightarrow{TZ} X(z)$$

Síntesis

8. Función de sistema

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-k} = TZ\{h[n]\}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}; \qquad ROC_Y \supseteq ROC_X \cap ROC_H$$

Propiedades de sistemas LTI:

- Causal $\Rightarrow$ ROC_H exterior;
- Si $H(z)$ racional, ROC_H exterior y $\{\infty\} \not\subset ROC_H \Rightarrow$ Causal
- Sin memoria $\Leftrightarrow$ $H(z)=k$
- Estable $\Leftrightarrow$ $|z|=1 \subset ROC_H$
- Inverso: $H_I(z)=1/H(z)$

Asociaciones de sistemas LTI:

- Serie: $H_T(z)=H_1(z)\cdot H_2(z)$; $ROC_T \supseteq ROC_1 \cap ROC_2$
- Paralelo: $H_T(z)=H_1(z)+H_2(z)$; $ROC_T \supseteq ROC_1 \cap ROC_2$
- Realimentación: $H_T(z)=H_1(z)/[1+ H_1(z)\cdot H_2(z)]$

Síntesis

9. Sistemas descritos por e.d.l.c.c.:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- Son LTI $\Leftrightarrow$ parte del reposo inicial
- Si LTI $\Rightarrow$ Respuesta en frecuencia: $H(\Omega) = \dfrac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \dfrac{\sum_{k=0}^{M} b_k \, \mathrm{e}^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k \, \mathrm{e}^{-jk\Omega}}$

Función de sistema: $H(z) = \dfrac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$

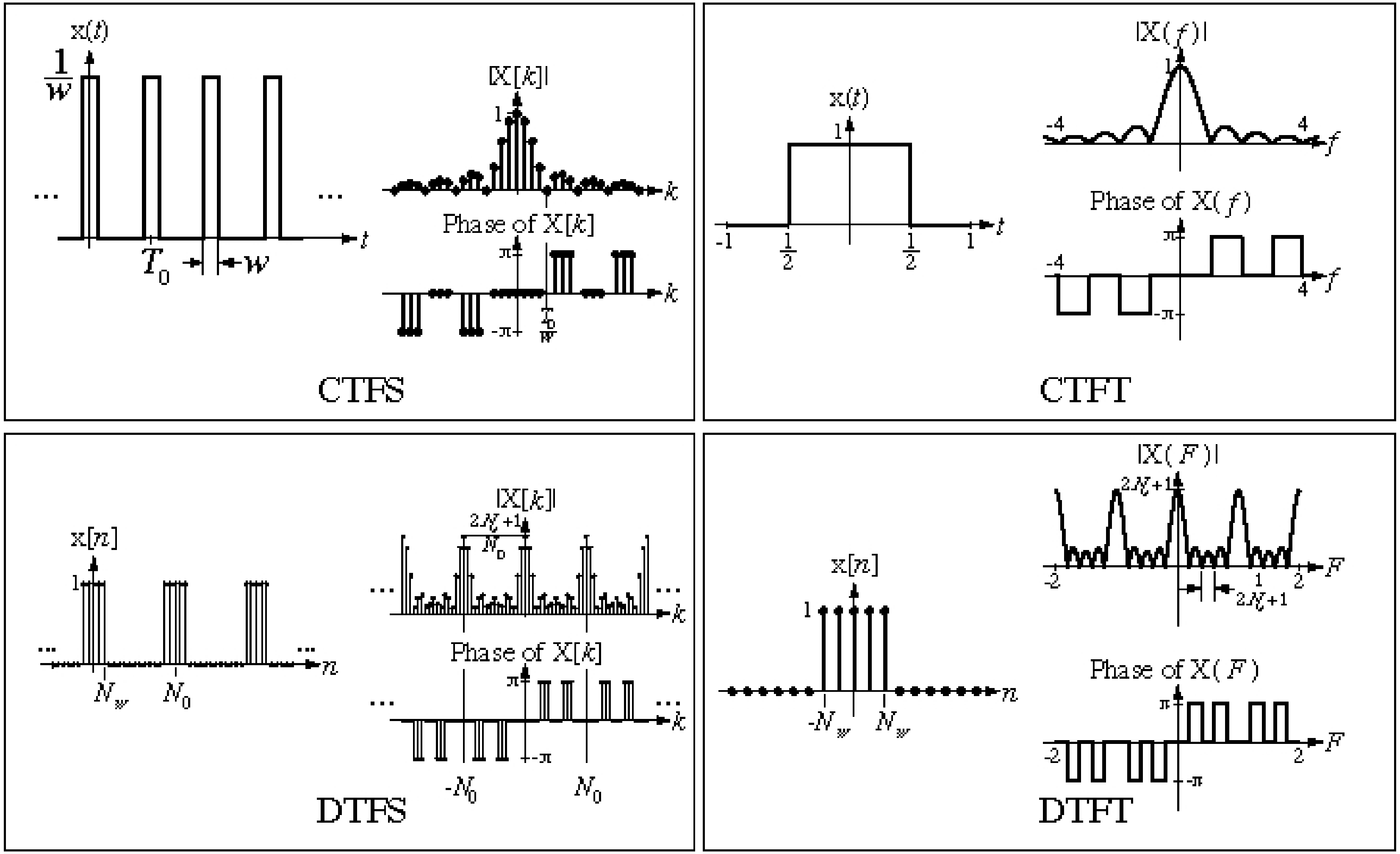
10. Introducción al filtrado digital
- Filtros FIR: *h*[*n*] de duración finita
- Filtros IIR: *h*[*n*] de duración infinita
- Formas directas I y II

Apéndice: Relaciones entre Fourier continuo y discreto

Frecuencia discreta | Frecuencia continua

Tiempo continuo

Tiempo discreto



Apéndice: Resumen de transformaciones

	Periódica en el tiempo	No periódica en el tiempo	
Continua en el tiempo	**CTFS** $a_k = X[k] = \frac{1}{T}\int_{<T>} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$ $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	**CTFT** $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ $X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$	**No periódica en frecuencia**
Discreta en el tiempo	**DTFS** $x[n] = \sum_{k=<N>} a_k e^{jk\Omega_0 n}$ $a_k = X[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$	**DTFT** $x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$ $X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$	**Periódica en frecuencia**
	Discreta en frecuencia	**Continua en frecuencia**	